大學叢書

拓撲學

上册

沙愛福
施雷發 著
江澤涵 譯

商務印書館發行

大學叢書

拓撲學

上冊

沙愛福
施雷發 著

江澤涵 譯

商務印書館發行

譯者序

盧溝橋事變後一個多月，1937年8月中，譯者離開北京大學，行裝中只能帶了兩本書。其中的一本就是本書的原書。那時候以為必須在皖南旌德鄉下住一個相當長久的時期，就有在鄉下翻譯一本拓樸學的志願。那年年底譯者到了長沙的臨時大學，這本書的翻譯纔眞正開始了。1938年初，譯者到了昆明的西南聯合大學，去年又回到北京大學；從翻譯開始到完成，經過了差不多整整的十年。這十年中時譯時停，或譯或教，經過了很多次的修改與抄寫，纔能付印。

原書在1934年出版時，即被公認為拓樸學入門的一本空前的[illegible]書。在這麼短的篇幅中，包括組合的拓樸學這麼多的材料；而且敍述清楚嚴密，便於初學。這確是本書的特色。現在雖然已有了數種拓樸學新書，各有其優點，而本書仍未喪失他的地位。因其如此，本書譯本出版，或仍能適合國內的需要。

本書中數學名詞的譯名，多半遵照中國科學社的科學名詞審查會1938年編印的算學名詞彙編。譯者力求意譯，希望譯文一方面不失原意，一方面也近於通用的語句。改正原書不妥之處與譯者增補的字句，在譯文中都用彎括弧表明。但翻譯算學書，譯者很少經驗，在算學與文字兩方面，書中都難免有不妥之處，深望讀者發現時指正。

這十年中翻譯此書，得着許多位同事與學生的幫助，譯者極爲感謝。特別要致謝的，是開始時王湘浩先生的幫助，與完成時冷生明先生的幫助。校對時，韓春霖，趙中立與李經熙三先生幫忙很多。德中索引的翻譯與中德索引的編排，是魏執權先生幫忙作的。最後，譯者十分愉快的申明一點：商務印書館完全站在提倡學術的立場，不計營業的得失，願意出版這本書；而且在排印時不憚煩的改善，每頁自三次至七次之多。譯者衷心感謝他們。

江澤涵 北大數學系，1947年7月。

著者序

因爲著者之一 (*Threlfall*) 在 *Dresden* 專科學校講授拓撲學的機會，著者兩人纔着手編著本書。但授課的講義，本書中只採用了一部分。本書的主要內容，還是後來著者兩人勤愼研討的結果。

拓撲學正在發揚光大的時期。本書編著的目的，是想供給讀者這門算學的一個門徑與一個綱要。因此我們並不想把最廣的定理，儘可能完備的搜集起來，然後證明。我們注意的是有用途的概念，與有效果而且有前途的方法；我們要詳細的界說這種概念，系統的詮釋這種方法，並且藉詳解實例來說明這些概念與方法。

本書並不假設讀者有特別的預備智識。只有少數通用的定理，本書沒有證明就引用了。但讀者從脚註中所援引的文獻不難查出所需要的恰當證明。——本書限于組合的或代數的拓撲學，但是在儘可能的避免點集論的困難的情形下，也同時利用綿續概念。所以 *L. E. J. Brouwer* 所創始的單純複合形與流形的概念，在本書的討論中佔着中心的地位。——爲了不熟悉羣論及其中現時通用的術語的讀者的方便起見，我們在最後一章中彙集了本書所需用的羣論中的定理。這一章有必要時可在第二章以後，第三章以前閱讀。我們儘可能的使各章獨立。我們還很致力于編排書尾詳細的，依字母次序排列的索引。書中

的附錄，指出更多的參考文獻；希望對于書中未詳論的理論，使讀者能藉此作更進一步的研究。由于篇幅的限制，有若干理論，書中根本未能提起。我們特別引為缺陷的，是 *Alexander* 的對偶定理，*Alexandroff* 的閉點集理論與投影光譜（*Projektionsspektrum*）理論，都不能不割愛了。若一時尚無別的拓樸學教科書出版，講到這些理論，我們希望能繼續寫一本來彌補這缺陷。

我們能完成本書，最感激 *E. Trefftz* 教授。他不但犧牲他自己的時間，使我們能够有編著本書所需要的閒暇；而且他充分瞭解我們的困難，切實加以指示，更給我們不少的鼓勵。同樣的，我們感謝 *Dresden* 的算學家的討論會，特別是 *C. Weber* 教授的幫助。我們也感謝別處的算學家，*L. Bieberbach*, *K. Reidemeister*, *F. Hausdorff*, *H. Kneser*（特別參看 §58），*B. L. van der Waerden* 諸位教授的幫助。前兩位讀過校稿，後一位在 *Prage* 的講演 [1] 與啟發我們的談話，影響了本書的格局。我們還感謝 *Dresden* 的博士候選人 *W. Hantzsche* 與 *H. Wendt*；校對時，他們有許多的改善。最後我們要致謝出版者，他們擅長的技術，使校對簡易，而且印製完善。

Dresden, 1934 年 1 月。

H. Seifert.　　*W. Threlfall.*

書尾有附註與文獻索引。文獻按照著者姓名的字母次序排列。方括弧中的數字指文獻索引，右肩的小號的數字指附註。

目錄

第一章 直覺的討論

第二章 單純的複合形

第三章 同調羣

第四章 單純的逼近

第五章 在一點處的性質

第六章 曲面的拓撲學

第七章 基本羣

第一章 直覺的討論

§1 拓撲學的主要問題

拓撲學 (*Topologie*) 所討論的對象,是幾何圖形的,經過拓撲變換 (*topologische Abbildung*)——正逆兩方面都單値(*eindeutig*) 而又都綿續的變換——而不改變的性質。我們暫時先把幾何圖形就當作是三維空間 (或更高維的空間) 中的點集。在空間的一笛卡兒坐標系中,綿續函數所表出的變換叫做綿續變換。這些變換函數——表出變換的函數——只要在這圖形的點集上有定義(不必在全個的空間中都有定義)。圖形的性質,經過拓撲變換而不改變的,叫做拓撲性質。兩個圖形間若是有拓撲對應,那就是說,若有一拓撲變換存在,把兩個圖形中的一個換成另一個,這兩個圖形就叫做同胚的 (*homöomorph*) 圖形。

例如半個球面與圓域 (*Kreisscheibe*) 同胚,因爲直角投影 (*Orthogonalprojektion*) 就是把半個球面換成 (圖 1 中用斜綫表示的) 圓域的一個拓撲變換。 更普遍的說,若是一曲面能彎扭成另一曲面,他們就同胚。例如球面,立方形,與橢圓面同胚;平環 (*Kreisring*) 與有限高的圓柱面也同胚。

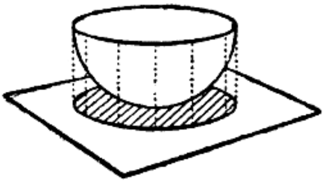

圖 1

同胚圖形的例子多而易見。但是也有圖形，例如歐幾里得平面與刺破了一個點的球面（減去了一個點的球面），不是一見就可以斷定他們同胚的。這兩個圖形間的晝形投影（*stereographische Projektion*）就是一個拓撲變換；而且他們也與圓域的內域同胚（§6，例2與3）。

要證明兩個點集不同胚，通常比較困難多了。點與線段顯然不同胚，因爲這兩個點集不能成一一對應。我們也容易看出線段與圓域不同胚。設 A, B, C 是圓域中的任意三點。從 A 點出發，能綿續的在圓域中走到 B 點，而不通過 C 點。圓域的這個性質是拓撲性質。線段却沒有這個性質：若要從線段的一端綿續的走到另一端，就必須通過線段的中點。若更進一步比較圓域與球體，我們就不能如此簡單的得着結論。圓域中有分開圓域的閉曲線；若是我們要想利用圓域的這個特徵，我們就必須證明一條閉曲線不能分開球體。但是爲什麼一條閉曲線不能裝滿一個分開球體的曲面呢？我們要證明圓域，球體，與更高維的相當的圖形不同胚（證明見§33），已經與證明線段與圓域不同胚的情形不同，不能有那麼簡易的方法了。

同胚的概念在拓撲學中的地位，與全合的概念（*Kongruenzbegriff*）在初等幾何學中的地位一樣。在初等幾何學中，兩個全合的圖形本質上無區別；同樣的，在拓撲學中，兩個同胚的或拓撲對應的圖形本質上也無區別。但是我們應當注意下述不同之處：兩個圖形若是全合，全個的空間就有一個剛體運動，使其中的一個圖形移到另一個；兩個圖形若是同胚，全個的空間却不必有一個拓撲變換，使其中的一個圖形換成另

一個。

例如全個的空間的任一拓撲變換都不能（任一變狀 (*Deformation*) 當然更不能）把圓週 (*Kreislinie*) 換成一個扭成結的 (*verknotet*) 曲線 (§52 末句)，如同三叉扭結 (*Kleeblattschlinge*)（圖 2）。但是圓週與扭結 (*Knoten*) 同胚，因爲他們的點間有一個正逆兩方面都單值而又都綿續的變換；而且同胚這種關係只依賴于這兩個點集，與那包含他們的空間無干。

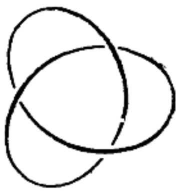

圖 2

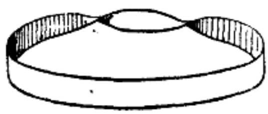

圖 3

同樣的，全個的空間沒有一個拓撲的自身變換 (*Selbstabbildung*)，把一個扭轉了 2π 的倍數的弧度的環帶 (*geschlossenes Band*)（圖 3）換成一個未扭轉的環帶。但是把這兩個環帶割開成兩個全合的長方條，使條上相當的點成對應，就可知這兩個環帶同胚。

在拓撲學中，扭結與圓週，或如此扭轉了的環帶與未扭轉的環帶，都是相同的圖形。只有把他安置在三維空間中的時候，他們才有區別。而且若是把那包含他的三維空間又當作是四維空間的子空間，因而可以引用四維空間的變狀，這種區別可又消失了。這是因爲經過四維空間的一個變狀，圓週可以換成扭結，而且在變狀的歷程中曲線還不自相穿劇 (*Selbstdurchdringung*)；就如同經過三維空間的一個變狀，圓週可換成橢圓。[1]

由此看來，此後我們要把一個圖形的拓撲性質分成兩種：一種是

“內在的”(*inner*)，是經過這個圖形的所有的拓撲變換都不改變的性質；另一種是依賴于包含這圖形的空間的，是經過這全個空間的所有的拓撲變換都不改變的性質。

我們再舉一例來說明這種區別。設空間中有一圓週與一直線，同在一平面上，但無共點。圓週繞直線旋轉，產生一個**環面** (*Ringfläche* 或 *Torus*)。通過環面的任一點 O 有一母圓 a；我們把他叫做環面的經圓 (*Meridiankreis*)。 在旋轉時，O 點也產生一圓 b；我們把他叫做緯圓 (*Breitenkreis*)(圖 4)。我們能不用空間的拓撲的自身變換，表出經緯圓的區別如下：經圓能在環體(*Vollring*，環面所包的立體) 中縮成 (*zusammenziehen*)一點，而緯圓不能，所以全個的空間的任一拓撲的自身變換，都不能把由環面與一個經圓所構成的圖形，換成由環面與一個緯圓所構成的圖形。但是經緯圓間的這區別並非環面的內在性質。空間雖然沒有一個變狀，把環面換成他自己，使經緯圓的地位交換；環面却有如此的一個拓撲變換。要想求得如此的一個拓撲變換，我們設想這環面是用有彈性的薄膜做成的。把他沿着 a 與 b 割開，彎扭成一個正方形 (圖 5)；再把這正方形沿着對角線摺疊起來，使正方形上原來的兩點，摺疊成一點

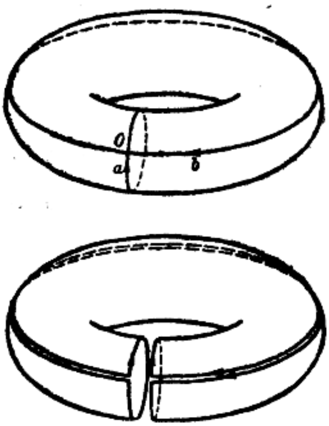

圖 4

的，成對應。這對應就是正方形的一個拓撲的自身變換，使 a 與 b 交換，而且相當於環面的一個同樣的自身變換。——將來在下節中，我們要提出曲面的能定向性 (*Orientierbarkeit*) 與雙側性 (*Zweiseitigkeit*)。這個性質供給我們另一個特徵，表明內在的拓撲性質與浸沒的拓撲性質 (*Einbettungseigenschaft*) 的區別。

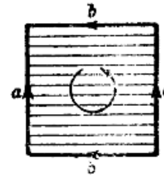

圖 5

拓撲性質間的這種區別，與微分幾何學中的度量 (*metrisch*) 性質間的區別相同。微分幾何學中的度量性質的一種是內在的，不依賴于曲面在空間中的位置，由第一個度量的基本式 (*Grundform*) 斷定；另一種是由曲面與空間所組成的圖形的度量性質，由第二個基本式斷定。

拓撲學的主要問題，就是要判斷給定的兩個圖形是否同胚，而且在可能的時候，列舉所有不同胚的圖形。我們起始時就把圖形看作是歐幾里得空間中的點集。雖然關于歐幾里得空間中的任意子集已經有很深博的理論*)，爲避免引起不願意引起的集合論中的困難起見，我們將不再採用如此廣義的圖形概念了。我們將要採用的，只是 *L. E. J. Brouwer* 所創始的複合形 (*Komplex*) 的概念。複合形在本書討論的歷程中再加以限制，使成爲流形 (*Mannigfaltigkeit*)。這種概念不過于寬泛，因而可以避免所不願引起的集合論中的困難；也不過于狹窄，因而可以包含差不多所有的有趣的圖形。所以我們現在要研究的拓撲學，不是集合論的，只是複合形與流形的拓撲學。

*) *Tietze-Vietoris* [8] 之 *I* 中的文獻。

複合形的特徵,使他有别于任意點集的,是他的能剖分爲三邊形的性質 (*Triangulierbarkeit*): 複合形是由有限個或可數的無窮多的,不必平直的 (*geradlinig*), 線段,三邊形,四面體與高維的相當的圖形連接而成的。這種三邊形等的連接,並不限于在同一空間中,而且有時候還不要包含他們的空間。因爲這特徵,大部分所謂病態的點集都被擯在我們討論的範圍之外,而且我們的討論纔與幾何的直覺更爲接近。因此也有人把複合形的拓撲學叫做彈性橡皮的拓撲學。複合形的例子: 所有的 *Riemann* 曲面,任何維的歐幾里得空間,投影平面與空間,所有的歐幾里得與非歐幾里得的空間型 (*Raumform*), 度量的運動羣的間斷域 (*Diskontinuitätsbereiche*),與力學系統(*mechanischer System*-的位置空間 (*Lagenraum*) 與相空間 (*Phasenraum*)。

我們要想向着我們的目的—— 主要的問題的解決 ——進展,我們必須探求複合形的拓撲不變的,能計算的,而且能作爲分類的標誌的性質。複合形的同調羣 (*Homologiegruppe*) 與基本羣 (*Fundamental*) *gruppe*) 是這種性質中最重要的,而且在我們討論中佔中心地位。

同時我們要看看,不用這些不變性的幫助,我們能進展到如何程度。所以我們不再從事預備,立即直覺的討論主要問題的一部分,看看有些什麼不同胚的閉曲面。

§2 閉曲面

在前一節中,我們已經說過,環面沿着經緯圍切開之後,變成一個

正方形。反之,若是疊合一個正方形的每兩條相對的邊,我們又重得着環面。 所以一個正方形的每兩條相對的邊當作是同一條線段的時候,這正方形就叫着環面的 *Poincare* **基本多邊形**。至少對於內在的拓撲性質說,這基本多邊形就可以完全代表環面。至于環面的面積,空間中的位置等特別的度量性質與浸沒性質,基本多邊形却不能表出;不過這些性質與曲面拓撲學是毫無關係的。所以從曲面的拓撲學的立場說,所有的環面,由疊合基本多邊形的對應邊而得着的,都等價 (*gleichwertig*),例如旋轉環面與扭成結的皮管子的表面就沒有區別。其實任一曲面都能够切開成一個或數個多邊形。 我們要直接利用這事實,來下閉曲面的定義: 一個閉曲面是由一對一對的連接有限個多邊形的邊而成的。 這定義纔使閉曲面的圖形脫離了那包含他的空間,纔使他成爲不依賴于那包含他的空間而存在的二維流形 —— 二維流形的概念,將來有正確的定義。

根據環面切開成正方形的方法,我們能用若干個多邊形,設想他們的邊成對的對應,表出一個閉曲面,因而得着一組無限多個閉曲面。爲達到這目的起見,我們先在環面上穿一個

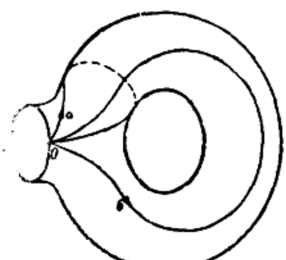

圖 6

圖 7

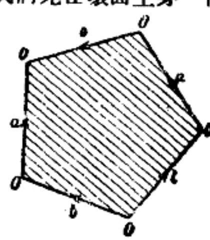

圖 8

大致是圓形的洞 (*Loch*)。假使洞邊緣 (*Lochrand*) l 通過 O 這個點。經過變狀之後,我們得着一個環柄 (*Henkel*) (圖 6)。我們也能先在環面切開成的正方形中表出這個圓洞 (圖 7),然後把洞邊緣 l 在 O 點處切斷。這就等於把環柄沿着曲線 a 與 b 切開成五邊形 (圖 8)。這五邊形的 l 這邊不與別個邊成對應,其餘的都間隔的,成對的對應。

若是取兩個切開成五邊形的環柄,連接他們的洞邊緣 (圖 9),然後消去公共洞邊緣 l,結果是一個八邊形,他的邊成對的對應 (圖 10)。叠合對應邊,

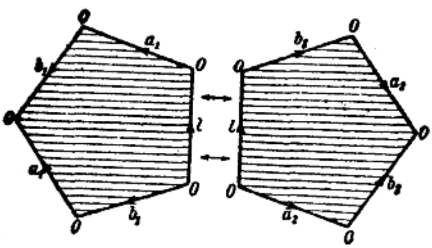

圖 9

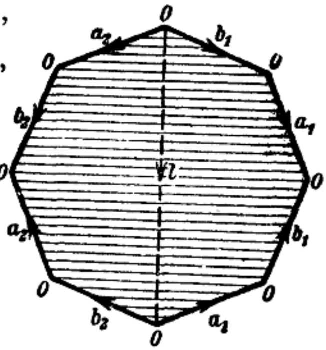

圖 10

因而叠合八個頂點成一點,這八邊形就包成一個雙環面 (*Doppelringfläche*)。[2] 與從前討論環面時一樣,我們要在圖中表出成對的邊的對應關係:每對對應邊我們用同一個字母表示;而且用箭頭附在邊上,表明在叠合對應邊時,箭頭指着的方向應該符合。我們只要任意的選定多邊形的邊緣的一個方向,然後按照每一邊上的箭頭是否指着這個方向,規定這邊附帶一個指數 $+1$ ($+1$ 這指數常省去) 或 -1。邊的對應關係,以及這閉曲面,都能用一個式子表出。例如一個雙環面,若用圖 10

中所表出的邊的對應關係,而且選定那八邊形的邊緣的一個適當方向,他就可以寫成下式:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$

再在雙環面上穿一個圓洞,使洞邊緣通過點 O,沿着這個洞邊緣,還可以連接上另一個環柄。消去洞邊緣之後,我們得着一個十二邊形。如同雙環面可以變狀(變狀不毀壞拓撲性質)成一個安裝上了兩個環柄的球面,這十二邊形包成一個安裝上了三個環柄的球面。我們能如是得着的曲面,是能切開成 $4h$ 邊形的,安裝上了 h 個環柄的球面。因為能任意變狀,這曲面也可以說是安裝上了 $h-1$ 個環柄的環面。下式

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \qquad (h)$$

確定他的基本多邊形 —— $4h$ 邊形 ——的邊的對應關係。若是沿着多邊形的一條對角線 l 把 $a_i\, b_i\, a_i^{-1}\, b_i^{-1}$ 四條邊切下,我們就得着一個環柄切開成的五邊形。所以每一段 $a_i\, b_i\, a_i^{-1}\, b_i^{-1}$ 相當于一個環柄。

球面也有一個確定的基本多邊形;沿着球面上連接 O 與 P 兩點的弧 a 把球面割開。結果是一個二邊形,他的邊緣圓 (*Randkreis*) 是

$$a a^{-1}. \qquad (0)$$

這基本多邊形上有兩個不相同的,即不相叠合的頂點 O 與 P (圖11),別個基本多邊形都不如此。叠合這二邊形的兩邊,使圓域再變成球面,就如同把張開的錢包在 O 與 P 兩個鉸鏈間的口子合攏起來,使他變成球形袋。

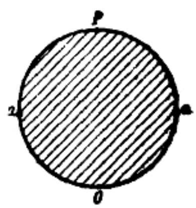

圖 11