中学复习参考資料

数　学

南充市中学复习参考资料编写组

九七八年四月五日

目　　录

第一部分　代　数

第二部分　平面几何

第三部分　平面三角

第一单元　三角函数的定义及其基本性质

第二单元　三角函数式的变化

第三单元　解斜三角形

第四部分　解析几何

第一部分　代　数

1　数的概念的发展

一、自然数（正整数）1,2,3,4,……称为自然数。

（一）性质　在自然数集合中：

1.有最小的数“1”没有最大的数；

2.每一个数都有且仅有一个后继数；除“1”以外，任一数都有且仅有唯一的先引数；

3.有顺序性；（能比较大小）

4.永远可以施加、乘两种运算。

（二）运算定律

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律　$a\times b=b\times a$

乘法对于加法的分配律　$m(a+b)=ma+mb$

二、整数　正、负整数及零统称为整数。

（一）性质　在整数集合中：

1.没有最小的数，也没有最大的数；

2.任一数都有且仅有唯一的先引数及后继数；

3.有顺序性（正整数大于零，零大于负整数）；

4.永远可以施行加、减、乘三种运算，如a、b为整数，方程$x+a=b$永远有解。

（二）运算定律（同自然数）

三、有理数　整数及分数统称为有理数。

（一）性质　在有理数集合中：

1.没有最小的数，也没有最大的数；

2.任意二数之间，永远有有理数存在（稠密性）；但不能与数轴上的点建立一一对应关系（间断性）

3.三个基本概念

(1.)相反数：如果两个数在数轴上的对应点在原点的相反方向而和原点的距离相等，我们把这样的两个数叫做相反的数。

就是：任何一个正数的相反数是一个负数；

任何一个负数的相反数是一个正数；

0的相反数还是0。

(2.)绝对值：在数轴上表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。

就是：正数的绝对值就是这个正数本身，

负数的绝对值是它相反数，

0的绝对值就是0。

(3.)倒数：如果两个数的乘积等于1，那末它们叫做互为倒数，此二数中的每一个就叫做另一数的倒数

即 $a.b=1$ 则a.b互为倒数 $(a=\frac{1}{b})$

如 $\frac{2}{5}$ 与 $\frac{5}{2}$；

12 与 $\frac{1}{12}$；

-3 与 $-\frac{1}{3}$；

$-1\frac{2}{7}$ 与 $-\frac{7}{9}$ 等。

4.有顺序性：即任意两个有理数可以比较大小

(1)任何正数，大于任何负数； (如 $3.56>-8.39$)

(2)任何正数，大于零； (如 $0.0475>0$)

(3)任何负数，小于零； (如 $-7.8<0$)

(4)两个正数中，绝对值大的那个数较大； (如 $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$)

(5)两个负数中，绝对值大的那个数较小； (如 $-4.07<-3.56$)

5.永远可以施引加、减、乘、除(但除数不得为零)，如p、g为有理数，且$p\neq0$则方程$px=g$永远有解。

(二)运算定律(同自然数)。

四、实数 有理数与无理数统称为实数。

(一)无理数 无限且不循环的小数(在实际运算中，往往用近似值表示无理数)。

为说明无理数的存在，下面我们证明：$\sqrt{2}$不是有理数，

证明：(反证法)假设$\sqrt{2}$是有理数，则它可以利用既约分数(即无公因数)$\frac{g}{p}$来表示，这里p和g是互质的正整数。

即 $\frac{g}{p}=\sqrt{2}$

两边平方得：$\frac{g^2}{p^2}=2$，　$g^2=2p^2$

由此看出，$g^2=2p^2$，即g^2是偶数，因此g必定也是偶数。

设$g=2m$，代入上式得

$(2m)^2=2p^2$，　$4m^2=2p^2$

两边同除以 2 得：$p^2=2m^2$

这样一来，p也是偶数了。这跟前面假设 p和g 互质相矛盾，因此 $\sqrt{2}$ 不能用分数表示，它当然不是有理数了。

（二）实数的性质：在实数集合中：

1.没有最大的数，也没有最小的数了。

2.任意两个实数间都有实数存在，且能与数轴上的点建立一一对应关系（连续性）；

3.有顺序性：

（1）比较两个正实数大小的方法。

①两个正实数都用无限小数表示时，如果它们对应位上的数字都相同，那么这两个正实数相等。

②如果整数部分不等，那么整数部分大的正实数较大；如果整数部分相同，而小数第一位不等，那末小数第一位大的正实数较大，如果小数第一位也相等，那么小数第二位大的正实数较大、用这样的方法类推下去。

比如：$\alpha=3.00134\cdots$，　$\beta=2.987\cdots$时，　$\alpha>\beta$

$\alpha=7.05279\cdots$，　$\beta=7.05280\cdots$时，　$\alpha<\beta$

但是，遇到 0 循环和 9 循环的时候，有一种情形要除外。比如：

$\alpha=2.37999\cdots$，　$\beta=2.38000\cdots$，这时，我们认为$\alpha=\beta$。

（2）比较正负实数和零的大小的方法，完全和有理数里的比较方法一样。

4.永远可以实行加、减、乘、除（但除数不为零）及正数的开方运算，一元二次方程的判别式不小于零时，永远有解。

（三）实数的运算定律　（同自然数）。

（四）实数的运算顺序：算术里的基本顺序律，在实数范围里是完全适合的。

如果把加、减法叫做第一级运算，乘、除法叫做第二级运算，乘方、开方叫做第三级运算，那么，对于实数的运算顺序作如下规定：

1.若没有括号，那末运算顺序是：先做第三级运算，次做第二级运算，再做第一级运算。

2.在同一级的几个连续运算中吊依然由左到右的次序进行演算。

3.有括号的部分，括号里的运算先做。

但在遇有可以应，用加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律或乘法对于加法的分配律和减法及除法运算性质使演算比较简便的地方，可以应用这些性质，变更上面规定的运算顺序。

例如，计算：$(-5)\times(-3\frac{6}{7})+(-7)\times(-3\frac{6}{7})+12\times(-3\frac{6}{7})$

解：原式 $=[(-5)+(-7)+(+12)]\times(-3\frac{6}{7})$

$=0\times(-3\frac{6}{7})$

$=0$

（五）实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a, & 当a\geq 0时； \\ -a, & 当a<0时。\end{cases}$$

（六）实数的近似计算：

1.近似数：仅仅是近似地表示某一个量的真正值的数叫近似数。

如：某校共有1532人，常说约为1500人，1500这个数就是近似数

准确数：确切表示某一个量的真正值（准确值）的数叫做准确数。（如上例中的数字1532）。

2.近似数的化整：

(1) 四舍五入法：把所需要的数位以右的数字去掉时，如果被去掉的第一位数字小于5，就把保留下来的数字完全不动；如果被去掉的第一位数字大于或等于5，就把保留下来的末一位数字加1。

如，用四舍五入法将20.4759分别化整到百分位、十分位和个位，就得到$20.4759\dot{=}20.48$；$20.4759\dot{=}20.5$；$20.4759\dot{=}20$。

（注意：在最末一例中，如果分为两步进行，首先四舍五入到十分位得20.5，，然后再四舍五入到个位得21，便是不正确的）。

(2) 去尾法：把所需要的数位以右的数字不论多少一律去掉，只保留所需要的数位及其以左的所有数字。

例如，用去尾法将84.81和84.89化整到十分位都是84.8。

(3) 收尾法：把所需要的数位以右的数字去掉而把保留下来的末一位数字上一律加1。

例如，用收尾法将84.81和84.89化整到十分位都是84.9。

又如，用收尾法将2.3401化整到百分位是2.35。

使用哪一种化整方法要根据具体问题的需要来决定，通常多采用四舍五入法。

今后如无特别声明，所指化整都是四舍五入的化整。

3.近似数的运算：（数字计算法则）

(1) 在计算前，必须弄清哪些数据是准确的，哪些数据是近似的，准确数可看作是准确度最大的近似数。

(2) 近似数加减时，要把小数位数多的数四舍五入，使比小数位数最少的数只多一位小数，计算结果保留的小数位数要与原近似数中小数位最少的小数位数相同。

(3) 近似数乘除时，要把有效数字多的数四舍五入，使比有效数字最少的只多一个有效数字；计算结果保留的数字个数要与原近似数中有效数字最少的个数相同。

(4) 近似数乘方时，幂底数有几个有效数字，结果就保留几个数字。

(5) 近似数开方时，被开方数有几个有效数字结果就保留几个数字。

(6) 中间运算的结果，应当比ii－V等法则所规定的最后结果要保留一个数字。

例1.作近似数的混合运算：$3.28\times 2.15+4.8409\times 2.7-76.18+7.24$

解 $3.28\times 2.15+4.8409\times 2.7-76.18+7.24\doteq 7.052+13.1-10.52$

$\doteq 7.1+13.1-10.5\doteq 10$

例2.有一块梯形土地，量得上底约68.85米，下底约107.30米，高约9.86米，求这块土地的面积

解 $S\doteq\frac{1}{2}(68.85+107.30)\times 9.86\doteq\frac{1}{2}\times 176.15\times 9.86$

$\doteq 88.08\times 9.86\doteq 868$（平方米）

答：些块土地的面积约是686平方米

五、复数 a.b为任何实数时，$a+bi$叫做复数（$i^2=-1$）；其中$b=0$时叫做实数；$b\neq 0$时叫做虚数；$a=0$，$b\neq 0$时，叫做纯虚数实数的单位为1，虚数的单位为i。($i=\sqrt{-1}$)

六、数的系统表

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（有限小数及循环小数）
    - 无理数（无限不循环小数）
  - 虚数

〔注〕：①复数与实数（或虚数）不是对立的，例如3是实数但也是复数，3＋5i是虚数但也是复数。虚数与实数是对立的，例如3＋2i是虚数，但不是实数。

②凡本提纲目前加有“＊”者，是近年教材中所无，而为科学性和系统性所略加介绍的内容；凡加“△”者，是笔者认为需着重复习掌握的重点内容所在。

复 习 题 （一）

1. $2+\sqrt{3}$ 是不是实数？两个正实数相加一定是正实数吗？相乘呢？

2. 对于整数作算术四则运算一定得整数吗？对于正数作算术四则演算一定得正数吗？

3. 两个偶数相加、相减相乘、相除的结果是偶数还是奇数？两个奇数呢？

4. 试举出一个数，它既叫复数，也叫实数，也叫有理数，也叫分数，也叫正数。

5. 整数和自然数这两个名词有没有区别？有什么区别？

6. 零可以做除数吗？做被除数可不可以？

7. 画出一条数轴，并在此数轴上描出：$+3, 0, 1\frac{1}{2}, -2\frac{2}{3}$ 等各点

8. 数轴上会不会有两个不同的点表示同样的数？会不会有一个点表示两个不同的数？

9. 写出下列各数的相反数：-3，$+2$，$\frac{2}{3}$，-1.5，0，把这些数和它们的相反数在数轴上标出来。

10. 写出绝对值等于 7 的两个数来

11. 写出所有小于 7 的正整数；写所有大于 -5 的负整数？

12. 比较下列各组数的大小，并用关系符号"$<$"把它们连接起来：

   (1) $0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

   (2) $1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, -3\frac{1}{4}$

13. 求下列各数的倒数：12，-7，$\frac{3}{4}$，$-\frac{1}{5}$，1，-1，0.33。

14. 求 $-\frac{2}{3}$ 及 $\frac{2}{5}$ 的倒数的和，它们的和的倒数？

15. 求 -3，-5，$+1.4$ 三个数的和的绝对值，求它们的绝对值的和。

16. 求 -5 与 $-\frac{1}{3}$ 的相反数的和，求 -5 与 $-\frac{1}{3}$ 的倒数的和的相反数。

17. 一个数的平方一定大于原数吗？试举出一个反例。立方呢？

18. 一个有理数乘以什么数，总可以得到它的相反数？一个有理数除以什么数，总可以得到它的相反数？

19. 有没有一个数的相反数就是这个数本身？有几个这样的数？

20. 有没有一个数的倒数就是这个数本身？有几个这样的数？

21. 如何用几何方法证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数？

22. $X=2$与$(X^2-2)(X-2)=0$，在有理数集合内是不是同解方程？在实 数集 合呢？并说明其理由。

23. 系数在 i）有理数集合内？ ii）实数集合内，试将X^4+2X^2-8因式分解

24. 解 $\left|X-2\right|=3$

25. 计算：

(1) $\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right)+3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]+8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}$

(2) $\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times 0.4+1\frac{1}{8}$

(3) $18+\left\{1-\left[\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\right]\right\}$

(4) $\left(13\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}\times 1+5\frac{5}{12}+2\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{37}$

(5) $\dfrac{3}{\frac{2}{5}}-\dfrac{\frac{3}{2}}{5}$

(6) $\dfrac{\frac{1}{3}}{5}+\dfrac{1}{\frac{3}{5}}$

(7) $\left(1-\frac{426}{697}+\dfrac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}\right)+\dfrac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}$

(8) $(-1)^{1324}+(-1)^{67}-(-1)^{365}$

(9) $\left\{\left[4\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)+(-0.4)\times\left(-6\frac{1}{4}\right)\right]+\left(-\frac{3}{5}\right)-20\right\}\times(-1)^{87}$

(10) $\dfrac{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times 1\frac{1}{2}-4\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2-1}$

26. 把下列除法，转化为乘法演算：

(1) $\left(-\frac{2}{3}\right)+(-5)$；　　　　(2) $3+\left(-\frac{3}{2}\right)$。

27. 使用简便的方法计算下列各题：

(1) $(-35)+(-6)+(-9)+(+8)+(+9)+(+11)+(+32)$

(2) $\left(+\frac{1}{4}\right)-(+3.3)+(+6)+(-6)+\left(-\frac{1}{4}\right)+(+3.3)$

(3) $125\times3874\times9\times8\times\frac{1}{9}$

(4) $(+74)\times(-1280)+(+74)\times(+1140)+(+74)\times(+141)$

(5) $[(+\frac{1}{5})+(-\frac{1}{2})+(-\frac{5}{12})]\times(+60)$

(6) $(+3\frac{1}{4})+(-5\frac{1}{6})-(-1\frac{3}{4})-(+3\frac{5}{6})+(+12\frac{3}{7})-(-12\frac{4}{7})$

2 恒等变形

一、有关代数式的恒等变形

加、减、乘、除，整数次乘方、开方统称为代数运算。

无理指数幂的运算；对数变换；三角函数运算；反三角函数运算不属于代数运算而属于初等超越运算。

凡数码或字母所表示的数，借助于有限次代数运算所构成的数学式子称为代数式。

代数式 $\begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{整式例如：} X^3+\frac{3}{4}X^2-2X+\sqrt{3},\ \frac{X^2-y^2}{2}\text{等等；} \\ \text{分式例如：} \frac{X+a}{X-a},\ \frac{1}{X}+y\text{等等；} \end{cases} \\ \text{无理式　例如：} X+\sqrt{X-1},\ \frac{1}{\sqrt{X}}+Y\text{等等。} \end{cases}$

（一）有理代数式的恒等变形

由数码或字母所表示的数，借助于有限次的加、减、乘、除所构成的数学式子，叫做有理代数式（整数乘方可以作为乘）或简称有理式。

如：$3a, X+y, a^2+b^2, \frac{(a+b)h}{2}, \frac{1}{a}, \frac{X-y}{X+y}$等等，

1.有理整式的恒等变形

没有含字母的式子做除数的有理式称为有理整式，简称整式。

如　$3a, X+y, a^2+b^2, \frac{(a+b)h}{2}, 2(ab+ac+bc), Vt$等等。

没有加法和减法运算的整式叫做单项式。如$3, -\frac{1}{2}, a, -3a^2,$

$+\frac{1}{3}a^3b^2c, -\frac{1}{5}X^2y^3, 0.25mn^2$等等。

若干个单项式的代数和，叫做多项式。如$4X-5$，$kX+b$，$a+3$，

$-X^2+Xy+3y^2$，$\frac{1}{3}X^3-2X^2+\frac{1}{2}X-5$等等。

（1）有理整式的整理化简

①整式的加减法（关键在于识别及合并同类项）

1°同类项：多项式里的某些项，如合彼此完全没有差别，或者彼此只有系数的不同，那末这些项就叫做同类项。

如　$3a^2b$ 和 $3a^2b$

$-5ab^2$ 和 ab^2

X^3 和 $\frac{1}{7}X^3$等等。

2°合并同类项法则：合并同类项，只要把系数相加，所得的和作为系数（字母部分连同它们原来的指数仍旧不变）。

如：$5X^4-3X^2+6-7X^3+12X^4+10X^3+2X^2-3X^3+7+10X$

解：先按x的降幂排列，再合并同类项：

$\underline{5X^4}-3X^2+6-7X^3+\underline{12X^4}+10X^3+2X^2-3X^3+7+10X$

$=5X^4+12X^4-7X^3+10X^3-3X^3-3X^2+2X^2+10X+6+7$

$=(5+12)X^4+[(-7)+10+(-3)]X^3+[(-3)+2]X^2+10X+13$

$=17X^4+0\cdot X^3+(-1)X^2+10X+13$

$=17X^4-X^2+10X+13$

（注意：$[(-7)+10+(-3)]X^3=0\cdot X^3=0$,这一项没有了，因为0乘任何数等于0）

3°单项式加减法法则：几个单项式相加减，只要用加减号把它们连结起来，写成代数和的形式，再合并同类项。

例如：计算 $-\frac{1}{2}a-(+\frac{3}{8}a^2)+(+\frac{3}{4}a^2)+(-\frac{7}{8}a)-(-\frac{1}{2}a)$

解：$-\frac{1}{2}a-(+\frac{3}{8}a^2)+(+\frac{3}{4}a^2)+(-\frac{7}{8}a)-(-\frac{1}{2}a)$

$=-\frac{1}{2}a-\frac{3}{8}a^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{7}{8}a+\frac{1}{2}a$

$=-\frac{7}{8}a+\frac{3}{8}a^2$

4°去括号：去括号时，如果括号前面是“+”号，那末，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里面各项都不变号；如果括号前面是“-”号，那末，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里面各项都变

号。

如：化简$a-(2a-3b)+(3a-4b)$

解：$a-(2a-3b)+(3a-4b)$

$=a-2a+3b+3a-4b$

$=2a-b$

又如：化简$10p-[3p+(5p-10)-4]$

解：$10p-[3p+(5p-10)-4]$

$=10p-[3p+5p-10-4]$

$=10p-[8p-14]$

$=10p-8p+14$

$=2p+14$

5°添括号：把一个多项式或者它的一部分用括号括起来，如果括号前面是"+"号，那末括到括号里的各项都不变；如果括号前面是"−"号，那末括到括号里的各项都要变号。

如：不改变多项式$5a^2-2a-3b+b^2$的值，把它的后两项放在（1）前面带有"+"号的括号里；(2)前面带有"−"号的括号里。

解：（1）$5a^2-2a-3b+b^2=5a^2-2a+(-3b+b^2)$；

（2）$5a^2-2a-3b+b^2=5a^2-2a-(3b-b^2)$。

添括号可以用去括号来验算。例如，在上面两式中，把等号右边的式子去括号，就得

$$5a^2-2a+(-3b+b^2)=5a^2-2a-3b+b^2,$$

$$5a^2-2a-(3b-b^2)=5a^2-2a-3b+b^2.$$

又如：不改变式子的值，把下列各式括号前面的符号改变成相反的符号：

(1)$x+(1-x^2+x^3)$；　(2)$x-y-(-y+x-1)$。

解：(1)$x+(1-x^2+x^3)=x+1-x^2+x^3$

$=x-(-1+x^2-x^3)$；

(2)$x-y-(-y+x-1)=x-y+y-x+1$

$=x-y+(y-x+1)$。

由此例可以知道：改变括号前面的符号，括号里面各项的符号也都要改变。

6°多项式加减法法则：加上一个多项式，依次加上这个多项式的各项；减去一个多项式，改变减式各项的符号，把它们依次加在被减式上。

例如：计算：

(1) $(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$

(2) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$

(3) $(\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6)-(\frac{1}{3}a^2-5)-(\frac{1}{2}a^3-4a-7)$

(4) $(0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3)-(-0.5x^3-x^2y+0.3xy^2)$
$+(1.2x^3-1.2y^3)$

解：(1) $(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$

$=3a+2b-3c+5a-3b+2c$

$=3a+5a+2b-3b-3c+2c$

$=8a-b-c$

(2) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$

$=x^3-3x^2y+3xy^2-x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$=6xy^2+y^3$

(3) $(\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6)-(\frac{1}{3}a^2-5)-(\frac{1}{2}a^3-4a-7)$

$=\frac{1}{3}a^3-2a^2-\frac{1}{2}a-6-\frac{1}{3}a^2+5-\frac{1}{2}a^3+4a+7$

$=-\frac{1}{6}a^3-\frac{7}{3}a^2+\frac{7}{2}a+6$

(4) $(0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3)-(-0.5x^3-x^2y+0.3xy^2)$
$+(1.2x^3-1.2y^3)$

$=0.3x^3-x^2y+xy^2-y^3+0.5x^3+x^2y-0.3xy^2$
$+1.2x^3-1.2y^3$

$=2x^3+0.7xy^2-2.2y^3$

练　习　题

1.下列各式这样合并同类项对吗？如错，请改正：

① $2x+2y=4xy$

② $7a-2b=5ab$

③ $3a^2-a^2=3$

④ $3x^2-5x^2=2x^2$

⑤ $9a^2b-9ab^2=0$

⑥ $-7xy-7yx=0$

⑦ $2x-x^2=0$

2.计算：(1) $(8x^3-6x^2+5x-12)+(-4x^2+3x-8)+(-5x^2+5x+7)$

(2) $(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}a+\frac{1}{5})+(1\frac{1}{4}a^2-0.3a+1)$

(3) $(5a^4+2a^2b^2+ab^3-3a^3b)-(5a^3b-2ab^3+3a^2b^2+b^4)$

3. 去下列各式的括号并化简：

(1) $4xy+(x^2+3xy-2y^2)-(x^2-5xy+y^2)$

(2) $9x-\{15y-[4x-(11y-2x)-10y]+2x\}$

(3) $x^3-[7x^3-2+2x^2-2x-(4x^3-2x-2x^2-14)]-(2x^3-8x^2)$

(4) $6x-\{4x+[2x-(3x-5x+7+1)-3]-8\}$

4. 把下面各式的后面两项用括号括起来，并把第二项的性质符号，保留在括号外面：

(1) $3x+5y-6z$；　　(2) $3x-6y+5z$；

(3) $-2a+3b-5c$；　　(4) $-2a-3b-5c$；

(5) $a^3-3a^2b-b^3$；　　(6) $a^3+3a^2b+b^3$。

〔解法举例：$3x+5y-6z=3x+(5y-6z)$；

$3x-6y+5z=3x-(6y-5z)$。〕

② 整式的乘法

1°同底数的幂的乘法法则：同底数的幂相乘，底数不变，指的相加。

即：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　（m，n是自然数）

如：$a^3\cdot a=a^{3+1}$

$=a^4$

$x^3\cdot x^5=x^{3+5}$

$=x^8$

$b^3\cdot b^2\cdot b=b^{3+2+1}$

$=b^6$

$y^{n+1}\cdot y^{m+2}=y^{(n+1)+(m+2)}$

$=y^{m+n+3}$

2°单项式乘以单项式的法则，单项式乘以单项式，把它们的系数的积作为积的系数，把相同字母的指数的和作为积里这个字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里。

值得特别注意的是，单项式乘（除）以单项式，是多项式乘（除）法的基本运算技能，因而，我们把上述法则剖析为三个环节：

a. 系数相乘（除）；

b. 同底数幂相乘（除）；底数不变，指数相加（减）；

c. 不同底数的幂相乘（除），照写相乘（除）。

例1：$(3a^3x^2)\cdot(-5ax^3y^2)$

$=[3\cdot(-5)](a^3\cdot a)(x^2\cdot x^3)y^2$

$=-15a^{3+1}x^{2+3}y^2$

$= -15a^4 \times 5y^2$

例 2，$(\frac{2}{3}x^n y)(-\frac{3}{4}xy^n)(-\frac{2}{5}x^{2n}y^2z)$

$= \frac{2}{3}\cdot(-\frac{3}{4})\cdot(-\frac{2}{5})(x^n\cdot x\cdot x^{2n})(y\cdot y^n\cdot y^2)z$

$= \frac{1}{5}x^{n+1+2n}y^{1+n+2}z$

$= \frac{1}{5}x^{3n+1}y^{n+3}z$

练　习　题

化简下面各式：

(1) $a^5\cdot a^5$；　　(2) $b^{3n}\cdot b^{5n}$；

(3) $a^8\cdot a^7\cdot a^3$；　　(4) $a^{2n}\cdot a^n\cdot a^{m+n}$；

(5) $(\frac{2}{3}x^3y^4)(-\frac{4}{5}x^2y^5z)$；　　(6) $(0.1a^2b^3)(0.2ab^4)$；

(7) $(6\times10^9)(7\times10^7)(4\times10^8)$；　　(8) $(-\frac{7}{8}x^3yz^2)(\frac{4}{5}x^2z)(\frac{10}{21}x^4)(3z^2)$；

(9) 把 $[-3(a-b)^2][+2(a-b)^3][-\frac{2}{3}(a-b)]$ 化成$k(a-b)^n$的形式。

(10)把$(-5\times10^5)\cdot(-3\times10^6)\cdot(-5\times10^4)$化成$k\times10^n$ 的形式。

3°单项式与多项式相乘的法则：单项式同多项式相乘，应把多项式的每一项同单项式相乘，再把所得的积相加。

本法则应注意之处是，必须正确理解和掌握乘法对于加法的分配律，即 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$

例 1　$(3x^2-2ax+5a^2)(-4ax)$

$=3x^2(-4ax)-2ax(-4ax)+5a^2(-4ax)$

$= -12cx^3+8a^2x^2-20a^3x$

例 2　$(\frac{1}{2}a^2b)(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}ab-b^2)$

$=\frac{1}{3}a^4b-\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^2b^3$

例 3　化简$x(x-y-z)+y(x+y-z)-z(-x-y+z)$

解：　$x(x-y-z)+y(x+y-z)-z(-x-y+z)$

$=x^2-xy-xz+xy+y^2-yz+xz+yz-z^2$

$= x^2 + y^2 - z^2$

4°多项式乘以多项式的法则：多项式乘以多项式，只要把一个多项式的所有各项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加，有同类项要加以合并。

例1：求多项式$a-b$与$x-y$的积

解：$(a-b)(x-y) = ax - ay - bx + by$

说明：先拿$(a-b)$的第一项a分别与$(x-y)$的各项相乘，得$ax-ay$，再拿$(a-b)$的第二项$-b$分别与$(x-y)$的各项相乘，得$-bx+by$，再把这两个积相加。我们也可以先拿x与$(a-b)$相乘，再拿$-y$与$(a-b)$相乘，再相加，结果是一样的。

事实上，上例中，我们可以先把两多项式中任一个（如$a-b$）视为一个整体（当成"单项式"）利用乘法对于加法的分配律运算一次即$(a-b)(x-y) = (a-b)x - (a-b)y$；然后，再把$(a-b)x$及$-(a-b)y$各自又利用乘法对于加法的分配律，这样就把多项式的乘法最后归结为单项式乘以单项式了，因而，我们应该充分重视，作为整式乘法的基本运算在于单项式乘以单项式。

例2：$(x^2-3x-5)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 5x - 3x^2 + 9x + 15$

$$= x^3 - 6x^2 + 4x + 15$$

在多项式乘法里，如果两个因式的项数都比较多时，横式的写法在合并同类项时，容易搞错。我们也可以象算术里做乘法一样，用竖式的写法来进行演算，举例如下

例1：$(-5x+3x^2+4)(-5+3x)$

解：

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 3x^2 & -5x & +4 & \cdots\cdots(1) \\
\times) & 3x & -5 & & \cdots\cdots(2) \\
\hline
9x^3 & -15x^2 & +12x & & \cdots\cdots(3) \\
 & -15x^2 & +25x & -20 & \cdots\cdots(4) \\
\hline
9x^3 & -30x^2 & +37x & -20 & \cdots\cdots(5)
\end{array}$$

$\therefore (3x^2-5x+4)(3x-5) = 9x^3 - 30x^2 + 37x - 20$

说明：我们来归纳一下上面这个演算的步骤

（1）先把第一个因式按照x的降幂排好，成为$3x^2-5x+4$，写在第一排。（如有缺项时，可留空位）

（2）再把第二个因式也按照x的降幂排好，成为$3x-5$，写在第二排，使左边第一项对齐。

（3）以第二个因式的第一项$3x$乘第一个因式的各项，得$9x^3-15x^2+12x$，写在横线的下面，作为积的第一个部分。

（4）以第二个因式的第二项-5乘第一个因式的各项，得$-15x^2+25x-20$，是积的另一部分，写在积的第二排，并且把这个多项式的各

项和第一排的多项式里的同类项分别对齐（如果第二个因式还有第三项、第四项等，依次写在下面，都要使同类项上下对齐）。

（5）把各排的部分积相加，就得到最后的乘积。

例2：$(2x-5x^2-6+3x^3)(3x^2-5x+2x^3-7)$

解：

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 3x^3 & -5x^2 & +2x & -6 & & & \\
\times) & 2x^3 & +3x^2 & -5x & -7 & & & \\
\hline
 & 6x^6 & -10x^5 & +4x^4 & -12x^3 & & & \\
 & & +9x^5 & -15x^4 & +6x^3 & -18x^2 & & \\
 & & & -15x^4 & +25x^3 & -10x^2 & +30x & \\
 & & & & -21x^3 & +35x^2 & -14x & +42 \\
\hline
 & 6x^6 & -x^5 & -26x^4 & -2x^3 & +7x^2 & +16x & +42
\end{array}
$$

$\therefore\ (2x-5x^2-6+3x^3)(3x^2-5x+2x^3-7)$

$=6x^6-x^5-26x^4-2x^3+7x^2+16x+42$

注意：代数乘法的竖式写法，与算术乘法的竖式写法，有下列不同点：

（1）算术的写法是两个因式右面个位对齐，代数的写法是两个因式的左面第一项对齐；

（2）算术乘法一般从右到左地进行计算，但是代数乘法一般要从左到右地进行计算。

（3）如有缺项，应留空位或用“0”占据位置

例3：$(3x^4-2x^2+x-3)(4x^3-x^2+5)$

解：

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & 3x^4 & & & -2x^2 & +x & -3 & & \\
\times) & 4x^3 & -x^2 & & +5 & & & & \\
\hline
 & 12x^7 & & -8x^5 & +4x^4 & -12x^3 & & & \\
 & & -3x^6 & & +2x^4 & -x^3 & +3x^2 & & \\
 & & & & 15x^4 & & -10x^2 & +5x & -15 \\
\hline
 & 12x^7 & -3x^6 & -8x^5 & +21x^4 & -13x^3 & -7x^2 & +5x & -15
\end{array}
$$

$\therefore\ (3x^4-2x^2+x-3)(4x^3-x^2+5)$

$=12x^7-3x^6-8x^5+21x^4-13x^3-7x^2+5x-15$

③ 整式的乘方

1°幂的乘方法则：一个幂乘方，底数不变，把这个幂的指数乘以乘方的指数。

即 $(a^m)^n=a^{mn}$ （m，n都是自然数）

如：$(a^2)^3=a^{2\times3}$

$=a^6$

$(a^{m+1})^n=a^{(m+1)\times n}$

$=a^{mn+n}$

$(a^2)^3\cdot(a^4)^5=a^6\cdot a^{20}$