—内 部 資 料—

电路理论译丛

(一)

五系編譯

1. 梅林-与汉克尔变换对带有时变参量的网路的应用

……………………………………F.R. 娄拉尔迪

2. 获得交流自动調节系統的傳輸函数的方法

……………………………………H.A. 富拉索夫

3. 在数学回路設計中布氏矩陣方程

……………………………………罗伯脫 S. 里特莱

事電信工程學院

1960

电路理論譯叢

*

軍事电信工程學院五系編譯

軍事电信工程學院印刷厂印刷

*

开本850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 2 $\frac{5}{16}$ 插頁 2

印刷字数57000 印数1—850

1960年11月印刷

序号 技6046

梅林与漢克爾变换对帶有时变参量的网絡的应用 *

F. R. 裘拉尔迪

导　言

正如拉普拉斯变換解綫性常系数系統一样，可以发展一种变換方法，它將能解有关时变綫性系統的間題。本文以相似于把拉普拉斯变換用于非时变系統的方法，略述对欧拉——歌希系統与貝塞尔系統的一种变換方法。拉普拉斯、梅林与汉克尔这三种变換均可由福里哀变換导出。本文將介紹这兩种变換，对每个变換作出变換表，并指出这些方法与解某些网絡間題中的应用。这些应用将闡明分析、仪表和綜合的問題。

梅　林　变　換

某些类型的綫性系統引出了欧拉——歌希微分方程式[19]，[5]，[12]，[13]。对这类方程应用梅林变換将产生代数方程。梅林变換表将帮助人們按相似于用拉普拉斯变換理論的方法去求解。梅林变換的定义是：

$$F(S)=\int_0^\infty f(t)t^{s-1}\,dt=M[f(t)] \tag{1}$$

* 本文譯自 IRE Transactions on eircuit Theory, volumec T-6 June, 1959, Number2。譯者：謝志良。

而其反积分是：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{C+i\infty} F(S)t^{-S}dS=M^{-1}[F(S)] \quad (2)$$

其中

S 是梅林变換的复变数，

M 表示梅林变換，

M^{-1} 表示梅林反变換，

t 是时間。

函数的导数的梅林变換关系并不象相当的拉普拉斯变換关系这样簡单。例如

$$\int_0^\infty \frac{d^n f(t)}{dt^n}t^{s-1}dt=\left[\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}t^{(s-1)}\right]_0^\infty$$

$$-(S-1)\int_0^\infty \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}t^{(s-2)}dt \quad (3)$$

因此，如果我們假設 $f(t)$ 的性質使上面的方括弧消失，我們将有：

$$F^n(S)=-(S-1)F^{n-1}(S-1) \quad (4)$$

其中 $F^n(S)$ 是导数 $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ 的梅林变換，应用上述規則直至 $F^0(S)$，将有：

$$F^n(S)=(-1)^n\frac{\Gamma(S)}{\Gamma(S-n)}F(S-n) \quad (5)$$

这是用函数本身的梅林变换表示的函数 n 次导数的梅林变换。

下面表示式的梅林变换有相似的关系：

$$M\left[t^n\frac{d^n x}{dt^n}\right]=\int_0^\infty t^{(s+n-1)}\cdot\frac{d^n x}{dt^n}\cdot dt \qquad (6)$$

其中 $n=0$, 1, 2, …。用部份积分：

$$=\left[t^{(s+n-1)}\frac{d^{(n-1)}x}{dt^{(n-1)}}\right]_0^\infty-(S+n-1)\int_0^\infty t^{(s+n-2)}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}dt \qquad (7)$$

此处函数的性质仍使方括弧中的量变为0，重复这个过程将有：

$$M\left[t^n\frac{d^n x}{dt^n}\right]=(-1)^n S(S+1)(S+2)\cdots\cdots(S+n-1)X(S) \qquad (8)$$

此处 $X(S)$ 是函数 $x(t)$ 的梅林变换。

可用同样方法导出的其他简单关系式有：

$$M\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right]=(-1)^n S^n F(S) \qquad (9)$$

和

$$M\left[\left(\frac{d}{dt}t\right)^n f(t)\right]=(-1)^n (S-1)^n F(S) \qquad (10)$$

此处 $F(S)=M[f(t)]$。

梅林变换的乘法定理（或福尔香（Faltung）定理）可用对拉普拉斯变换的同样方法导出。令 $F(S)$ 和 $G(S)$ 是函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的梅林变换，则乘积 $f(t)\cdot g(t)$ 的梅林变换定义是：

$$\int_0^\infty f(t)g(t)t^{(s-1)}dt=$$

$$\int_0^{\infty} g(t)dt t^{(s-1)} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)t^{-w}dw \quad (11)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)dw \int_0^{\infty} g(t)t^{(s-w-1)}dt \quad (12)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)G(s-w)dw \quad (13)$$

按同样方法，乘积 $F(s)G(S)$ 的梅林变换是：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(S)G(S)t^{-s}dS=\int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\tau}\right)g(\tau)\frac{dt}{\tau} \quad (14)$$

应用梅林变换于欧拉——歌希微分方程

$$\sum_{n=0}^{N} A_n t^n \frac{d^n x}{dt^n}=f(t) \quad (15)$$

此处 A_n 是常数。变换上式两側，得出：

$$\sum_{n=0}^{N} M\left[A_n t^n \frac{d^n x}{dt^n}\right]=M\left[f(t)\right] \quad (16)$$

应用本文給出的梅林变换表 I 和 II：

$$\sum_{n=0}^{N} A_n(-1)^n S(S+1)(S+2)\cdots(S+n-1)X(S)=F(s) \quad (17)$$

或

$$X(s)\cdot\sum_{n=0}^{N} A_n(-1)^n S(S+1)(S+2)\cdots(S+n-1)=F(S)$$

(18)

或

$$X(S)=\frac{F(S)}{\sum_{n=0}^{N} A_n(-1)^n S(S+1)(S+2)\cdots(S+n-1)} \quad (19)$$

此式可用部份分数分解法拆成更簡单的表示式，因此梅林变換是綫性的；所以各分数的反变換之和等于和的反变換。

梅林变換对网絡的应用

分析：

已知一位置伺服馬达，其能源电压降到 0，引起放大器的功率增益和跨越随动电位器的电压降到 0，兩在均随时間成反比（見图 1）求当单位阶跃输入时輸出位置对时間的函数。

已知，$e_{\text{輸入}}=\mu(t-1)$

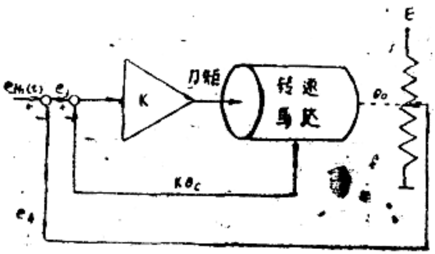

图 1

故 $$E_{輸入}(S) = -\frac{1}{S}$$

$$e_4 = \theta_0 E$$

$$e_3 = e_{輸入} - e_4$$

$$T = J\ddot{\theta}_0$$

$$T = K(e_3 - k\dot{\theta}_0)$$

$$T = J\ddot{\theta}_0 = \frac{k_0}{t}\left[e_{輸入} - \frac{\theta_0 E_0}{t} - k\dot{\theta}_0\right]$$

$$J\ddot{\theta}_0 t^2 + kK_0\dot{\theta}_0 t + K_0E_0\theta_0 = K_0 t e_{輸入}(t)$$

进行变换（此处：$\dot{\theta}(o) = \theta(o) = 0$）：

$$JS(S+1)\theta_0(S) - kK_0S\theta_0(S) + K_0E_0\theta_0(S) = K_0E_{輸入}(S+1)$$

$$[JS^2 + (J-kK_0)S + K_0E_0]\,\theta_0(S) = K_0E_{輸入}(S+1)$$

$$J = kK_0 = K_0E_0 = K_0 = 1$$

$$\theta_0(S) = \frac{E_{輸入}(S+1)}{(S^2+1)} = \frac{-1}{(S+1)(S^2+1)} =$$

$$\frac{-1}{(S^2+1)} \cdot \frac{1}{(S+1)}$$

若我們将此函数分解成兩个簡单函数的乘积，我們能用乘法定理来計算 $\theta_0(t)$，

$$M^{-1}\left[\frac{-1}{S^2+1}\right] = \sin[\ln t] \qquad (表 Ⅱ)$$

和

$$M^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)}\right] = -t \qquad (表 Ⅱ)$$

$$\therefore\ \theta_0(t)=\int_1^t \sin\ln\frac{t}{\tau}(-f)\frac{d\tau}{f}$$

$$\theta_0(t)=\frac{t}{2}+\frac{\sin}{\sqrt{2}}\left[\ \ln t+45^{\circ}\right]; \qquad t>1,$$

仪表：

用表計測出带有时变电阻电路中电流为 $i(t)=1/t+1/t^3$ 电阻为 $R=R_0/t$，求示于图 2 中网絡的輸入电压等于什么？

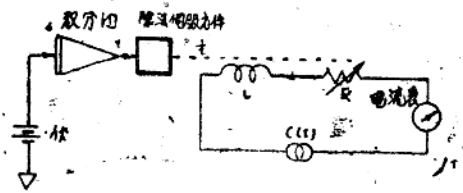

图 2

图 2 的微分方程是：

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+Rt=L\frac{di}{dt}+\frac{R_0}{t}i$$

或

$$te(t)=Lt\frac{di}{dt}+R_0 i$$

进行变换：

$$E(S)=-LSI(S)+R_0I(S)=I(S)(R_0-LS)$$

此处

$$i(o)=\frac{di(o)}{dt}=0$$

如电流表計的讀数是

$$i = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^{2}}$$

則

$$I(S) = -\frac{1}{(S-1)(S-2)} \qquad (\text{表 II})$$

$$\therefore E(S+1) = \frac{L\left(S - \frac{R_0}{L}\right)}{(S-2)(S-1)} = \frac{L\,(2-a)}{(S-2)} + \frac{L(1-a)}{3(S-1)}$$

再按表 II 对兩边进行反变換：

$$te(t) = -(2-a)Lt^{2} - \frac{(1-a)L^{2}}{L3}t^{-1}$$

或

$$e(t) = -\frac{L}{t^{2}}\left[\frac{(2-a)}{t} - \frac{(1-a)}{3}\right]$$

这是供給已知电流必須的电压。

綜合：

找出一个欧拉——歌希型的网絡，它对电压 $e(t)$ 的反应将是电荷 $q(t)$，此处

$$q(t) = -\frac{1}{\beta}t^{\alpha}\sin[\beta \ln t]$$

和 $e(t) = \delta(t-1)$，是脉冲电压，
进行变換：

$$M[q(t)] = Q(S) = \frac{1}{[(S+\alpha)^{2} + \beta^{2}]}$$

和

$$M\left[e(t)\right]=E(S)=1 \qquad \text{(兩者均从表 II)}$$

$$Z(S)=\frac{E(S)}{Q(S)}=S^2+2\alpha S+\alpha^2+\beta^2$$

或

$$Q(S)\left[S^2+2\alpha S+\alpha^2+\beta^2\right]=1$$
$$S^2Q(S)+2\alpha SQ(S)+(\alpha^2+\beta^2)Q(S)=1$$

按表 I 此方程变换为：

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 q(t)-2\alpha\left(t\frac{d}{dt}\right)q(t)+(\alpha^2+\beta^2)q(t)=\delta(t-1)$$

因为

$$M\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 q(t)\right]=S^2Q(S)$$

和

$$M\left[-\left(t\frac{d}{dt}\right)q(t)\right]=SQ(S)$$

$$\therefore\ t\frac{d\left[t\dot{q}(t)\right]}{dt}-2\alpha t\dot{q}(t)+(\alpha^2+\beta^2)q(t)=\delta(t-1)$$

这是决定网絡的微分方程。

图 3 将有同样形式的微分方程，如果：

$$R=\text{const},$$
$$C=C_0t$$
$$L=L_0t$$

$$t\frac{d\left[L_0t\dot{q}(t)\right]}{dt}+\frac{q(t)}{C_0}+Rt\dot{q}(t)=te(t)$$

或

$$t\frac{d(t\dot{q}(t))}{dt}+\frac{q(t)}{L_0C_0}+\frac{R}{L_0}t\dot{q}(t)=\frac{t}{L_0}e(t)$$

因此

$$-2\alpha=\frac{1}{C_0L_0}$$

$$\alpha^2+\beta^2=R/L_0$$

此处：

$$L_0=1$$

$$C_0=-\frac{1}{2\alpha}$$

$$R=\alpha^2+\beta^2$$

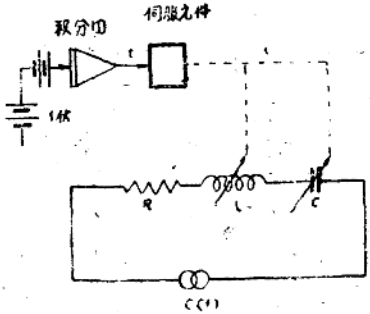

图　3

汉克尔变换

定义〔見文献2，8—10，11—14〕：

$$F_n(\sigma)=\int_0^{\infty}tJ_n(\sigma t)f(t)dt \tag{20}$$

和它的反变换：

$$f(t)=\int_0^{\infty}\sigma J_n(\sigma t)F(\sigma)d\sigma \tag{21}$$

汉克尔变换能被用来解某类綫性时变微分方程，比經典法能很容易地求得解，特别是求特殊解，因为（20）的核心是貝塞尔函数 $tJ_n(\sigma t)$，可以期望貝塞尔微分方程属于以下类型〔17〕：

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+(a^2t^2-n^2)x=f(t) \tag{22}$$

或：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}+\left(a^2-\frac{n^2}{t^2}\right)x=\frac{f(t)}{t^2} \tag{23}$$

若$f(t)=0$；补解是：

$$y_c=AJ_n(at)+BY_n(at) \tag{24}$$

此处 A 和 B 是任意常数，$J_n(at)$ 和 $Y_n(at)$ 相应地是第一种、第二种貝塞尔函数，由于 A 和 B 是任意常数，每一项亦是一个解，令

$$\begin{gathered} x=J_n(\sigma t)\\ f(t)=0\\ a=\sigma \end{gathered} \tag{25}$$

则(23)变成：

$$\frac{d}{dt}\left[t\frac{dJ_n(\sigma t)}{dt}\right]=-\left(\sigma^2-\frac{n^2}{t^2}\right)tJ_n(\sigma t) \tag{26}$$

把二次导数用部份积分法进行变换，我們得到：

$$\int_0^\infty\frac{d^2x}{dt^2}tJ_n(\sigma t)\,dt=-\int_0^\infty\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left[tJ_n(\sigma t)\right]dt \tag{27}$$

若

$$t\frac{dx}{dt}=0\text{，　当 }t=0\text{ 及 }t=\infty$$

所以

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}\right)tJ_n(\sigma t)dt=$$

$$=\int_0^\infty x\frac{d}{dt}\left[tJ'_n(\sigma t)\right]dt \tag{28}$$

若　　　　$tx(t)=0$，当$t=0$ 及$t=\infty$。

现在把（26）代入（28）并进行移項，我們有：

$$\int_0^\infty\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}-\frac{n^2}{t^2}x\right]tJ_n(\sigma t)dt=-\sigma^2X_n(\sigma) \qquad (29)$$

此处

$$X_n(\sigma)=\int_0^\infty x(t)tJ_n(\sigma t)dt \qquad (30)$$

所以

$$h_n\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}-\frac{n^2}{t^2}\right]x(t)=-\sigma^2X_n(\sigma) \qquad (31)$$

此处h_n代表由（30）定义的n次汉克尔变換。也有：

$$h_n\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}-\frac{n^2}{t^2}+a^2\right]x(t)=(a^2-\sigma^2)X_n(\sigma) \qquad (32)$$

此处乘以$(a^2-\sigma^2)$可視为对$X_n(\sigma)$的一种运算。

把（31）和（32）推广到高阶的微分方程：

$$h_n\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}-\frac{n^2}{t^2}\right]^N x(t)=(-1)^N\sigma^{2N}X_n(\sigma) \qquad (33)$$

和

$$h_n\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{d}{dt}-\frac{n^2}{t^2}+a^2\right]^N x(t)=(a^2-\sigma^2)^N X_n(\sigma) \qquad (34)$$

此处 $n=1,2,3$，等。

并且 a 可以是实数或虚数，由于沒有 $J_n(tk_1)\cdot J_n(tk_2)$ 的簡单表示式，故沒有象拉普拉斯和梅林变换的乘法或褶尔吞定理。存在簡单的派尔塞瓦尔（Parseval）型定理：

$$\int_0^{\infty} tf(t)g(t)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\sigma F(\sigma)G_n(\sigma)d\sigma \qquad (35)$$

此处 $F_n(\sigma)\triangleq h_n[f(t)]$

和 $G_n(\sigma)\triangleq h_n[g(t)]$

本文目的是作出汉克尔变换有用的运算表和函数变换表，他們可以象拉普拉斯变换表似地加以应用。由于汉克尔变换是成对对称的，只需要一个表作正变换与反变换用。换言之，同一列可以既代表时間函数或变换后的函数。

有三个主要方法作表：

1）实际完成（20）式所示的运算。

例： $$f(t)=\frac{1}{t}$$

$$F_n(\sigma)=\int_0^{\infty}Jn(\sigma t)dt=$$

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^{\infty}J_n(\sigma t)d(\sigma t) \qquad (36)$$

对积分符号中的变数变换 $x=\sigma t$

$$\int_0^{\infty} J_n(\sigma t)d(\sigma t)=\int_0^{\infty} J_n(x)dx=1$$

（見[9]）。

所以

$$F_n(\sigma)=\frac{1}{\sigma}$$

2）用表Ⅲ有的运算关系对已知的成对变换进行运算。例如，

若：

$$F'_n(\sigma)=\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}tJ_n(\sigma t)dt \qquad (37)$$

和

$$F_n(\sigma)=\int_0^{\infty}f(t)tJ_n(\sigma t)dt$$

此处"′"表示导数的变换，用部分积分法对（37）进行积分并再假定　当$t=0$和$t=\infty$时$tf(t)=0$，

$$F'_n(\sigma)=\int_0^{\infty}f(t)\frac{d}{dt}[tJ_n(\sigma t)]dt \qquad (38)$$

但从貝塞尔函数理論[10]，[14]：

$$\frac{d}{dt}[tJ_n(\sigma t)]=J_n(\sigma t)+tJ_n'(\sigma t)$$

$$=J_n(\sigma t)+\sigma tJ_{n-1}(\sigma t)-nJ_n(\sigma t) \qquad (39)$$

将此代入（38′），我們得到：

$$F'_n(\sigma)=(n-1)\int_0^\infty f(t)t\frac{J_n(\sigma t)}{t}dt-\sigma F_{n-1}(\sigma) \tag{40}$$

存在貝塞尔函数的另一种关系：

$$J_n(\sigma t)=\frac{\sigma t}{2n}[J_{n-1}(\sigma t)+J_{n+1}(\sigma t)] \tag{41}$$

（見[10]，第8頁）

代入（40）得（42）

$$F_n'(\sigma)=-\sigma\left[\frac{(n+1)}{2n}F_{n-1}(\sigma)\right.$$

$$\left.-\frac{n-1}{2n}F_{n+1}(\sigma)\right] \tag{42}$$

它給出用函数的变換式表示的該函数导数的变換。作为应用的例子，我們举前面給出的成对变換

$$f(t)=\frac{1}{t} \quad 和 \quad F_n(\sigma)=\frac{1}{\sigma} \tag{43}$$

代入（42）将产生导数的变換。所以：

$$\frac{df(t)}{dt}=-\frac{1}{t^2} \quad 和 F'_n(\sigma)=-\frac{1}{n} \tag{44}$$

3）第三个方法是利用1935年特利可米（Tricomi）[24]发現的拉普拉斯变換与汉克尔变換間的关系。这方法可以使得人們用常見的拉普拉斯变換去作出汉克尔函数变換。特利可米发現的关系式是：