

理 科 要 覽
吳 建 文

幾何學

最新修訂本

商務印書館

3
5

江苏工业学院图书馆

藏 书 章

幾 何 學

商 務 印 書 館

理科要覽

幾何學

(最新修訂本)

出版者 商務印書館香港分館
香港皇后大道中三十五號

印刷者 商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街七十五號

* 版權所有 *

1959年9月修訂版 1978年7月重印

幾何學緒論.....	(1)	特殊平行四邊形的性質.....	(47)
關於線段和弧.....	(3)	三角形的內心和旁心.....	(49)
關於角的概念.....	(5)	三角形的外心和垂心.....	(51)
定義公理和定理.....	(11)	三角形的重心.....	(53)
命題的形式.....	(13)	直線形的應用問題(一).....	(55)
多邊形和三角形的概念.....	(15)	直線形的應用問題(二).....	(57)
等腰三角形的性質.....	(17)	直線形的應用問題(三).....	(59)
三角形的判定定理(一).....	(19)	直線形的應用問題(四).....	(61)
關於不等量(一).....	(21)	直線形的應用問題(五).....	(63)
三角形的判定定理(二).....	(23)	關於圓的概念.....	(65)
三角形的判定定理(三).....	(25)	關於圓的定理和問題(一).....	(67)
關於直角三角形.....	(27)	關於圓的定理和問題(二).....	(69)
關於平行線.....	(29)	關於圓的定理和問題(三).....	(71)
關於三角形內角的和.....	(31)	關於圓的定理和問題(四).....	(73)
關於不等量(二).....	(33)	關於圓的定理和問題(五).....	(75)
關於不等量(三).....	(35)	關於圓的定理和問題(六).....	(77)
關於不等量(四).....	(37)	關於圓的切線(一).....	(79)
關於多邊形的概念.....	(39)	關於圓的切線(二).....	(81)
關於多邊形的定理.....	(41)	關於圓的切線(三).....	(83)
平行四邊形的定理和問題.....	(43)	關於兩圓的定理和問題.....	(85)
直線被平行線所截.....	(45)	關於正多邊形的定理和問題.....	(87)

關於圖的應用問題(一).....	(89)	梯形的面積和問題.....	(131)
關於圖的應用問題(二).....	(91)	餘形定理.....	(133)
關於圖的應用問題(三).....	(93)	商高定理和它的應用.....	(135)
關於圖的應用問題(四).....	(95)	商高定理的逆定理.....	(137)
關於圖的應用問題(五).....	(97)	商高定理的推廣.....	(139)
關於作圖的概念.....	(99)	中綫定理.....	(141)
基本作圖題(一).....	(101)	三角形的二邊的平方差.....	(143)
基本作圖題(二).....	(103)	海倫、秦九韶公式.....	(145)
基本作圖題(三).....	(105)	關於面積的雜例(一).....	(147)
基本作圖題(四).....	(107)	關於面積的雜例(二).....	(149)
基本作圖題(五).....	(109)	關於比和比例的概念.....	(151)
基本作圖題(六).....	(111)	關於比例的基本定理.....	(153)
基本作圖題(七).....	(113)	平行綫和比的移動(一).....	(155)
作圖應用問題(一).....	(115)	平行綫和比的移動(二).....	(157)
作圖應用問題(二).....	(117)	分角綫定理.....	(159)
作圖應用問題(三).....	(119)	相似三角形(一).....	(161)
作圖應用問題(四).....	(121)	相似三角形(二).....	(163)
作圖應用問題(五).....	(123)	Ptolemy 定理.....	(165)
關於面積的定義和定理.....	(125)	調和點列的性質.....	(167)
三角形的面積.....	(127)	方冪定理和它的應用.....	(169)
三角形的等積移動.....	(129)	方冪定理的應用.....	(171)

三角形兩邊的積.....	(173)	三角形五個心的軌跡.....	(215)
比例中項.....	(175)	平方和一定的軌跡.....	(217)
關於比例的基本作圖.....	(177)	平方差一定的軌跡.....	(219)
位似形的性質.....	(179)	有定比的軌跡(一).....	(221)
利用位似形作圖.....	(181)	有定比的軌跡(二).....	(223)
三角形面積的比(一).....	(183)	軌跡在作圖方面的應用(交軌法).....	(225)
三角形面積的比(二).....	(185)	面積的等分.....	(227)
相似多邊形的性質.....	(187)	等積形作法(一).....	(229)
圓周的長和圓的面積.....	(189)	等積形作法(二).....	(231)
Menelaus 定理.....	(191)	其他關於面積的作圖.....	(233)
Ceva 定理.....	(193)	過兩點作切圓.....	(235)
比例的雜例(一).....	(195)	正十邊形的作法.....	(237)
比例的雜例(二).....	(197)	平行移動法的應用.....	(239)
軌跡的定義.....	(199)	對稱和旋轉的應用.....	(241)
基本軌跡.....	(201)	計算題.....	(243)
軌跡的預測(一).....	(203)		
軌跡的預測(二).....	(205)		
軌跡的範例(一).....	(207)		
軌跡的範例(二).....	(209)		
軌跡的範例(三).....	(211)		
和或差一定的軌跡.....	(213)		

基

本

概

念

〔幾何學〕 幾何學和其他一切科學一樣，是由人類生活的實際需要而產生的。它是研究物體的形狀大小和相互位置的科學。

〔幾何體〕 只研究一個物體的形狀、大小而不研究其他性質的時候，我們就把這個物體叫做幾何體或簡稱體。

〔面〕 任何物體都是它的面來和鄰接它的其他物體分開的，例如把物體和鄰接它的空氣分開的就是這個物體的面。

〔線〕 當面和面相交的時候就得到了線，例如我們房間的地板和牆壁相交的地方就是線。

〔點〕 當線和線相交的時候就得到了點。

我們也可用運動來認識線和面。如果一點任意移動（例如鉛筆的尖端在紙上移動），那末它在這樣運動中就畫出一條線，如果一條線從一個位置移動到另一個位置（例如自行車車輪上的一條鋼絲）那末在運動中，它就產生一個面。

幾何體、面、線和點都不是獨立存在的，但是靠了抽象觀念的幫助，我們可以離開幾何體來研究面，離開面來研究線，離開線來研究點，那末點沒有大小，線沒有厚度和闊度，面沒有厚度。

〔幾何圖形〕 點、線、面、體的集合叫做幾何圖形。

幾何圖形可以在空間移動而不改變它的形狀、大小。

〔直線〕 直線是最簡單的線。拉緊了的鋼絲線，從一個小孔

射入的光線，或者是摺疊一張紙所成的摺痕，都給我們一個直線的觀念。直線有下面的性質：

通過任意兩點，可以引一條直線，並且只能引一條直線。

〔平面〕 平面是最簡單的面。在玻璃杯中處於平靜狀態的水面，磨得很平滑的鏡面，或者是優良的玻璃的表面，都給我們一個平面的觀念。平面有下面的性質：

如果用一條直線連結平面內的任意兩點，那末這條直線上的所有點都在這個平面內。

〔幾何學的種類〕 幾何學分二部分：平面和立體，第一種是研究所有各部分全在一個平面上的圖形的性質的。第二種是研究各部分不都在一平面上的圖形的性質的，本書是講的平面幾何學。

〔直線、射線、線段〕 如果直線是向兩端無限制地延長的那末就叫做無限直線或者叫做直線。



直線通常用放在它的任何兩點上的兩個大寫英文字母來表示或者用一個小寫字母來表示，例如上圖中的“直線 AB”或“直線 a”。

直線上任意兩點間的有限部分叫做線段，這兩點叫做線段

基

本

概

念

的端點。線段用兩個端點的大寫字母來表示或者用一個小寫字母來表示 例如“線段 CD”或“線段 b”。

線段 CD 的長叫做 C、D 兩點間的距離。

在直線上某一點一旁的部分叫做射線或半直線，這一點叫做射線或半直線的端點。例如射線 CO。

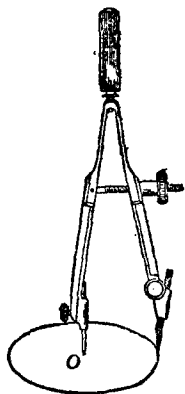


利用直尺，我們可以作出通過兩個已知點 A、B 的直線或線段，我們也可以把一個線段向兩方延長到任意長。

〔圓〕把兩腳規的兩腳張開，使一脚的尖端固定在紙上的 O 點，另一個裝有鉛筆的腳的尖端在紙上繞着 O 點轉動，可以在紙上畫出一條連續不斷，分不出首尾的曲線，這條曲線就叫圓。O 點叫做圓心，這個圓叫做 O 圓，O 點到圓上任何一點的距離叫做圓的半徑。

同一個圓的所有半徑都相等。

如果兩個圓的半徑相等，這樣的兩個圓叫做等圓，如圖當我們把這兩個圓的



圓心重合在一起的時候這兩個圓上所有的點就完全重合。因此等圓的半徑相等

〔割線〕通過圓上任何兩點的直線（例如 MN）叫做圓的割線或簡稱割線，或者說和圓有二個交點的直線叫割線。

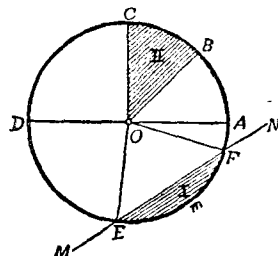
〔弦〕聯結圓上任意兩點的線段叫做弦，或者說割線的圓內部分叫做弦。

〔直徑〕直徑是通過圓心的弦（例如 AD），因此直徑是半徑的兩倍，並且在同一個圓內所有的直徑都相等。

〔弧〕圓周的任何一部分叫做弧（例如 EmF）。聯結弧的兩個端點的弦叫做這個弧所對的弦。

〔弓形〕一條弧和這個弧所對的弦所組成的圖形叫做弓形（例如圖中有陰影部分 I）。

〔扇形〕一條弧和分別過這個弧的兩個端點的兩個半徑所組成的圖形叫做扇形（例如圖中有陰影部分 II 叫做扇形 BOC）。



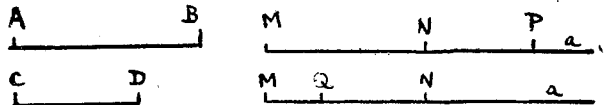
定義和法則

〔線段的相等和不等〕 兩線段，如果把其中一條放在另一條上面，而它們的兩個端點能分別重合時，這兩條線段叫做相等的線段。反之，兩線段便是不等，較小的線段是和另一線段的一部分重合。

要在任何直線 a 上取一等於已知線段 AB 的線段，可用兩腳規，其法如下：



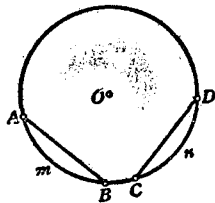
先把兩腳規的兩腳分開使它的兩個尖端的距離等於 AB ，然後保持這個距離，把兩腳規的一個尖端放在 C 點。移動另一腳畫一弧截直線 a 於 D 則線段 CD 等於線段 AB ，以等式 $CD = AB$ 或 $AB = CD$ 表示之。



〔線段的和與差〕 在直線 a 上任取一點 M ，依上法取 $MN = AB$ ，然後取 NP 或 NQ 使等於 CD ，那末 MP 便是兩線段 AB 、 CD 的和， MQ 便是 AB 、 CD 的差，我們用 $MP = AB + CD$ ，及 $MQ = AB - CD$ 分別來表示。

〔弧的相等和不等〕 把同一圓(或等圓)的兩弧中的一條弧放到另一條弧上，如果它們的兩個端點能夠分別重合，這兩條弧叫做相等的弧，否則便不相等。

從圓上一點可以向任何一方截取一條弧使它等於同圓(或等圓)中的一條已知弧。例如把兩腳規的兩腳分開使它的兩腳分別放在 A 和 B ，然後保持這個距離，把一脚放在 C 點另一腳畫弧交圓於 D 使得 $CD = AB$ 因為線段 AB 、 CD 可以重合，而且當這兩線重合的時候，它們所對的弧也必定重合(因為這兩條弧上所有的點到圓心 O 的距離都相等。)



問題

- (1) 已知三個線段 a 、 b 、 c ，求作一線段使等於它們的和，變動相加的順序，然後用兩腳規來驗證：

$$\begin{aligned} a+b+c &= b+c+a \\ &= a+c+b \end{aligned}$$

- (2) 作一線段使它等於已知線段的二倍。
問已知線段是求作線段的幾分之幾？

- (3) 已知線段 a 和 b ($a > b$)，求作一條線段使它等於 $3a - 2b$ 。

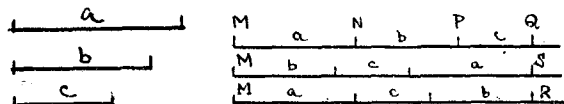
- (4) 從直線上的一點 M 起截取線段 MN 等於 3 厘米，再從 N 起向相反的方向截取線段 NP 等於 5 厘米，求這兩條線段的中點間的距離。

- (5) 已知同一個圓的兩個弧，試利用兩腳規作出它們的和及差。

解

答

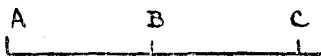
(1) 假定 a, b, c 為三個已知線段，我們任畫一直線。



在它上面任意取一點 M 。取兩腳規分開使兩腳間的距離等於線段 a ，以 M 做圓心， a 做半徑畫弧交此直線於 N ，那末 $MN=a$ 。其次以 N 做圓心， b 做半徑畫弧得 P ，同樣得 $PQ=c$ ，那末 $MQ=MN+NP+PQ=a+b+c$ 便是所求的和。

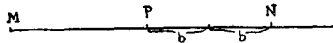
變動相加的順序，我們得線段 MS 及 MR 。用兩腳規來驗證可知 $MQ=MS=MR$ ，
就是 $a+b+c=b+c+a=a+c+b$ 。

(2) 延長 AB ，用 B 做圓心， AB 做半徑，用兩腳規畫弧交 AB 的



延長線於 C ，那末 AC 便是 AB 的兩倍，反過來 AB 便是 AC 的二分之一，也可以說 B 是線段 AC 的中點，或者說 B 點平分線段 AC 。

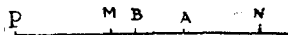
(3) 先任意作一條直線並且在這條直線上面取一點 M ，作一線段 MN 使等於 $3a$ 。其次以 N 為端點，在相反方向作



$NP=2b$ 。那末 MP 便是所求的 $3a-2b$ 。注意如果以 M 為端點取一線段 $=2b$ ，也可得出同樣結果。

(4) 假定 $MN=3$ 厘米，

$NP=5$ 厘米，



而且假定 A 是 MN 的中點， B 是 NP 的中點，那末

$$BN = \frac{1}{2}NP = 2.5 \text{ 厘米}, AN = \frac{1}{2}MN = 1.5 \text{ 厘米}.$$

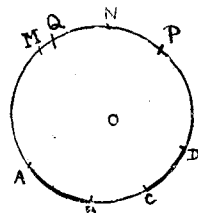
所以 $AB=BN-AN=2.5 \text{ 厘米} - 1.5 \text{ 厘米} = 1 \text{ 厘米}$ 。

(5) 假定 AB, CD 是已知的兩個弧，在圓上任意取一點 M ，先作弧 MN 使等於 AB 弧。然後按同一方向在 N 點繼續作弧 NP 使等於弧 CD 。那末

$$\widehat{MP} = \widehat{MN} + \widehat{NP} = \widehat{AB} + \widehat{CD}.$$

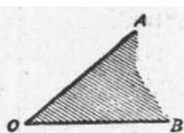
假使弧 NP 取相反向，作弧 NQ 交弧 MN 於 Q 點，那末我們便得 AB, CD 兩個弧的差。

$$\widehat{MQ} = \widehat{MN} - \widehat{NQ} = \widehat{AB} - \widehat{CD}.$$



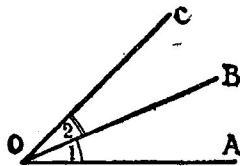
定 義 和 法 則

〔角〕 從同一點引出的兩條射線(如圖中的 OA, OB) 所組成的圖形叫做角。組成角的兩條射線叫做角的邊,它們的公共端點(O)叫做角的頂點。角的兩邊把整個平面分成兩部分:一部份叫做角的內部,另一部分叫做角的外部。但普通都把有陰影的部分叫角的內部。



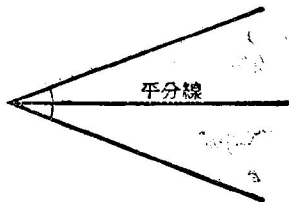
角通常用符號“ $\angle$ ”來表示,圖形中的那個角叫 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$,但須注意表示頂點的字母一定要寫在中間。假使沒有別的角相混,我們可以記做 $\angle O$ 。我們也可以用寫在角的內部靠近頂點的一個數字來表示例如 $\angle 1, \angle 2$ 等。

〔角的相等和不等〕 把一個角放到另一個角上,如果它們的頂點、兩邊和角的內部都能夠重合,這兩個角就叫相等的角。如果兩個角的頂點,和角的一邊重合,而角的另一邊落在另一個角的內部,那末這兩個角就不相等。



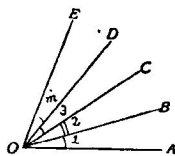
〔角的加減〕 把兩個角 $\angle AOB, \angle BOC$ 的頂點重合,有一邊 OB 也重合,並且使這兩個角的內部分別在公共邊 OB 的兩旁,那末兩個不公共的邊所組成的角就是原來兩角的和。以記號 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ 或 $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$ 表示之。相反的, $\angle BOC$ 便是 $\angle AOC, \angle AOB$ 的差, $\angle AOB$ 是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 的差。

〔角的平分線〕 如果我們把相等的兩個角相加(如圖),它們的公共邊就把所得的角分成相等的兩個角,我們說這公共邊平分所得的角。平分一個角的射線叫做這個角的平分線,我們假使在紙上隨便畫一個角,把紙摺疊起來,使得角的兩邊重合,那末紙上的摺痕便是那個角的平分線。



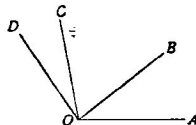
問 題

- (1) 把圖中用數字和小寫字母表示的角各用三個大寫字母來表示。



(第一題)

- (2) 在圖中哪兩個角的和等於 $\angle AOC$? 哪三個角的和等於 $\angle AOD$? $\angle AOC$ 與 $\angle AOB$ 的差是哪一個角?



(第二題)

- (3) 如果 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE$, 那末哪一個角等於 $\angle AOB$ 的 4 倍? 哪些角等於 $\angle BOC$ 的 3 倍? 哪些角等於 $\angle AOE$ 的二分之一? 哪一條射線是 $\angle BOD$ 的平分線?
- (4) 假使 OA, OB, OC 是從同一點引出的三條射線,而 OB 在 OA, OC 之間, OD, OE 分別是 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 的平分線,那末 $\angle DOE$ 便是 $\angle AOC$ 的一半,為什麼?

- (5) 在前題中證明

$$\angle DOE = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC).$$

解

答

- (1) $\angle 1$ 可以寫做 $\angle AOB$, $\angle 2$ 可以寫做 $\angle BOC$,
 $\angle 3$ 可以寫做 $\angle COD$, $\angle m$ 可以寫做 $\angle DOE$.

- (2) $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 兩個角的和,等於 $\angle AOC$.

因此 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

$\angle AOD$ 是三個角 $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COD$ 的和.

因此 $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$.

又 $\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC$,

則 $\angle BOC$ 是 $\angle AOC$ 、 $\angle AOB$ 兩個角的差.

- (3) 因為 $\angle AOB = \angle BOC$
 $= \angle COD = \angle DOE$,

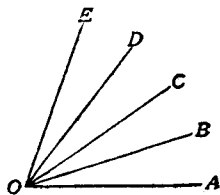
所以 $\angle AOE = \angle AOB$
 $+ \angle BOC + \angle COD$
 $+ \angle DOE = \angle AOB$
 $+ \angle AOB + \angle AOB$
 $+ \angle AOB = 4\angle AOB$.

則 $\angle AOE$ 是 $\angle AOB$ 的四倍.

同理 $\angle BOE$ 是 $\angle BOC$ 的三倍,

$\angle AOD$ 也是 $\angle BOC$ 的三倍.

因為 $\angle AOC$ 和 $\angle COE$ 都是 $\angle AOB$ 的二倍,所以都是



$\angle AOE$ 的二分之一. 因此射線 OC 是 $\angle AOE$ 的分角線.
 同樣射線 OC 也是 $\angle BOD$ 的平分線.

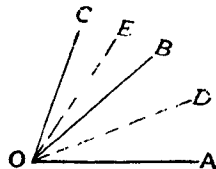
- (4) 因為 OD 是 $\angle AOB$ 的平分線, 所以

$$\angle DOB = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

又因為 OE 是 $\angle BOC$ 的分角線, 所以

$$\angle BOE = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

所以 $\angle DOE = \angle DOB + \angle BOE$
 $= \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC)$
 $= \frac{1}{2} \angle AOC$.



- (5) 因為 $\angle DOC = \angle AOC - \angle AOD$ (1)

及 $\angle DOC = \angle BOC + \angle BOD$ (2)

但是 $\angle AOD = \angle BOD$ (因為 OD 是 $\angle AOB$ 的平分線)

所以 (1)(2) 兩式相加得

$$2\angle DOC = \angle AOC + \angle BOC,$$

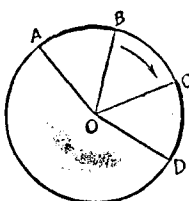
所以 $\angle DOC = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOC)$.

定 義 和 法 則

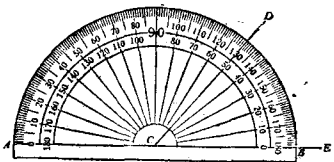
〔圓心角〕同一個圓的兩個半徑組成的角(例如 $\angle AOB$)叫做圓心角,夾在圓心角內部的弧和圓心角互相對應。

假使 $\angle AOB = \angle COD$,那末當我們把扇形 AOB 順着時針的方向轉動使半徑 OA 和 OC 重合,那末 OB 和 OD 也重合。這時弧 AB 和弧 CD 也重合,因此我們得到下面的性質:

在同圓(或等圓)上,(1)如果圓心角相等,那末它們的對應弧也相等。(2)如果弧相等,那末它們對應的圓心角也相等。



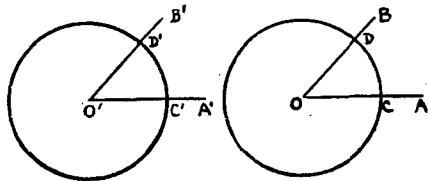
〔角的量法〕把一個圓分成360個小弧,每一個小弧叫做1度的小弧,它所對應的圓心角是1度的角。把一度的弧或角分成60等分,每一等分叫做一分,把一分再分成60等分,每一等分叫做一秒,假如一個角 $\angle AOB$ 有20度10分15秒,那末我們可以寫成 $\angle AOB = 20^\circ 10' 15''$,其中符號 $(^\circ)$ $(')$ $('')$ 分別表示度、分、秒。



要量一個角的近似值,我們使用一種儀器叫量角器。這個儀器是半圓形的,這個半圓被分成180等分,每一等分就是一度的弧。我們把圓心和角的頂點重合,把角的一邊和半圓的直徑重合,那末利用這個角的另一邊便可在量角器上讀出度數。

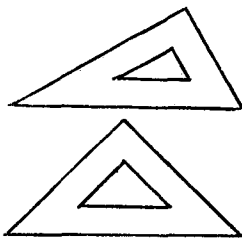
〔作一角和已知角相等〕

假定 $\angle A'O'B'$ 為已知角,用 O 做圓心,任意半徑畫圓或弧得交點 C' 、 D' ,用同一半徑以 O 做圓心畫一等圓,然後在這個圓上作 $\widehat{CD} = \widehat{C'D'}$,這樣一來它們所對應的圓心角便相等了,因此 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ 。



問 題

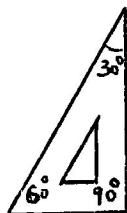
- (1) 利用量角器來量一量這兩塊三角板內,每個角的度數。
- (2) 利用量角器作出等於 30° 和 40° 的兩個角,求它們的和,并用量角器來驗證所得的結果。
- (3) 已知兩個角 $\angle 1$ 及 $\angle 2$,利用兩腳規求出它們的和。
- (4) 兩個角的比是7:3,它們的差是 72° ,求這兩個角的和。
- (5) 在 O 圖中已知 B 點在 $\widehat{AC}$ 上,如果 $\widehat{AB}$ 含有 44° , $\widehat{BC}$ 含有 16° ,求 $\angle AOC$ 的大小。
- (6) 假定一個國家的基本建設投資分配比例為:工業部門佔58.2%,農業、水利林業部門佔7.6%,運輸、郵電部門佔19.2%,貿易、銀行和物資儲備部門佔3%,文化教育和衛生部門佔7.2%,地方公用事業建設佔3.1%,其他1.1%,試依扇形之大小作一比例分配圖。



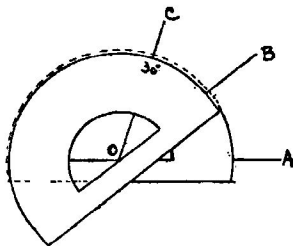
解

答

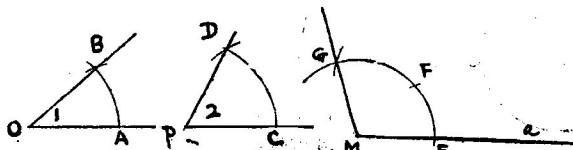
- (1) 有一塊三角板的三個角分別是 90° 、 60° 及 30° ，另一塊三角板的三個角分別是 90° 、 45° 及 45° 。



- (2) 先作射線 OA ，然後用量角器，在上面使量角器的圓心與 O 重合，它的直徑和 OA 重合，這樣便可作出 OB 使 $\angle AOB = 40^\circ$ 。其次轉動量角器使它的圓心仍與 O 點重合，它的直徑和 OB 重合，這樣便可作出 OC ，使 $\angle BOC = 30^\circ$ ，那末 $\angle AOC = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$ 。



- (3) 先畫一條直線 a ，在它



上面任取一點 M ，分別用 O 、 P 、 M 做圓心，任意半徑畫三個弧，分別交 $\angle O$ 的兩邊於 A 、 B ；交 $\angle P$ 的兩邊於 C 、 D ；又交直線 a 於 E 。在 M 圖上作弧， EF 等於弧 AB ，又作 FG 等於弧 CD ，那末 $\angle EMG = \angle EMF + \angle FMG = \angle 1 + \angle 2$ 。

- (4) 假定這兩角分別是 $(7x)^\circ$ 和 $(3x)^\circ$ ，那末依照題意得：

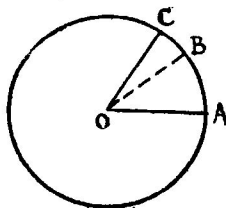
$$7x - 3x = 72^\circ$$

$$4x = 72^\circ$$

$$x = 18^\circ$$

因此它們的和是 $7x + 3x = 10x = 180^\circ$ 。

- (5) 因為 $\widehat{AB}$ 含有 44° ， $\widehat{BC}$ 含有 16° ，因此 $\widehat{AC}$ 含有 $44^\circ + 16^\circ = 60^\circ$ ，故 $\angle AOC = 60^\circ$ 。



- (6) 如把投資總額用圓的面積來表示，那麼各項投資可用扇形來表示，而扇形的大小，可依其弧之大小來分配，故 $\frac{360^\circ}{100} = 3.6^\circ$ 。

即以 3.6° 之弧來代表 1%

$$\text{故 } 3.6^\circ \times 1.1 = 4^\circ$$

$$3.6^\circ \times 3 = 10.8^\circ$$

$$3.6^\circ \times 7.2 = 26^\circ$$

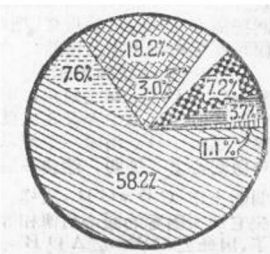
$$3.6^\circ \times 19.2 = 69^\circ$$

$$3.6^\circ \times 58.2 = 209.5^\circ$$

$$3.6^\circ \times 7.6 = 27.4^\circ$$

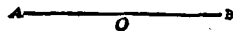
$$3.6^\circ \times 3.7 = 13.3^\circ$$

然後用量角器畫出各弧即得右圖。



定 義

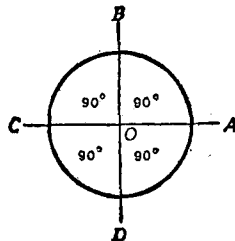
〔平角〕 若一角的兩邊，是從一點(O)引出的方向相反的兩條射線，那末這個角，叫做平角。每個平角等於 180° 。



〔直角、銳角、鈍角〕 等於 90° 的角叫直角，小於直角的角叫銳角，大於直角而小於平角的角叫鈍角，直角可以用字母 d 來表示，

凡直角都相等(因它們都等於 90°)。

如果兩直線相交，它所成的四個角中，有一個是直角，那末其他三個角也都是直角。這樣的兩條直線叫互相垂直，像圖中，AC 垂直於 BD，相反地，BD 也垂直於 AC，交點 O 叫做垂足。

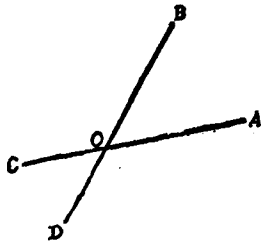


如果它們不互相垂直，那末任何一條是另一條的斜線，那時交點叫做斜線的足。

〔餘角〕 兩個角的和等於一直角就是等於 90° 的時候，這兩個角叫做互為餘角。

〔補角〕 兩個角的和等於一平角就是等於 180° 的時候，這兩個角叫做互為補角。

〔對頂角〕 如果一個角的兩邊分別是另一個角的兩邊的反向延長線，那末這兩個角就叫做對頂角。例如圖中的 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ ， $\angle BOC$ 和 $\angle AOD$ 都是對頂角。



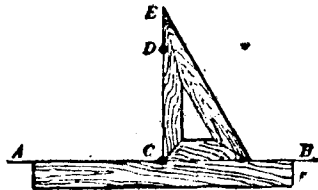
兩直線相交，所成一雙對頂角相等。例如 $\angle AOB = \angle COD$ (因為它們都是 $\angle BOC$ 的補角，因而都等於 $180^\circ - \angle BOC$)。

同理可知 $\angle BOC = \angle AOD$ 。

〔鄰角〕 如果兩個角有公共頂點和一條公共邊，並且它們的另一邊在公共邊兩旁，這兩個角叫做鄰角。

問 題

- (1) 30° 的餘角是多少？ 120° 的補角又是多少？
- (2) $\frac{3}{4}d$ 的餘角及補角各為若干？
- (3) 某角是它補角的三分之一，問這個角有多少度？
- (4) 某角的補角是它的餘角的四倍，求這個角。
- (5) 2 時 25 分的時候，鐘面上的長針和短針，夾成多少度的角？
- (6) 試根據下圖，說出從一點向另一直線作垂直線的方法。



解

答

(1) 兩角的和是 90° ，那末這兩個角叫做互為餘角。

因此 30° 的餘角應當是： $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 。

又兩角的和是 180° ，那末這兩個角叫做互為補角。

所以 120° 的補角是： $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 。

(2) 因 $\frac{3}{4}d = \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67.5^\circ$

所以這個角的餘角是 $90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$ 。

而這個角的補角是 $180^\circ - 67.5^\circ = 112^\circ 30'$ 。

(3) 假定所求角是 x° ，那末這個角的補角應當是 $(180 - x)^\circ$ 。

依照題意，得方程：

$$x = \frac{1}{3}(180^\circ - x)$$

$$\therefore 3x = 180^\circ - x \quad 4x = 180^\circ$$

$$\therefore x = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ \quad \text{答所求角是 } 45^\circ.$$

(4) 假定某角是 x° ，那末它的餘角應當是 $(90 - x)^\circ$ ，它的補角應當是 $(180 - x)^\circ$ ，依照題意 $(180 - x)^\circ$ 應當是 $(90 - x)^\circ$ 的四倍，就是說

$$180 - x = 4(90 - x)$$

$$\therefore 180 - x = 360 - 4x \quad \text{即 } 3x = 180$$

故得 $x = 60^\circ$ 。即某角為 60° 的角。

(5) 因長針旋轉一周，短針就旋轉 $\frac{1}{12}$ 周，

就是說長針轉過 360° ，那末短針轉 30° ，因 2 時 25 分是長針從錶面上記作(12)的位置轉到記作(5)的位置，因

$$\text{此長針轉過 } 5 \times \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ,$$

$$\text{短針就從(2)的位置轉過 } 150^\circ \times \frac{1}{12} = 12.5^\circ,$$

所以短針的位置離開記作(12)的位置是

$$60^\circ + 12.5^\circ = 72.5^\circ.$$

這個時候，兩針所成角度是

$$150^\circ - 72.5^\circ = 77.5^\circ.$$

(6) 我們先把直尺靠在直線 AB 上，再把三角板的直角的一條邊靠到直尺上，用手按住直尺使它固定，然後沿着直尺移動三角板，到三角板的直角的另一邊和 D 點接觸的時候，沿着這條邊引直線 DC，就得到 AB 的垂直線 DC。

注意這個方法不論 D 是否在 AB 上都可以適用，而且也可以用一副三角板的另一塊三角板來代替直尺。



基 本 概 念

〔命題〕 數學上的判斷叫做數學命題，或者就叫做命題。

〔定義〕 說明一個名稱或術語的意義的命題，叫做定義。例如圓心角、弧和直角的定義等等。

〔公理〕 不加證明而採用的真理叫做公理，例如

- (1) 過任意兩點可以作一直線，並且只能引一條直線。
- (2) 幾何圖形可以移動它的位置而不變其形狀、大小。
- (3) 線段可以向任一方向無限延長。
- (4) 以任一點做圓心，任意線段做半徑，可作一圓。

其他還有關於數量的公理，例如

- (5) 與等量相等的量必相等。
- (6) 全量等於它各部分之和，因而全量大於它的任一部分。
- (7) 等量各加以等量，或各減去等量，所得結果仍等。
- (8) 不等量各加以等量或各減去等量，其不等的方向不變，原大者仍大，原小者仍小。

〔定理〕 命題的真實性要經過若干推理(即加以證明)之後，能得到具有正確性的命題，叫做定理。它分爲“已知”和“求證”兩部分。“已知”也叫“假設”，“求證”也叫“終決”例如“如果設一數可以2和3除盡，則結果以6除盡”便是：其中“如果一數可以2和3除盡”是假設，“則結果以6除盡”是終決。

〔推論〕 從公理或定理直接推出來的命題，叫這個公理或定理的推論。

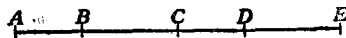
問 題

- (1) 在圖中，如果 $AB=CD$ ， $BC=CD$ ，那末 $AB=BC$ ，爲什麼？



(第1題)

- (2) 在圖中，如果 A、B、C、D、E 五點在同一直線上，並且 $AB=CD$ ， $BC=DE$ 。

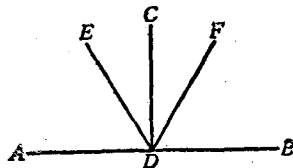


(第2題)

爲什麼 $AC=CE$ ？

又爲什麼 $AE=AB+BC+CD+DE$ ？

- (3) 如圖，已知 $CD \perp AB$ ， $\angle ADE = \angle BDF$ ，求證 $\angle EDC = \angle CDF$



- (4) 等角(或同角)的餘角相等，爲什麼？
- (5) 等角(或同角)的補角相等，爲什麼？
- (6) 兩個鄰角之和等於 180° ，則其不公共邊互爲反向延長線。