数学与唯物辩证法

（代数与初等函数部分）

序　言

数学，和其他科学一样，是在实践的需要下萌芽的，是在实践的土壤里生长的。它的发生、发展总是取决于社会的实践，受到时代的制约和哲学思想的支配。尽管数学内容发展到近代变得十分庞大复杂，但是归根结蒂，科学数学所反映的仍是物质在空间形式和数量关系方面的客观规律，其所以如此庞大复杂也正是客观物质多样性的表现。

数学在反映物质规律时常常采取高度抽象的形式，这就是众所周知的数学的“抽象性”。对于“抽象性”，不同的宇宙观有不同的解释，因而对于抽象性的解释历来就是唯物主义和唯心主义斗争的一个焦点。唯心主义将数学的抽象性和数学的物质性加以割裂，使“抽象”离开物质，从而肆无忌惮地把抽象推向极端——现实世界的“彼岸”或上帝那儿。这样，唯心主义就可以鼓吹数学是先验的了，鼓吹数学是数学家的“灵感”和“天赋”的产物，鼓吹数学的研究可以走理论脱离实际的道路，等等。唯物主义则认为数学的抽象性只是在表面上掩盖它起源于外部世界的事实，唯物主义又认为科学的数学抽象是更深刻、更正确、更完全地反映着物质的空间形式和数量关系。因此，在数学领域里批判唯心论的先验论，坚持唯物论的反映论，乃是数学教学的首要任务。

数学作为一门科学来说，有它本身的规律性。首先，数学内部的矛盾是按辩证法的规律在运动的。无论初等数学还是高等数学，都充满着矛盾，因而必然存在着矛盾的运动。

数学的各种丰富的规律性无非就是唯物辩证法在数学里的表现，因而科学的数学又成为辩证的辅助工具。但是，形而上学极力否定这种矛盾的存在，否定数学中的矛盾运动，从而否定数学中的唯物辩证法。因此，数学教学的又一重大任务就是揭示这种矛盾的运动规律，只有这样才能在数学教学中运用、体现事物的矛盾法则——辩证法的规律。其次，在数学认识或数学内容开展中，又离不开逻辑上的连贯性，不同的然而是正确的逻辑连贯性，构成了不同的数学系统性，也构成解决实际问题的一种方式与风格。就这个角度上说，培养学生逻辑思维能力和空间想像能力在数学教学中具有特殊意义。这种特殊性是不能被抹煞的，但是这种特殊性应该受到辩证逻辑（即事物的矛盾法则）这种普遍性的指导与约束。只有这样，才能通过数学教学培养学生具有一定的分析问题解决问题的能力；才能使数学教学成为培养学生辩证唯物主义世界观的一块阵地。

本书试图以上述观点对中学代数课程中的具体数学内容作一番探讨。

数的概念，式的恒等变形，方程的理论以及函数的基本知识构成了中学代数课程的主要内容，我们就是按照这种科学的系统来展开本书内容的。“数”是基础，“方程”是应用。学生的数概念达到什么水平，那么其方程理论的掌握也就达到相应的水平；反之，学生的方程知识达到什么高度，那么为方程理论提供基础的数的知识也就达到相应的高度。在初中阶段，数和方程的教学是交错进行的：有理数和一次方程，无理数和二次方程，至于三次四次方程和虚数则还未列入目前的中学教学内容。如果从“数”到“算术应用题”

必须经过"算术式的运算"的话，那么从"数"到"方程"就必须经过"代数式的恒等变形"。代数式的恒等变形是在数被抽象文字代替以后所产生的新事物。因为对于具体的数来说可以算值，但对于代"数"的文字，其值如何算呢？于是，数的算式运算就必然发展到代数式的恒等变形——化简或变形。如果不是这样，数学一步也动弹不得，前进不了，只能是凝固着，连最简单的方程问题都不能解决。函数概念是数、式、方程知识的提炼与升华，是变化运动观点在数学中的基本运用，因而函数思想在中学数学教学中无疑是具有指导的意义，因为正是由于这种思想才极迅速地开拓出数学应用的新的广阔领域。由于篇幅关系，我们未能使"式的恒等变形"独立成章，它的主要内容插入在第二、三章中介绍。

本书各部分的叙述，其深浅是不一致的。一般地说，我们是在读者具备相应的数学知识的基础上，尽可能地分析与阐明这些数学知识的物质性和辩证性，並且对这些数学知识的进一步发展也作一些展望，进行一些知识性的介绍，以便使读者尽可能看得远一些，了解得多一些。

运用辩证唯物主义观点来分析中学数学内容，这是一件新的工作。由于受到思想水平和业务水平的限制；又缺乏实际经验，再加上编写时间匆促，因而书中一定有不少缺点和错误，恳切地希望广大读者批评与指正。

最后，我们向武义县印刷厂的工人同志们表示诚挚的谢意，正是由于他们的辛勤劳动，才使得这本书能和读者见面。

编　者

1973年6月

目　　录

第一章　数的概念……………………………………（1）
第一节　数概念的历史发展……………………………（1）
第二节　正负数……………………………………………（26）
第三节　无理数……………………………………………（40）
第四节　虚数………………………………………………（50）
第二章　方程……………………………………………（69）
第一节　引言………………………………………………（69）
第二节　从"数字"到代"数"的"文字"……………（71）
第三节　一元一次方程……………………………………（78）
第四节　多元一次方程组…………………………………（95）
第五节　二次方程…………………………………………（103）
第六节　分式方程…………………………………………（113）
第七节　无理方程…………………………………………（119）
第八节　特殊高次方程……………………………………（123）
第九节　三次方程的公式解………………………………（126）
第十节　四次方程的公式解………………………………（133）
第十一节　关于代数方程的公式解………………………（135）
第三章　函数……………………………………………（138）
第一节　函数概念的历史概述与基本分析………………（138）
第二节　变量与函数………………………………………（155）
第三节　幂函数……………………………………………（171）
第四节　指数函数…………………………………………（192）
第五节　对数函数…………………………………………（200）
第六节　三角函数…………………………………………（221）
第七节　函数与方程………………………………………（243）

第一章　数的概念

第一节　数概念的历史发展

一、自然数的产生

数和形，是人类在和自然界斗争过程中自然和必然产生的数学认识。随着社会实践活动的发展和人们认识能力的相应提高，关于数和形的认识才日益丰富和不断完善，以至发展到内容十分浩繁的近代数学的各个分支。但是，归根结蒂就其内容的对象来说，仍不外乎是高一级的数和形的问题——**现实世界的空间形式和数量关系**①。

在这里，我们仅就数概念的历史发展作一梗概和简介。

据考证，数的观念可以远溯到数十万年以前的旧石器时代。原始人猎取了食物，需要分配，在分配过程中伴随着"数一数"的活动；在制造打猎武器过程中又伴随着"量一量"的活动。当然，对于原始人来说，只不过是"数一数""量一量"的一种无意识的举动，因为他们既没有数的概念，也无度量的思维。就在长期的历史过程中，在亿万次的这种经验积累中，人类才开始形成了"多少"的观念。在实践中，这种"多少"观念的不断抽象与提炼，最终产生了突变和飞跃，"多少"这个观念被分解了。这时候，人类已经能够

注：①恩格斯《反杜林論》，1970年版（下同），第35頁。

用各种特有的方式，来比较和判断这一个物体集合或那一个物体集合的大小。在这个阶段，数已被人们了解为物体集合的不可缺的性质，但是，数还紧紧地和实物结合在一起，没有从实物中抽象和分离出来。例如，有些民族用“我”或“月亮”表示“1”，用“眼睛”、“耳朵”或“鸟的翅膀”表示“2”，用“手”表示“5”，用“人”表示“20”（人有十个手指和十个脚指），对于大数量，很多民族用结绳、木棒打捆、刻刀痕、数石块等办法来记录。在数还未从具体事物中分离出来的这个阶段，“三个人”和“三棵树”是用完全不同的语言的，这就是说，“数”还没有从具体事物中“独立”出来。

数学符号的引进是人类数学认识的重大转折，它标志着“数”已从具体事物中被抽象出来，具有“独立”的地位。这时，具体事物的其他属性已被撇开，而仅仅注意並提取出物体或事物集合所具有的数量上的共性：这种性质对于所有那些物体之间可以将物体建立一一对应的集合来说是共同的，对于那些不可能将其物体建立一一对应的集合来说是不同的，也就是说所有可以建立一一对应的集合所含的数量是相同的。人类的这种初级的数学抽象能力是在实践中发生的，是长期地归纳、类比和概括的结果，正如恩格斯所指出：**“为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。”**①

各民族都有自己独特的数字符号——自然数的前身。当然，这些数字符号远不是现代这种自然数的书写方法，即使

注：①恩格斯《反杜林論》第35頁。

有限与无限

被称为印度——阿拉伯的自然数数码字，它从印度传到阿拉伯再传到欧洲时，还不完全是现在的这种写法，直到后来，几经演变（好几个世纪），才最后形成现在世界上通用的自然数数码字。

在自然数计数系统中需要特别指出的是记数的“位值原则”。如果说，无穷多个自然数数字要用无穷多个互不联系无一定规律的独立符号来表示，那么人们的数学认识能够前进多远呢？显然，如果不创造新的方法，记载和运用大数将成为非常麻烦和困难的事情。比如在罗马数字符号写法中，372的写法是：CCCLXXII，这种写法本身就够麻烦了，如果再乘上一个较大的数，那么运算就变得很艰难了。这种计数上的客观矛盾导致了计数的“位值原则”的产生。不同的民族和国家在其开始阶段采用不同的“位值原则”的进位方法。如我国一开始就采用十进位制计数法，在巴比伦十进位制和六十进位制是混合用的，有的民族还采用五进位制，十二进位制，我国的秤又是用十六进位制计量的等等。通过历史的选择，最终形成了世界统一的十进位制计数法，而其他进位制也得到了某种保留，运用在某些具体问题的计数中，如时间、角度要用到六十进位制。

进位制计数法是人类最早最重大的一次数学发明，这种发明不是来自哪一个人和哪一个民族，而是来自群众，来自各民族。由此可见，数学发明从其一开始就是来自群众的实践，群众是数学创造的真正主人。

进位制计数法包含了深刻的辩证法。自然数是无限多的，用于表达自然数的数码字只有有限个（十进位制里有10个：1，2，……，9，0），利用位值原则，同一个数字由于它所在位置不同而有不同的值，这就可以在原则上实现

无限多个自然数的表达，因为对任意一个自然数，不论其多大，一旦确定下来，就可以把它写出来。这种用有限个数码字来表达无限多个自然数的思想方法是极其深刻而辩证的。在位值原则中，体现了“有限”和“无限”的一种对立统一。这样看来，进位制计数法确是一件了不起的数学成就。关于这一点，往往容易被人们所忽视。

进位制计数法不是从天上掉下来的，也不是人的头脑里固有的，而是人们长期实践的结果。就以十进位制计数法来说，它的产生是与一个极其简单而平凡的事实所联系，即人有十个屈指可数的手指，它既是人类祖先又是学龄儿童活的“计算器”，是十进位制产生的物质基础。

人类有了自然数的同时，也就有了自然数的运算。例如，有些民族把三叫做二一，四叫做二二，五叫做二三，六叫做三三。我国数字“三十”表示“三个十”。罗马数字Ⅶ，Ⅸ表示$7=5+2$，$9=10-1$。这就是用加法、减法来命名或书写较大的一些数。这种事情告诉我们，数和数的运算必然是密切地联结在一起。数是从运算中产生的（这种运算是被生产实践的进程所决定），不能运算的“数”是僵死的，毫无现实意义的，因而不能称其为“数”。

零作为数字而被引入确是后来的事件，是在分数（不带正负号的）产生后才出现的。这种情况可以给予唯物的解释：因为零的最初意义是表示“没有”，正是因为“没有”，所以也就没有迫切需要过早地赋于独立的符号，完全可以用“不写”或“空位”来替代。零在十进位记数系统中，已经明显地表示“不是没有”了。当“0”添写在“1”后而组成“10”时，“0”的意义不仅表示“没有”（个位上“没有”），而是更表示确定的“有”了，它和1一起组成

“十”，其数量比1猛增十倍。当正负数引入后，作为中性数、分界点的“0”，其意义更丰富了。到了抽象代数中，作为零元的“0”，已成为加法运算不可缺少的具有特殊意义的元素。在微积分学中，作为无穷小量的符号“0”，扮演着既是零又不是零的角色，马克思、恩格斯曾干脆直截了当地令$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$。

零加入自然数列后，称它们为扩大了的自然数列。在小学教学中，零和自然数1，2，……同时被引入，而无需重复零产生迟后的历史，这完全是为了使儿童迅速地掌握十进位制记数方法的需要。

二、分数的产生

“数一数”和“量一量”的这种实践活动，随着生产的发展，必然从低级走向高级，从简单走向复杂。在分配食物时，总要发生分不完或有剩余的情况，如果需要再分，那么这种再分的实践活动就为分数的产生提供了物质基础。在度量过程中，常常会发生度量不尽的情况，如果要更精确地度量下去，就必然产生自然数不够用的矛盾，这样，分数也就应运而生了。

据历史考证，分数产生于度量（测量）之中。我国最早的二部著名的数学巨著《周髀算经》(公元前一世纪)和《九章算术》（公元一世纪）的记载也证明了这一论断。《周髀算经》是一部天文数学书，书中记载了用分数计算月行速度。《九章算术》是一部研究生产、经济问题的数学书，在它的第一章“方田章”的土地测量计算问题中，就有了分数的加减乘除。

如果说，自然数是从“多少”的数量概念中分解出来的，那么，分数便是从自然数中继续分解出来，就其本质而言，这正是对立统一的“一分为二”的过程。

我国用分数这个名词。在欧洲，最初把“分数”叫做“破碎数”，它和“分数”的名词一样，都清楚地反映了分数的来由，朴素地揭示了分数的物质性。

根据上述观点，我们可以在某种意义上把分数看作是对自然数的“分割”。分数$\frac{p}{q}$就是用q去分割p，将p分割成q等份而取其中的一份，中间一横正表示这种意义下的分割。我们之所以这样论述（供讨论）是为了和有理数分割产生无理数的理论统一起来，使后者成为前者的自然引伸和进一步发展。

从自然数扩张到分数，这是在数概念发展道路上，在数一数、量一量的实践过程中“由简单到复杂、由粗略到精确”的第一步，这一步是容易理解和掌握的。

三、无理数的产生

自然数和分数在解决生活和一般生产活动的问题上是足以付用的。但是，随着社会实践活动的发展，人的认识不会停止在原有的水平上。在数一数、量一量的度量活动中，如果仅以实用为目的，那么只能认识到分数；如果进一步加以研究，进行论理的认识，那么无理数的发现就势在必行。单位正方形的对角线长是多少呢？以实用来说，其对角线长可取1.4，1.41，1.414等等，论理的认识则要求完美地回答单位正方形对角线长究竟是多少？现在我们知道这个完美的答案是无理数$\sqrt{2}$。

在历史上，关于无理数$\sqrt{2}$的产生是经历一番曲折和斗争的，是辩证唯物主义对于唯心主义形而上学的胜利。早在古希腊，毕达哥拉斯学派（该学派的所有数学发现都归功于毕达哥拉斯，都称毕达哥拉斯定理，所以过去外国称勾股定理为毕达哥拉斯定理，这个定理是否就是毕氏发现也是值的怀疑的）发现了单位正方形的边长和对角线是不可公度的，亦即不能共同用某一线段去有限次地量完单位边和对角线。毕达哥拉斯被这种情况所吓坏，原来毕达哥拉斯学派的哲学主张是唯心主义的，他们荒谬地主张："自然中一切都可以度量，一切都受数的支配，一切事物的本质是数，……数就是一切。事物的本质和基础不是物质而是数。"他们所说的数当然是指他们当时所认识到的自然数和分数。当发现单位正方形的对角线不能被单位边长所公度时，对于毕氏来说，不是说明了该对角线长失去了"数"（分数）的本质吗？！这就表明单位正方形对角线的本质"不存在"了，从而从根本上动摇了毕氏学派的哲学基础，毕达哥拉斯怎么能不因此而惊惶失措呢！在当时情况下，如果把上述事实传播出去，那么以数（分数）为哲学基础的毕氏学派就将遭受灭顶之灾，从而分崩离析。因此，毕达哥拉斯因惧怕真理而严禁学派成员泄露这个机密，谁泄露出去谁就将遭受严厉惩罚。但是，历史是无情的、不可抗拒的，终于有一位毕氏的学生泄露了这一机密，传了出去。虽然这个学生被开除出学派，但是不久，毕达哥拉斯学派也就瓦解、崩溃了，更多的成员分散到各地传播着无公度线段的存在。

不可公度线段的存在表明，它的长（例如$\sqrt{2}$）不能用分数表达出来，即不能用二整数之比(分母不为零)来表达。但是，它的"长"是客观存在的，不是"长度"不存在，而

是当时的“数”(自然数和分数)不够用，应该赋于新的数，即需要扩张数的概念。这种新的数是一种“无比数”，关于这一点我们可以从无理数的英语*irrational*（*number*数）这个词汇中看到：它的词冠*ir*－表示“无”，词根*ratio*表示“比”、“比 例”，所以*irrational*确实蕴含无比的意思。编者认为，在很长的历史时期内，由于对无理数的无可理解，使该词汇转意而解释为无理的意思，从而使无理数的命名带上了不可知论的唯心主义的色彩。由上述可知，“无理数”並不“无理”。

无理数（个别的）的发现远远地早于负数的产生，这是因为无理数是分数的最自然的延续。在数一数、量一量的度量过程中，首先产生分数，这对于解决简单问题已够应用，因为实际数字的计算中只要满足所要求的精确度就可以了。实际的度量手续受到度量工具限制，不可能无限止地进行下去。但是论理的认识则要求精确地刻划与反映这种无公度线段的长，于是，就要对这种无公度线段作理性上的无限次“度量手续”，要将数一数、量一量在理性认识上无限制的进行下去，因此我们可以说，无理数是“无限次度量手续”的数学概括，是人们对“连续量”的认识，而在这以前——自然数和分数还属于对不连续量的认识。

从自然数到分数（不带正负号的），从分数到无理数（不带正负号的），这是在刻划事物所含的绝对数量这个方向上的一系列的数学认识，它回答数一数、量一量的结果。具体地说它回答长度、面积、体积、重量、质量、时间……究竟包含多少绝对量值的问题。在回答这些问题过程中，自然数和分数相比之，前者简单、粗略，后者复杂、精确；分数和无理数相比之，前者简单、粗略，后者复杂、精确，这正

是一条“由简单到复杂、由粗略到精确”的认识道路。在数学上这是一条认识连续量的道路——从不连续量的认识到达连续量的认识，不连续与连续这对矛盾的对立统一构成了数学内容发展的一种规律性。

至于无理数理论的完善则是需要籍助于描述“无限次度量手续”的极限理论，或对有理数实行具有特定意义的戴狄金“分割”。这种“分割”与作为对自然数的分割——分数有某种程度的类似。我们将在无理数一节中谈及。关于这些内容已是很迟的事情，是和微积分理论的完善同时进行的。

四、负数的产生

我国是认识正负数最早的国家，公元一世纪的《九章算术》就有了正负数的记载。在欧洲，负数的产生经历了比无理数更为艰难曲折的道路。到十五世纪才开始知道负数，到十六世纪还有许多数学家不承认负数，例如法国数学家韦达（1540—1603）在得出二次方程根与系数关系的定理时还只允许正根的情况，而认为负根是无意义的。欧洲直到十七世纪才对负数有一个完整的认识。但是反对承认负数的情况一直持续到十八世纪，十八世纪的英国教会还对负数提出抗议。

负数的产生为什么如此艰难呢？为了回答这个问题，我们必须深入地分析数概念扩张的动力及其客观过程。从自然数（扩大了的自然数）到分数（不带符号）再到无理数（不带符号），这一过程是和度量过程相联系、相适应的，这些数就是对度量不断给予精确的数学描述而产生的，是认识连续量这一道路上的几个里程碑。分数（不带符号）是自然数

的自然延续与扩张，无理数（不带符号）是分数的自然延续与扩张。这个延续和扩张的道路是沿着揭露事物所含的绝对量值——连续量这个方向上开辟的。如果在这样一种方向上来考虑问题，那么既不能发现负数也不能认识别人所发现的负数。线段的长度、人口的数量、产品的数量、物体的重量……，怎么能导致负数的产生呢？最少是"没有"，即数量为零，怎么会出现比"没有"即比零还少的数量呢？用老的数概念去套实践中新出现的事物，当然是不能理解的，因而必然得出比零小的数是荒谬的不可思议的结论。

原来，负数是在一个崭新的方向上认识着事物的数量关系。在这个方向上不仅考虑到事物的绝对含量，而且还需要同时考虑到事物的"方向"，负数就是人们认识"方向数量"道路上的起点。显然，新起点的开辟和建立是困难的，它需要足够的动力——实践的需要。当实际问题需要同时考虑相反意义的两种量时。千百万次的经验促使人们感到，不仅需要注意事物绝对含量方面的数值，而且还需要同时再考虑相反意义的这种"方向"。这种情况在解应用问题、解方程中最易碰到。在应用问题中和在方程问题中，总是要同时考虑向东向西、正向反向、上升下降、收入支出等等相反意义这两个因素。在近代生产中这种情况表现得更为明显，对正负数产生的要求更为迫切。如正负电、作用力反作用力、转动的顺时针方向和逆时针方向等等。由于人们的实践需要。各种描述相反意义的一维"方向量"的正负数理论假设随之产生，通过实践的检验和选择，保留了正确的假设，淘汰剔除了错误的假设（确有这种史实记载），最后形成了目前这种完善的正负数理论。

负数是相对于正数而言的；正数也是相对于负数而言的，

它们是对立统一规律在数量关系上的最简单的反映。如果缺乏辩证的观点，去孤立地考察负数，那么“负”的意义是不可能被理解的。在欧洲，一些不承认“负数”的人，用荒谬的形而上学的诡辩去反对“负数”的存在。他们说一只箱子装的物品的数量能是负的吗？抽屉里放的东西的数量能是负的吗？家庭中的人口数量能是负的吗？当然，他们用无需用正负数描述而仅用“算术数”就能解决的问题来进行诡辩。识破这种诡辩的武器是恩格斯关于负数的著名论断：**“代数学上的负数，只是对正数而言，只是在和正数的关系中才是实在的；在这种关系之外，就其本身来说，它们纯粹是虚构的。”**①

有了正负数后，把这以前的数称之为“算术数”。零不作为算术数，无理数因其教学在正负数之后，故不提“算术无理数”了。作为一种科学概念来说，算术数是指不带正负号的数，它反映与刻划事物所含的绝对量值。正负数不仅反映与刻划事物所含的绝对量值，而且还反映与刻划事物的“方向”，这里所指的方向不只是向东向西的方向，而是泛指相反的两种意义，它标在数轴上就是数轴的二个相反方向。

五、绝对值概念的产生

在正负数自身中包含了两种因素：一是包含事物的绝对含量的数值；二是包含该事物的“方向”。它确实比“算术数”优越得多。但是，事物都是一分为二的。在很多场合下，我们无需注意“方向”，而对事物的绝对含量却是十分需要知道。例如，发电机（直流）发电的电压、电流数值，

注：①恩格斯《自然辩証法》1971年版（下同）第240—241頁。

汽车、火车和飞机的最大飞行速度，作为一种规格的数量概念来说，无需去考虑它们的“方向”。这样，在一些场合下，就常常需要去掉正负数所包含的“方向”这个因素，而只留下“绝对含量”这个量值，于是“绝对值概念”就在这样的需要下产生了。

对正负数取绝对值就是把正负数变为其相应的算术数。因此，绝对值的作用就是去“符号”，去“方向”，从而得到相应的事物绝对含量——算术数。

柏拉基斯和利亚平等教学法书上断然声称：没有不带符号的算术数，算术数绝对值就是正数。对此，我们要作一番评论。我们发现，凡是赞同这种观点的书本，都不引用伟大导师恩格斯、列宁和毛主席关于正负数是矛盾对立统一的论述。如果说算术数概念、绝对值概念就是正数概念的话，根据正数和负数是相对区分的道理：“十和一相等”①“正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的，不仅在解析几何中是如此，在物理学中更是如此。”②那么岂不是说，算术数概念、绝对值概念就是负数概念了吗？！这就陷入了不可自解的矛盾深渊？！所以，从概念上讲，算术数和绝对值是属于一个范畴，而正数、负数又是属于另一个范畴。把算术数概念、绝对值概念和正数概念等同起来是错误的。

但是，对于数常常需要运算。正数的运算在被减数不小于减数的条件下，是与算术数运算“同构的”。研究运算，只研究运算的结构、规律，而不考虑运算对象的具体属性：是

注：①恩格斯《自然辩証法》年版第5頁。

②恩格斯《自然辩証法》年版第194頁。