

中西算学大成

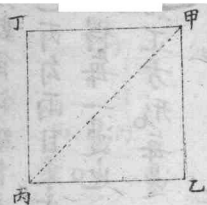
中西算學大成

各面形一

面之為形。成於方圖。直線所成。皆方之類。曲線所成。皆圓之類。立法則方為圖之本。度圖者。必以方。而度方者。必以矩。所謂方有盡。而圖無盡。是也。論理則圓又為眾界形之本。蓋眾界形。或函圖。或函於圖。其邊皆當弧線之度。故求眾界形者。必以圖界為宗也。然自眾界形之中心分之。則又各成三角形。皆以勾股為準。則故勾股三角形。雖為面。而不囿於面之中。却別立一章焉。要之眾界形。邊求積者。歸之勾股。積求邊者。歸之正方。引而伸之。觸類而長之。凡為面形者。不能違是也。

直線面形

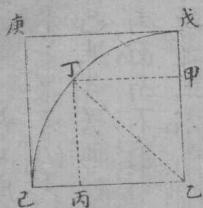
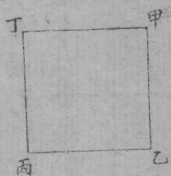
設如正方形。每邊五十尺。問對角斜線幾何。



法以方邊五十尺。自乘得二千五百尺。倍之得五千尺。開方得七十尺七寸一分零六豪有餘。即對角斜線也。如圖。甲乙丙丁正方形。其甲乙乙丙丙丁丁甲。每邊皆五十尺。甲丙為對角斜線。甲乙為股。則乙丙為勾。乙丙為股。則甲乙為勾。因甲乙與乙丙相等。可互為勾股。故以一邊自乘倍之。開方得弦。即如各自乘相併開方得弦也。若有對角斜線求方邊。則

以對角斜線自乘。折半開方。即正方形之每一邊也。蓋甲丙弦自乘方。與甲乙股乙丙勾兩自乘方等。今以甲丙弦自乘折半。則必與甲乙或乙丙自乘方等。故開方得每一邊也。

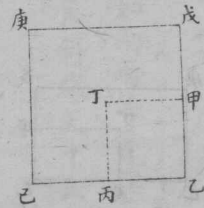
設如正方形。每邊二尺。今將其積倍之。問得方邊幾何。



法以每邊二尺自乘得四尺倍之得八尺。開方得二尺八寸二分八釐四豪有餘。即方邊也。如圖。甲乙丙丁正方形。每邊二尺。其積四尺。倍之得八尺。即如戊乙已庚正方形。其每邊即甲乙丙丁正方形之對角斜線。試於戊乙已庚正方形內作甲乙丙丁正方形。以乙為心。戊為界。作戊己弧。與丁角相切。則丁乙與己乙皆為半徑。其度相等。蓋丁乙對角斜線自乘為甲乙邊自乘之二倍。故戊乙已庚正方形。即為甲乙丙丁正方形之二倍。而戊甲丁丙已庚磬折形積。即與甲乙丙丁正方形積相等也。

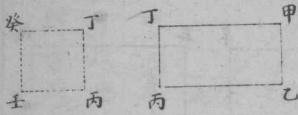
設如正方形。每邊二尺。今將其積四倍之。問得方邊幾何。

法以每邊二尺倍之得四尺。即所求方邊也。如圖。甲乙丙丁正方形。每邊二尺。其積四尺。四倍之得一十六尺。即如戊乙已庚正方形。其每邊得甲乙丙丁正方形

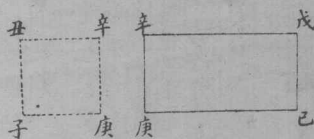


形每邊之二倍。是故不用四倍其積開方。止以每邊二尺倍之而即得也。蓋以戌乙己庚正方積一十六尺。與甲乙丙丁正方積四尺比。為四分之一。而戌乙己庚正方邊四尺。與甲乙丙丁正方邊二尺比。為二分之一。夫十六與八與四。四與二。皆為二分之一之連比例。而十六與四比。其間隔八一位。此為連比例隔一位相加之比例也。

設如長方形。長十二尺。闊八尺。今將其積倍之。仍與原形為同式形。問得長闊各幾何。

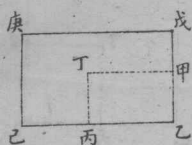


法以闊八尺自乘。得六十四尺。倍之。得一百二十八尺。開方得一十一尺三寸一分三釐七豪有餘。即所求闊。乃以原闊八尺為一率。原長十二尺為二率。今所得闊一十一尺三寸一分三釐七豪有餘。為三率。求得四率一十六尺九寸七分零五豪有餘。即所求長也。或以長十二尺自乘。倍之。開方。亦得一十六尺九寸七分零五豪有餘。為所求長。如圖。甲乙丙丁長方形。甲乙闊八尺。甲丁長十二尺。將其積倍之。即如戌



已庚辛長方形。此兩長方積之比例。即同於其相當二界各作一正方積之比例。故依甲乙丙丁長方形之丁丙闊界作丁丙壬癸正方形。將其積倍之。即如戊己庚辛長方形之辛庚闊界所作之辛庚子丑正方形。故開方得辛庚為所求闊也。既得辛庚闊。則以甲乙與甲丁比。即同於戊己與戊辛比。得戊辛為所求長也。若以原長自乘倍之。開方即如以二長界各作一正方形互相為比例也。

設如長方形長十二尺闊八尺。今將其積四倍之。仍與原形為同式形。問得長闊各幾何。

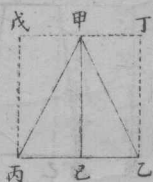


法以闊八尺倍之。得十六尺。即闊。又以長十二尺倍之。得二十四尺。即長也。如圖。甲乙丙丁長方形。甲乙闊八尺。甲丁長十二尺。將其積四倍之。即如戊己庚辛長方形。其每邊得甲乙丙丁長方形每邊之二倍。是故不用四倍其積開方止以各邊之數倍之而即得也。

設如三角形積三千尺。底闊十八尺。問中長幾何。

法以積三千尺倍之。得六千尺。用底闊八十尺除之。得七十五尺。即中長也。如圖。

甲乙丙三角形。其積倍之。成丁乙丙戊長方形。乙丙為底闊。故以底闊除長方積。得甲乙為中長也。

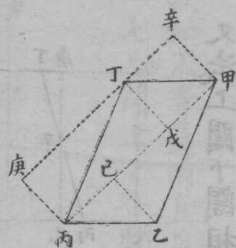


設如兩兩等邊無直角斜方形。

一目象

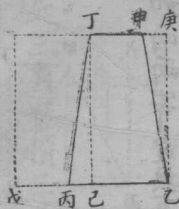
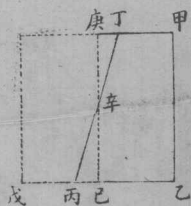
小邊皆二十五丈。大邊皆三十九丈。對兩小

角斜線五十六丈。問積幾何。



法以對角斜線分斜方形為兩三角形算之。以對角斜線五十六丈為底。大邊三十九丈。小邊二十五丈。為兩腰。用三角形求中垂線法。求得中垂線十五丈。乃以對角斜線五十六丈與中垂線十五丈相乘。得八百四十丈。即斜方形積也。如圖甲乙丙丁斜方形。甲丁乙丙二小邊皆二十五丈。甲乙丁丙二大邊皆三十九丈。甲丙對兩小角斜線五十六丈。今以甲丙斜線分甲乙丙丁斜方形為甲乙丙甲丁丙兩三角形。俱以甲丙為底。甲丁與丁丙為兩腰。求得丁戊或乙戊皆為中垂線。故以甲丙斜線與丁戊垂線相乘。所得甲丙庚辛長方形。比甲丁丙三角形積大一倍。而甲乙丙丁斜方形。亦函兩三角形積。故所得甲丙庚辛長方形與甲乙丙丁斜方形積相等也。

設如不等邊兩直角斜方形。直角之邊長五十丈。上闊二十丈。下闊二十八丈。問積幾何。

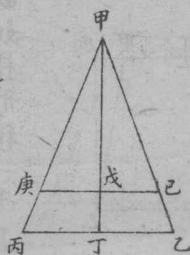


又法。上闊下闊相併。與長相乘。得數折半。即斜方形積也。蓋前法上闊下闊相加折半。而後與長相乘。此法則上闊下闊相加。即與長相乘。而後折半。其理一也。設如梯形。長三十丈。上闊十二丈。下闊二十丈。問積幾何。

法以上闊十二丈與下闊二十丈相加。得三十二丈。折半得十六丈。與長三十丈相乘。得四百八十丈。即梯形積也。如圖甲乙丙丁梯形。以上闊甲丁與下闊乙丙相加。得乙戊。折半為乙己。與丁己長相乘。遂成庚乙己丁長方形。其梯形外所多之甲庚乙己勾股形。與梯形內所少之丁己丙勾股形積等。故所得庚乙己丁長方形。即甲乙丙丁梯形積也。

又法。以上闊下闊相併。與長相乘。得數折半。即梯形積也。

設如三角形。中長二百尺。底闊一百五十尺。從上截長一百二十尺。問截闊幾何。



法以中長二百尺為一率。底闊一百五十尺為二率。截長一百二十尺為三率。求得四率九十尺。即截闊也。如圖。甲乙丙三角形。甲丁中長二百尺。乙丙底闊一百五十尺。甲戊為截長一百二十尺。而甲丁與乙丙比。即同於甲戊與己庚比也。如以截闊求截長。則以底闊為一率。中長為二率。截闊為三率。所得四率。即截長也。

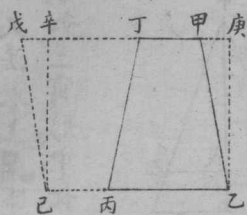
設如不等邊兩直角斜方形。長九十尺。上闊二十尺。下闊三十八尺。從中截闊二十七尺。問上下各截長幾何。



法以上闊二十尺與下闊三十八尺相減。餘一十八尺。為一率。長九十尺為三率。以上闊二十尺與截闊二十七尺相減。餘七尺為二率。求得四率三十五尺。即所截上長。以與總長九十尺相減。餘五十五尺。即所截下長也。如欲先得所截下長。則仍以上闊二十尺與下闊三十八尺相減。餘一十八尺為一率。長九十尺為二率。截闊二十七尺與下闊三十八尺

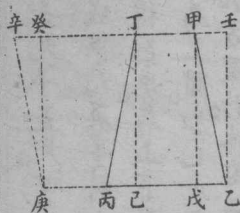
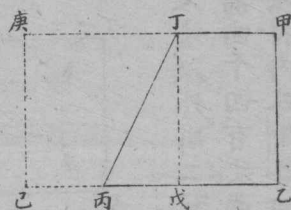
相減餘一十一尺為三率求得四率五十五尺即所截下長也如圖甲乙丙丁斜方形甲乙為長九十尺與丁戊等乙丙為下闊三十八尺甲丁為上闊二十尺與乙戊等己庚為截闊二十七尺上闊與下闊相減餘戊丙十八尺上闊與截闊相減餘辛庚七尺而戊丙與丁戊比即同於辛庚與丁辛比也又上闊與下闊相減餘戊丙十八尺截闊與下闊相減餘壬丙十一尺而戊丙與丁戊比又同於壬丙與庚壬比也如有所截上長或所截下長求截闊則以總長為一率上下闊相減所餘為二率截長為三率求得四率有上截長則與上闊相加有下截長則與下闊相減所得即截闊也

設如梯形積一千五百尺下闊四十尺中長五十尺問上闊幾何



法以積一千五百尺倍之得三千尺用長五十尺除之得六十尺為上下兩闊和內減下闊四十尺餘二十尺即上闊也如圖甲乙丙丁梯形倍之成甲乙己戊斜方形試將己角取直作己辛線則截斜方形一段為己辛戊勾股形如以己辛戊勾股形移補於甲庚乙遂成庚乙己辛長方形其積原與甲乙己戊斜方形等今用庚乙中長除之得乙己即上下兩闊和內減乙丙下闊所餘丙己與甲丁等即上闊也

設如不等邊兩直角斜方形。積九千六百尺。長一百二十尺。上下兩闊較四十尺。問上下闊各幾何。



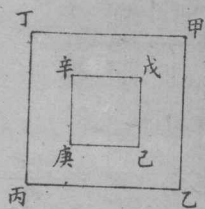
設如梯形。積六千六百五十尺。長九十五尺。上下兩闊之較二十尺。問上下闊各幾何。

法以積九千六百尺倍之。得一萬九千二百尺。用長一百二十尺除之。得一百六十尺。為上下兩闊和。內減上下兩闊較四十尺。餘一百二十尺。折半得六十尺。為上闊。加上下兩闊較四十尺。得一百尺。即下闊也。如圖。甲乙丙丁斜方形。其甲乙長一百二十尺。甲丁上闊與乙丙下闊之較。戊丙四十尺。試將原積倍之。成甲乙己庚長方形。故以甲乙長除之。得乙己為上下兩闊和。內減戊丙上下兩闊較。餘折半。得乙戊與甲丁等。為上闊。加戊丙較。得乙丙為下闊也。

法以積六千六百五十尺倍之。得一萬三千三百尺。用長九十五尺除之。得一百四十尺。為上下兩闊和。內減上上兩闊較二十尺。餘一百二十尺。折半得六十尺。為上闊。加上下兩闊較二十尺。得八十尺。為下闊也。如圖。甲乙丙丁梯形。甲戊

長九十五尺。甲丁上闊與乙丙下闊之較。乙戊與己丙共二十尺。試將原積倍之。成甲乙庚辛斜方形。與壬乙庚癸長方形積等。故以甲戊長除壬乙庚癸長方形。得乙庚。為上下兩闊和。內減乙戊與己丙上下兩闊較。餘折半得戊己與甲丁等。為上闊。加乙戊與己丙上下兩闊較。得乙丙為下闊也。

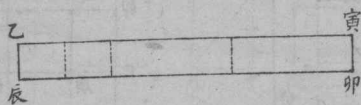
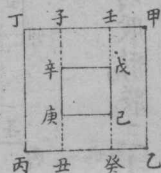
設如方環形。外周二百八十丈。內周一百二十丈。問積幾何。



法以外周二百八十丈四歸之得七十丈。自乘得四千九百丈。又以內周一百二十丈四歸之得三十丈。自乘得九百丈。兩自乘數相減。餘四千丈。即方環積也。如圖。甲乙丙丁外。周二百八十丈。四歸之得甲乙之一邊。自乘得甲乙丙丁大方積。戊己庚辛內。周一百二十丈。四歸之得戊己之一邊。自乘得戊己庚辛小方積。兩方積相減。所餘即方環積也。

又法以外周二百八十丈自乘。得七萬八千四百丈。內周一百二十丈自乘。得一萬四千四百丈。兩數相減。餘六萬四千丈。以十六除之。得四千丈。即方環積也。前法將內外周各四歸之。得內外方邊。故以內外方邊各自乘相減。得方環積。此法即以內外周各自乘相減。以十六除之。得方環積也。蓋內外周為內外方邊之四倍。內外周自乘之積。大十六倍。凡方邊大一倍。則面積大四倍。今是以兩周各自

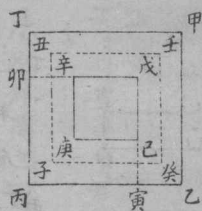
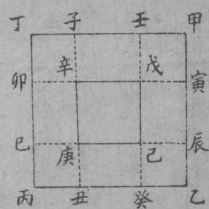
乘相減之積。比兩方邊各自乘相減之積。亦大十六倍也。



又有方環積。求外方邊至內方邊之闊。則以外周二百八十丈。與內周一百二十丈相加。得四百丈。折半得二百丈。以除方環積四千丈。得二十丈。即外方邊至內方邊之闊也。如圖。自方環內邊作壬癸子丑二線。則甲乙癸壬子丑丙丁。為外方邊與闊相乘之二長方。壬戌辛子。己癸丑庚。為內方邊與闊相乘之二長方。引而長之。成寅卯辰巳一長方。其長即半外周與半內周之和。其闊即外方邊至內方邊之闊。故以外周與內周相併折半。除方環積。得外方邊至內方邊之闊也。又法。以內方邊三十丈。與外方邊七十丈相減。餘四十丈。折半得二十丈。亦即外方邊至內方邊之闊也。如圖。甲丁為外方邊。減與戌辛內方邊相等之壬子。餘甲壬與子丁。折半得甲壬。即方環之闊也。

設如方環積四千尺。闊二十尺。求內外方邊各幾何。

法以闊二十尺自乘得四百尺。四因之。得一千六百尺。與環積四千尺相減。餘二

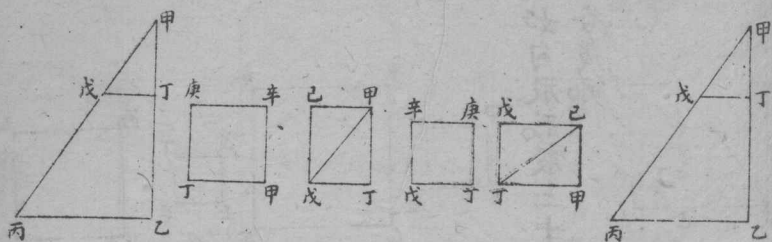


千四百尺。四歸之。得六百尺。以闊二十尺除之。得三十尺。即內方邊。又以闊二十尺倍之。得四十尺。加內方邊三十尺。得七十尺。即外方邊也。如圖。甲乙丙丁。戊己庚辛。方環形。內減甲寅戊壬。辰乙癸巳。子辛卯丁。庚丑丙巳。闊自乘之。四正。方餘寅辰己戊。辛庚己卯壬戌辛子。己癸丑庚。四長。方四歸之。得寅辰己戊一長。方其闊即方環之闊。其長即方環內邊之長。故以寅戌闊除之。得戊己為內方邊也。

又法。置環積四千尺。以闊二十尺除之。得二百尺。四歸之。得五十尺。加闊二十尺。得七十尺。即外方邊。於五十尺內減闊二十尺。餘三十尺。即內方邊也。如圖。甲乙丙丁。戊己庚辛。方環積。以闊除之。即得壬癸子丑。為內周外周相併折半之中數。以四歸之。即得壬癸一邊與戊寅等。故加闊得外邊。減闊得內邊也。

設如勾股形。股三十六尺。勾二十七尺。從上截勾股形積五十四尺。問截長闊各幾何。

法以股三十六尺為一率。勾二十七尺為二率。截積五十四尺倍之。得一百零八

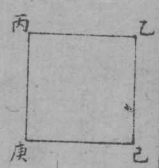
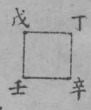
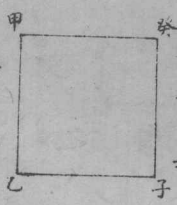
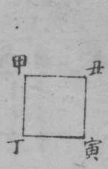
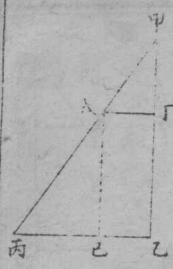


尺為三率。求得四率八十一尺。開方得九尺。即所截上截勾股形之截闊。既得截闊。則以勾二十七尺為一率。股三十六尺為二率。截闊九尺為三率。求得四率十二尺。即截長也。此法一率與二率為線與線之比例。三率與四率為面與面之比例也。如圖。甲乙丙勾股形。甲乙為股三十六尺。乙丙為勾二十七尺。甲丁戊勾股形為截積五十四尺。是故甲乙與乙丙比。應同於甲丁與丁戊比。然無甲丁。故將截積倍之。為甲丁丁戊相乘積。則甲乙與乙丙比。必同於甲丁丁戊相乘積。與丁戊自乘積比。蓋截積倍之。成已甲丁戊長方形。丁戊自乘積。為內直角方形。其面之互相為比。故開方得丁戊為截闊也。又乙丙與甲乙比。即同於丁戊與甲丁比。而得甲丁為截長也。若先求截長。則以勾二十七尺為一率。股三十六尺為二率。倍截積一百零八尺為三率。求得四率一百四十四尺。開方得十二尺。為截長。蓋乙丙與甲乙比。同於丁戊與甲丁比。亦必同於丁戊甲丁相乘積與甲丁自乘積比。截積倍之。成甲丁自乘積。甲丁庚辛正方形。此二形之面互相為比。亦同於其底之互相為比也。故開方得甲丁為截

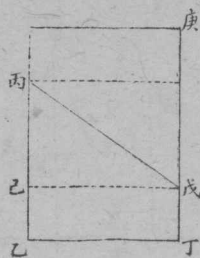
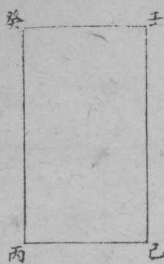
長也。既得截長。則用比例四率求之。亦得截闊矣。

又法。以勾二十七尺與股三十六尺相乘。折半得勾股積四百八十六尺。為一率。所截之勾股形積五十四尺。為二率。勾二十七尺自乘。得七百二十九尺。為三率。求得四率八十一尺。開方得九尺。為截闊。若以股三十六尺自乘。得一千二百九十六尺。為三率。則得四率一百四十四尺。開方得十二尺。為截長也。如圖。甲乙丙勾股形。截甲丁戊勾股形。積五十四尺。此兩勾股形為同式形。故甲乙丙之勾股積與甲丁戊勾股積比。同於乙丙勾自乘之乙己庚丙方與丁戊勾自乘之丁辛壬戊方比。亦必同於甲乙股自乘之癸子乙甲方與甲丁股自乘之丑寅丁甲方比也。

設如勾股形。股三十六尺。勾二十七尺。從下截斜方形。積四百三十二尺。問截長闊各幾何。



法以股三十六尺為一率。勾二十七尺為二率。截積四百三十二尺。倍之。得八百六十四尺。為三率。求得四率六百四十八尺。乃以勾二十七尺自乘。得七百二十九尺。內減所得四



率六百四十八尺。餘八十一尺。開方得九尺。為截闊。既得截
 闊。則以勾二十七尺為一率。股三十六尺為二率。截闊九尺
 與勾二十七尺相減。餘一十八尺為三率。求得四率二十四
 尺。即截長也。此法亦係線與線為比。面與面為比也。如圖。甲
 乙丙勾股形。甲乙為股三十六尺。乙丙為勾二十七尺。丁乙
 丙戊斜方形為截積四百三十二尺。其甲乙與乙丙比。應同
 於戊己。即丁乙與己丙比。然無戊己。故將截積倍之。成戊己長
 與丁戊。乙丙兩闊和相乘積。以此為三率。所得四率。即丁戊
 乙丙兩闊較。即己丙與丁戊。乙丙兩闊和相乘積也。蓋截積倍
 乙辛長方形。己丙兩闊較與兩闊和相乘。成壬己丙癸長庚丁
 形。此二長方形。同以兩闊和為長。故丁乙與己丙比。即如庚
 丁乙辛長方形。與壬己丙癸長方形比也。又己丙兩闊較。與丁戊。乙丙兩闊和相
 乘之積。與丁戊。乙丙兩闊各自乘相減之積等。試依乙丙度
 作子丑寅卯大方形。又依丁戊度作子辰巳午小方形。兩方
 形相減。餘為辰丑寅卯午巳磬折形。引而長之。成辰丑申未
 長方形。其辰丑即兩闊較。其丑申即兩闊和。故所得四率與
 辰丑寅卯午巳磬折形積等。今於乙丙自乘之子丑寅卯大