中等专业学校试用教材

财经类专业通用

# 数 学

下册二分册

高等教育出版社

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

# 数　学

下册二分册

高等教育出版社

## 出版前言

本书是根据1981年10月教育部颁发的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲》编写的. 全书共分上、下两册，本书是下册二分册，内容有线性代数与线性规划初步，可作为中等专业学校财经类专业的数学教材.

本书原由人民教育出版社出版. 1983年3月9日，上级同意恢复"高等教育出版社". 本书今后改用高等教育出版社名义继续印行.

中等专业学校试用教材
财经类专业通用
数 学
下册二分册
*
高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
江苏盱眙印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 4.125 字数 90,000
1982年5月第1版 1985年8月第6次印刷
印数 415,501—471,500
书号13010·0740 定价 0.56 元

# 前　　言

《数学》下册二分册《线性代数与线性规划初步》是在东北、华北协作区编写的《数学》教材基础上，根据一九八一年十月教育部主持讨论通过的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的．由沈阳市财经学校负责主编，辽宁大学数学系郭第渐副教授、概率论教研室主任刘良和同志主审．参加编写的有沈阳市财经学校周作光、赵长骥、吴素文等同志．参加初稿编写的还有阜新财经学校刘大明同志．由于编者水平和经验所限，一定有不少缺点和错误，诚恳希望使用本教材的师生不吝赐教．

编　　者

一九八二年二月

# 目 录

# 第六章　行　列　式

## §1　$n$ 阶行列式

行列式是一个重要的数学工具，在数学的各个分支以及其他许多学科中都经常用到它．下面通过分析二阶与三阶行列式所具有的共性，把它加以推广，给出 $n$ 阶行列式的定义．

已知二阶与三阶行列式分别为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

其中 $a_{ij}$ 称为行列式的元素，第一个足标表明该元素所在的行数，第二个足标表明它所在的列数．

由此可以看出二阶和三阶行列式的展开式有一个共性，就是每一项都是从不同的行、不同的列各取一个元素的乘积，这样尽其可能地组成所有各项，它们的代数和即为该行列式之值．因此二阶行列式恰有 $2!$ 项，一项为正，一项为负；三阶行列式恰有 $3!$ 项，其中三项是正的，另外三项为负的．

若将三阶行列式的展开式写成如下形式：

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{22} & a_{33} - a_{11} & a_{23} & a_{32} + \\ -a_{12} & a_{21} & a_{33} + a_{12} & a_{23} & a_{31} + \\ +a_{13} & a_{21} & a_{32} - a_{13} & a_{22} & a_{31} \end{array}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1^\circ)$$

$(1^\circ)$式给出了用二阶行列式来定义三阶行列式的方法。类似，可用三阶行列式来定义四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \qquad (2^\circ)$$

这样，以逐次递推方式，用 $n$ 个 $n-1$ 阶行列式($n\geqslant 2$, $n$ 是正整数)可以给出 $n$ 阶行列式的定义。

**定义：** $n$ 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}. \tag{3°}$$

$n$ 阶行列式有 $n$ 行、$n$ 列，是由 $n^2$ 个元素组成的．其中 $a_{11}$, $a_{22}, a_{33}, a_{44}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角线上的元素，简称主对角元.

将(3°)式的右端继续展开下去，一共有 $n!$ 项，$\frac{n!}{2}$ 个是正的，另外 $\frac{n!}{2}$ 个是负的；每一项都是 $n$ 个不同行不同列的元素的乘积.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -6 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -6 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

注意，以前学的对角线法则仅适用于二、三阶行列式，对于四阶行列式或者高于四阶的行列式不能用对角线法则.

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式称为三角形行列式．前者叫下三角形行列式，它的主对角线上方的元素皆为零；后者叫上三角形行列式，它的主对角线下方的元素皆为零.

显然，三角形行列式之值等于其所有主对角元之积.

例如，

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 18 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot3\cdot5 = 90.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot3\cdot5 = 30.$$

## §2　行列式的性质

**性质一**　把行列式的各行变为相应各列，（称为转置行列式），其值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}=12-10=2.$$

由这一性质可知，对于行列式的行成立的性质对于列也一定成立；反之亦然.

**性质二** 把行列式的某两行(列)对调，则该行列式之值只改变符号．即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{vmatrix}=2.$$

**性质三** 如果行列式某两行(列)的对应元素相同，那么这个行列式的值等于零.

例如，

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\3 & 1 & 1\\2 & 1 & 5\end{vmatrix}=0.$$

**性质四** 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某数$K$，等于用数$K$乘原行列式.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times3 & 2\times1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

**推论 1** 行列式的某一行(列)有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

**推论 2** 如果行列式某一行(列)的所有元素都是零，那么该行列式的值等于零.

**性质五** 如果行列式某两行(列)的对应元素成比例，那么它的值等于零.

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

**性质六** 如果行列式的某一行(列)的元素都可表示为二项之和，那么这个行列式等于从这些元素里各取一项作成相应的行(列)，而其余各行(列)不变的两个行列式的和.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**性质七** 把行列式某一行（列）的所有元素同乘以一个数 $K$，加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11}+Ka_{21} & a_{12}+Ka_{22} & a_{13}+Ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

行列式的这些性质在计算或理论上都很重要，适当引用行列式的性质可以简化行列式的计算.

**例 1** 利用行列式的性质计算

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3\times2 & 3\times3 & 3\times7 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 2 行上}]{\text{把第 3 行加到}} 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\times0=0.$$

利用行列式的性质把行列式化为三角形行列式，可使计算简便.

符号说明：在以后的计算中，为简明起见，用圆括号内数字表示行的位置；用圆内数字表示列的位置；符号“$\longleftrightarrow$”表示行(列)对调. 例如，(1)$\longleftrightarrow$(3)表示第 1 行与第 3 行对调；④$-\frac{1}{8}$③表示把第 3 列乘以$-\frac{1}{8}$然后加到第 4 列，即第 4 列减去第 3 列的 $\frac{1}{8}$倍.

**例 2** 把下面行列式化成三角形行列式，然后计算其值.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{(1)\longleftrightarrow(3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①\longleftrightarrow③} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④+①]{③-2①} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -11 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④+②]{③+11②} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 2 \\ 3 & -5 & -60 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④-\frac{1}{8}③} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 0 \\ 3 & -5 & -60 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times16\times\frac{5}{2}=40.$$

例 3　计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

这个行列式的特点是主对角线上元素是 $a$，其余元素是 $b$。根据性质 7，把第二列一直到第 $n$ 列都加到第一列上，行列式的值不变，即得：

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

把第二行到第 $n$ 行分别加上第一行的 $-1$ 倍，就有：

$$D=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix},$$

这是个上三角形行列式，所以

$$D=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

**例 4** 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ e+f & f+m & m+e \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

**证明:**

由性质六及性质三, 得:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ e+f & f+m & m+e \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ e & f+m & m+e \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ f & f+m & m+e \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ e & f+m & m \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+a & b \\ e & f+m & e \\ y & z+x & y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ f & f & m+e \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ f & m & m+e \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ e & f+m & m \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ f & m & m+e \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & m \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & m & e \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

## §3 行列式的计算

由 $n$ 阶行列式的定义可知, 任一 $n$ 阶行列式都可以展开为

$n$个$n-1$阶行列式来计算. 为进一步研究行列式的计算，先给出如下几个概念.

**定义 1** 在$n$阶行列式$D$中，任取$k$行及$k$列$(1\leqslant k\leqslant n)$，由这些行与列相交处的元素所组成的新的$k$阶行列式$M$，称为原行列式$D$的一个$k$阶子式. 在$D$中划去这$k$行，$k$列元素以后，余下的元素按其相对位置排成一个新的行列式$M'$，称为$M$的余子式.

例如，在5阶行列式$D$中，取第2、4两行及2、3两列，则

$$D=\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & a_{15} & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
\cdots & a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{23} & \cdots & a_{24} & \cdots & a_{25} & \cdots \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
\cdots & a_{41} & \cdots & a_{42} & \cdots & a_{43} & \cdots & a_{44} & \cdots & a_{45} & \cdots \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \text{为}D\text{的一个 2 阶子式，}$$

$$M'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{51} & a_{55} \end{vmatrix} \quad \text{为}M\text{的余子式.}$$

**定义 2** 把行列式$D$中的某一元素$a_{ij}$所在的行与列划去以后所得到的$(n-1)$阶子式$M_{ij}$叫元素$a_{ij}$的余子式. $(-1)^{i+j}M_{ij}$称为$a_{ij}$的代数余子式，记作$A_{ij}$.