场论题解（上）

CHANG LUN TI JIE

温家和解编

桂林冶金地质学院

场论题解(上)

温家和　解编

桂林冶金地质学院

前　言

本习题解是和《场论》上册（张秋光编，地质出版社出版）配套的，题解和书上内容配合，便于理解。

本习题解是在张秋光副教授指导下，桂林冶金地质学院物探系领导和老师大力支持下的结果。

何绍渊讲师审阅了全稿，并提出了宝贵的修改意见。农月华工程师清绘了书上所有图件。

对上面的领导和老师的帮助，编者表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，错误和缺点一定不少，衷心欢迎读者批评指正。

编　者

一九八五年二月

目　录

第一章　矢场分析

习题 1　$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$相当于标量场$\varphi(x,y,z)$沿什么方向的方向导数？$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$可否看成$\varphi(x,y,z)$沿某一方向的方向导数？

解：$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$相当于标量场$\varphi(x,y,z)$沿x轴正方向的方向导数；

$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$相当于标量场$\varphi(x,y,z)$沿x轴反方向的方向导数。

习题2　计算：

(1) 标量场$u=x^2y-y^2z-xyz$在(1,-1,0)点沿矢量$\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$的方向导数；

(2) 标量场$\varphi=xyz$在(1,2,3)点沿从(1,2,3)到(1,-1,-3)方向的方向导数；

(3) 标量场$\psi=x^2+y^2+z^2$在(1,2,3)点沿直线$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$的方向导数。

解：(1) $\text{grad}u(x,y,z)=(2xy-yz)\vec{i}+(x^2-2yz-xz)\vec{j}+(-y^2-xy)\vec{k}$

$$\text{grad}u(1,-1,0)=-2\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{l}_0=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_p=\text{grad}u(p)\cdot\vec{l}_0=\frac{1}{\sqrt{6}}\quad(-2-1)\quad=-\frac{\sqrt{6}}{2};$$

(2) $\text{grad}\varphi(x,y,z)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$

$$\text{grad}\varphi(1,2,3)=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\vec{l}=-3\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\vec{l}_0=-\frac{1}{3\sqrt{5}}\left(3\vec{j}+6\vec{k}\right)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_p\cdot\vec{l}_0=-\frac{1}{3\sqrt{5}}(9+12)=-\frac{7}{5}\sqrt{5};$$

(3) $\text{grad}\psi(x,y,z)=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$

$$\text{grad}\psi(1,2,3)=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\vec{l} = \pm(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{l}_0 = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_p = \text{grad}\varphi\Big|_p \cdot \vec{l}_0 = \pm\frac{26}{5}\sqrt{2}.$$

习题3 已知标量场$\varphi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$，

(1) 写出其梯度场的表示式；

(2) 求它在P(-1,-2,-3)点的梯度矢量、最速变化方向以及方向导数的最大值；

(3) 计算它在P点分别沿$\overrightarrow{PO}$及$\overrightarrow{OP}$方向的方向导数，O为坐标原点。

解：(1) $\text{grad}\varphi = (2x + y + 3)\vec{i} + (4y + x - 2)\vec{j} + (6z - 6)\vec{k}$；

(2) $\text{grad}\varphi(-1,-2,-3) = -\vec{i} - 11\vec{j} - 24\vec{k}$；

最速变化方向就是P点的梯度矢量的方向，设其与x轴、y轴和z轴方向的夹角之余弦分别为$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$；则

$$\cos\alpha = \frac{-1}{|\text{grad}\varphi(-1,-2,-3)|} = -0.038$$

$$\cos\beta = \frac{-11}{|\text{grad}\varphi(-1,-2,-3)|} = -0.416$$

$$\cos\gamma = \frac{-24}{|\text{grad}\varphi(-1,-2,-3)|} = -0.909$$

$\alpha = 92.17°$，$\beta = 114.60°$，$r = 155.29°$，

方向导数的最大值$= |\text{grad}\varphi(-1,-2,-3)| = \sqrt{698}$；

$$(3)\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial(OP)} = \text{grad}\varphi(p)\cdot\vec{l}_0$$

$$= \left(-\vec{i} - 11\vec{j} - 24\vec{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\left(-\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$$

$$= \frac{95}{14}\sqrt{14};$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial(PO)} = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial(PO)} = -\frac{95}{14}\sqrt{14}.$$

习题4 给定二元函数（平面场）$\varphi = x^2 - xy + y^2$，试问在(1,1)点沿什么方向其导数有最大值，沿什么方向其导数有最小值，沿什么方向其导数为零？最大及最小的方向导数值分别等于多少？

解：由于$\text{grad}\varphi(1,1) = \vec{i} + \vec{j}$，所以沿$(\vec{i} + \vec{j})$方向其方向导数有最大值，沿

$-(\vec{i}+\vec{j})$ 方向 其方向导数有最小值，沿 $\pm(\vec{i}-\vec{j})$ 方向其方向导数为零。最大及最小的方向导数值分别是 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$。

习题 5　已给标量场 $\varphi = \ln\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$。试问在空间的哪些点，下面等式成立：

$$|\mathrm{grad}\varphi| = 1.$$

解：$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\mathrm{grad}r = r\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{r}_0 = -\frac{\vec{r}_0}{r}$

$$|\mathrm{grad}\varphi| = \frac{1}{r} = 1$$

即 $r=1$ 处等式恒成立。

习题 6　求标量场

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

在点A(1,2,2) 及点B(−3,1,0) 的梯度之间的夹角 θ。

解：$\mathrm{grad}u = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{i} + \frac{-2yx\vec{j}}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-2xz\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$$\mathrm{grad}u|_{(1,2,2)} = \frac{1}{81}\left(7\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}\right),$$

$$\mathrm{grad}u|_{(-3,1,0)} = \frac{1}{50}\left(-4\vec{i}+3\vec{j}\right),$$

$$\mathrm{grad}u\Big|_A\cdot\mathrm{grad}u\Big|_B = \frac{1}{81\times 50}(-28-12) = -\frac{4}{405},$$

$$\left|\mathrm{grad}u(A)\right|\cdot\left|\mathrm{grad}u(B)\right| = \frac{\sqrt{81}}{81}\cdot\frac{5}{50} = \frac{1}{90},$$

$$\cos\theta = -\frac{4}{405}\div\frac{1}{90} = -\frac{8}{9}$$

$\theta = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right)$ 及其补角。

习题 7　计算：

（1）标量场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $p(x,y,z)$ 沿向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 的方向导数；

（2）标量场 $u=u(x,y,z)$ 沿标量场 $v=v(x,y,z)$ 的梯度方向的方向导数。

解：（1）$\mathrm{grad}u = \frac{2x}{a^2}\vec{i}+\frac{2y}{b^2}\vec{j}+\frac{2z}{c^2}\vec{k}$

$$\vec{r}_0=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\mathrm{grad}u\cdot\vec{r}_0=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{2u}{r};$$

（2） $\mathrm{grad}v=\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}$,

$$|\mathrm{grad}v|=\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}$$

gradv的方向余弦分别是$\frac{\partial v}{\partial x}\Big/|\mathrm{grad}v|$, $\frac{\partial v}{\partial y}\Big/|\mathrm{grad}v|$和$\frac{\partial v}{\partial z}\Big/|\mathrm{grad}v|$,

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

u沿gradv方向的方向导数：

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}。$$

习题 8　证明：

（1） $\mathrm{grad}(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1\mathrm{grad}\varphi_1+\alpha_2\mathrm{grad}\varphi_2$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$为常量；

(2) $\mathrm{grad}F(\varphi_1,\varphi_2\cdots,\varphi_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\mathrm{grad}\varphi_i$

证明： (1) $\mathrm{grad}(\alpha_1\varphi+\alpha_2\varphi_2)=\frac{\partial}{\partial n}(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)\vec{n}_0$

$$=\alpha_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\vec{n}_0+\alpha_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\vec{n}_0=\alpha_1\mathrm{grad}\varphi_1+\alpha_2\mathrm{grad}\varphi_2$$

（其中，$\vec{n}_0$为梯度方向的单位矢量）

（2） $\mathrm{grad}F(\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_n)=\frac{\partial F}{\partial n}\vec{n}_0=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\vec{n}_0+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\vec{n}_0+\cdots\cdots+$

$$+\frac{\partial E}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\vec{n}_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\vec{n}_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\mathrm{grad}\varphi。$$

（其中，$\vec{n}_0$为梯度方向的单位矢量）

习题 9　证明：

1．$\mathrm{grad}\,r^n = n r^{n-2}\vec{r}$

2．$\mathrm{grad}\left\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\right\} = 2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c}) - 2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})$，其中$\vec{c}$为常矢量，$\vec{r}$是从原点(0,0,0)到观测点$p(x,y,z)$的位置矢量。

证明：（1）$\mathrm{grad}\,r^n = \dfrac{\partial r^n}{\partial r}\mathrm{grad}\,r = n r^{n-1}\dfrac{\vec{r}}{r} = n r^{n-2}\vec{r}$；

（2）$\mathrm{grad}\left\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\right\} = \mathrm{grad}\{c^2r^2\sin^2\theta\}$

$$= \mathrm{grad}(c^2r^2 - c^2r^2\cos^2\theta) = \mathrm{grad}\left[c^2r^2 - (\vec{c}\cdot\vec{r})^2\right]$$

$$= 2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c}) - 2(\vec{c}\cdot\vec{r})\mathrm{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$$

$$= 2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c}) - 2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r}).$$

习题10　已知$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$，通过直接求偏导数证明：

$$\mathrm{grad}'\frac{1}{r} = -\mathrm{grad}\frac{1}{r}.$$

证明：由于$-\mathrm{grad}\dfrac{1}{r} = \dfrac{x-x'}{r^3}\vec{i} + \dfrac{y-y'}{r^3}\vec{j} + \dfrac{z-z'}{r^3}\vec{k}$

$$\mathrm{grad}'\frac{1}{r} = \frac{x-x'}{r^3}\vec{i} + \frac{y-y'}{r^3}\vec{j} + \frac{z-z'}{r^3}\vec{k}$$

所以 $\mathrm{grad}'\dfrac{1}{r} = -\mathrm{grad}\dfrac{1}{r}$.

习题11　求曲面$x^2-y^2+z^2=6$在点(1,2,3)处的单位法向量。

解：作函数$\varphi=x^2-y^2+z^2$，则$\mathrm{grad}\varphi$指向φ增大方向且垂直于该处的等值面，

$$\mathrm{grad}\varphi = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\mathrm{grad}\varphi|_{(1,2,3)} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$|\mathrm{grad}\varphi(1,2,3)| = \sqrt{56}$$

所以，单位法向量为$\pm\dfrac{1}{\sqrt{56}}\left(2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}\right)$即$\pm\dfrac{\sqrt{14}}{14}(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})$。

习题12　求曲面$x^2+y^2=4z$上点(2,−4,5)处的切平面方程及法线方程。

解：作函数$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-4z$

$$\mathrm{grad}\varphi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 4\vec{k}$$

在点 $(2,-4,5)$ 处 $\text{grad}\varphi\Big|_{(2,-4,5)}=4\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$，故切平面方程为：

$$[(x-2)\vec{i}+(y+4)\vec{j}+(z-5)\vec{k}]\cdot[4\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}]=0$$

整理得：$x-2y-z=5$。

法线方程为：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+4}{-8}=\dfrac{z-5}{-4}$　　即

$$(x-2)=-\frac{1}{2}(y+4)=(5-z)。$$

习题13　求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $3x+2y+z=9$ 在交点 $(1,2,2)$ 处的法线的夹角。

解：作函数 $\varphi_1=x^2+y^2+z^2-9$　　则

$$\text{grad}\varphi_1=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$\text{grad}\varphi_1\Big|_{(1,2,2)}=2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\vec{n}_1=\frac{2}{\sqrt{36}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{36}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{36}}\vec{k};$$

作函数 $\varphi_2=3x+2y+z-9$，

同理可得 $(1,2,2)$ 点处 $\vec{n}_2=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$

设两曲面在交点 $(1,2,2)$ 处法线的夹角为 α，则有 $\cos\alpha=\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\dfrac{3}{14}\sqrt{14}$

所以　$\alpha=\arccos\dfrac{3}{14}\sqrt{14}$ 及其补角。

习题14　求曲面 $z=x^y$ 在点 $(2,2,4)$ 处的最大坡度。

解：$\text{tg}\alpha=\left|\dfrac{\partial z}{x\partial}\vec{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\right|=|yx^{y-1}\vec{i}+x^y\ln x\vec{j}|$

$$=|4\vec{i}+4\ln 2\vec{j}|=\sqrt{4^2+(4\ln 2)^2}=4.87$$

$\alpha=78°24'$。

习题15　给定平面场 $\varphi=x^2-y^2$

（1）描绘等值线族

$x^2-y^2=c$

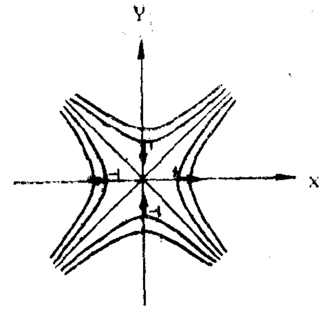
的图象，c 取0，±1，±2；

（2）计算在 $(1,0)$、$(-1,0)$、$(0,1)$、$(0,-1)$ 诸点的梯度，并用箭头标出这些梯度矢量的指向；

(3) 梯度矢量与等值线有何关系？

解：（1）等值线如图所示

（2）各点的梯度的模均为2，方向如图所示。



（3）梯度与等值线法向平行，并指向函数$\varphi = x^2 - y^2 - c$增大的方向。

习题16 求过点$p_0(x_0, y_0, z_0)$的等值面

$$u(x,y,z) = c$$

与非常接近它的等值面

$$u(x,y,z) = c + \Delta c$$

之间的距离。

解：在一级近似的条件下，$\Delta c \doteq \mathrm{grad}u \cdot \vec{l}$，$\vec{l}$为$u(x,y,z)$移动的距离，则

$$l = \frac{\Delta c}{|\mathrm{grad}u(p_0)|}.(\vec{l}\text{与等值面垂直})$$

习题17 就点源情况证明（20）式。

证明：已知$u = \frac{f_m}{r}$，则

$$\mathrm{grad}u = -\frac{f_m}{r^3}\vec{r} = \vec{G}。$$

所以 $\vec{G} = \mathrm{grad}u$成立。

习题18 已知平面静电场的电位

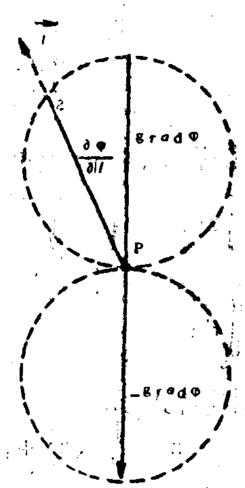
$$v = l_n\sqrt{x^2 + y^2} ,$$

试推出场强$\vec{E}$的表示式并具体算出点（2,4）处的场强$\vec{E}$（2,4）。

解：$\vec{E} = -\mathrm{grad}v = -\frac{\vec{r}_0}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\vec{r}}{r^2}$

$$(\text{其中} = \vec{r}(x\vec{i} + y\vec{j}))$$

$$\vec{E}(2,4) = -\frac{1}{20}(2\vec{i} + 4\vec{j}) = -0.1\vec{i} - 0.2\vec{j}。$$



习题19 研究标量场$\varphi(x,y,z)$时，如果以某一点p的梯度矢量gradφ为直径作一球面，同时以$-$gradφ为直径作另一球面（见图）试证明 φ在p点沿任一方向$\vec{l}$的方向导数等于沿该矢量方向所截得的弦长（如果与$-$gradφ为直径的球面相截，则弦长算负）。

证明：由于$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{l}_0$，$\mathrm{grad}\varphi$正好是园的直径，$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$就是园的直径在$\vec{l}$方向的投影即弦长。

当$\vec{l}_0$和$\mathrm{grad}\varphi$的夹角大于90°时，$-\mathrm{grad}\varphi$在$\vec{l}$方向的投影为负值，$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$亦等于弦长。

习题20 计算$\iint\limits_s(x-x^2y+3xz)\,ds$，s是以A(0,0,1) B(0,2,1)、C(1,0,1)为顶点的平面三角形域。

解：$\iint\limits_s(x-x^2y+z)ds$

$$=\iint\limits_{|D|}(x-x^2y+3xz)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}(x-x^2y+3x)dy$$

$$=\frac{19}{15}.$$

式中，$|D|$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$y=2-2x$。

习题21 求标量场$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上的第一类曲面积分。

解：$\iint\limits_s(x^2+y^2+z^2)ds=\iint\limits_s a^2ds=a^2\iint\limits_s ds=4\pi a^4$.

习题22 按以下公式计算均匀半球面s（其方程为$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant0$）的质心的竖坐标：

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_s zds}{\iint\limits_s ds}.$$

解：取球坐标系，$z=a\cos\theta$，$ds=a^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_s zds}{\iint\limits_s ds}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}a\cos\theta a^2\sin\theta d\theta d\varphi}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

习题23 求抛物面壳

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\qquad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量m。已知其面密度$\omega=z$。

解：$m=\iint\limits_{s}\omega ds=\iint\limits_{s}zds=\iint\limits_{s}\frac{1}{2}(x^2+y^2)ds$

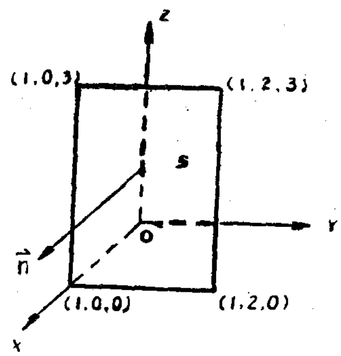
$$=\iint\limits_{|D|}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{|D|}\frac{1}{2}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi$$

$$=\int_0^1\frac{2\pi}{2}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=\frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})。$$

习题24　已知矢场$\vec{a}=\vec{xi}+(z^2-xz)\vec{j}-xy\vec{k}$；s为附图所示的平面域，试计算

$$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}。$$



解：$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot\vec{n}\,ds=\iint\limits_{s}xds$

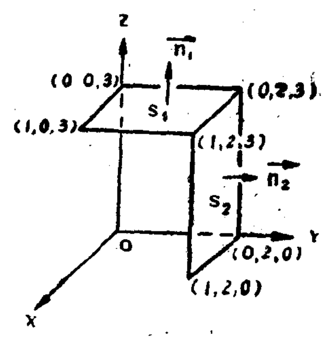
$$=\iint\limits_{s}1dydz=6。$$

习题25　给定矢场

$$\vec{a}=xyz(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}),$$

s(由s_1和s_2组成）及其法线方向如附图所示，求

$$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}。$$



解：$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{s_1}\vec{a}\cdot d\vec{s}+\iint\limits_{s_2}\vec{a}\cdot d\vec{s}$

$$=\iint\limits_{s_1}xyzds+\iint\limits_{s_2}xyzds$$

$$=\iint\limits_{s_1}3xydxdy+\iint\limits_{s_2}2xzdxdz=\frac{15}{2}。$$

习题26　设$\vec{a}=f(x)i+g(y)\vec{j}+h(z)\vec{k}$

s为平行六面体：$0<x<a$，$0<y<b$，$0<z<c$ 的外表面，计算$\oiint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}$。

解：$\oiint\limits_{s}\vec{a}\cdot d\vec{s}=\oiint\limits_{s}f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy$

由于$\oiint\limits_{s} f(x)dydz = f(a)bc - f(0)bc = \frac{f(a)-f(0)}{a}abc$,

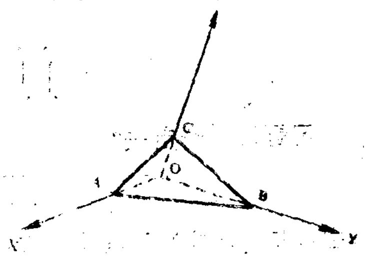
用同法可求出 $\oiint\limits_{s} g(y)dxdz = \frac{g(b)-g(0)}{b}abc$,

$$\oiint\limits_{s} h(z)dxdy = \frac{h(c)-h(0)}{c}abc,$$

$$\oiint\limits_{s} \vec{a}\cdot\vec{ds} = \left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(o)}{b} - \frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc。$$

习题27 已知$\vec{a} = (y^2-3xy)\vec{i} + x^2(y+2z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$; s是以A(1,0,0)、B(0,2,0)、C(0,0,1)为顶点的平面三角形域，其法线方向背离原点。试求$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot\vec{ds}$。

解：s面的方程可写成



$$z = 1 - \frac{1}{2}y - x$$

$$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \frac{1}{3}(y^2-3xy) + \frac{1}{3}x^2(y+2z) + \frac{2}{3}(x+z)$$

$$\iint\limits_{s}\vec{a}\cdot\vec{ds} = \iint\limits_{s}\frac{2}{3}(y^2-3xy)ds + \iint\limits_{s}\frac{1}{3}(y+2z)x^2ds + \iint\limits_{s}\frac{2}{3}(x+z)ds$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}\left\{\frac{2}{3}(y^2-3xy) + \frac{1}{3}x^2\left[y+2(1-x-\frac{1}{2}y)\right] + \frac{2}{3}\left[x+(1-x-\frac{1}{2}y)\right]\right\}\cdot$$

$$\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^{2(1-x)}(y^2-3xy)dxdy + \int_0^1\int_0^{2(1-x)}\frac{1}{2}x^2(2-2x)dxdy$$

$$+ \int_0^1\int_0^{2(1-x)}\left(1-\frac{1}{2}y\right)dxdy = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{2}{3} = \frac{9}{10}。$$

习题28　如果电场强度$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}_0$，在此情况下（场强与距离立方成反比）再一次求解例 9 。这时电通量Φ 与球半径R有无关系?

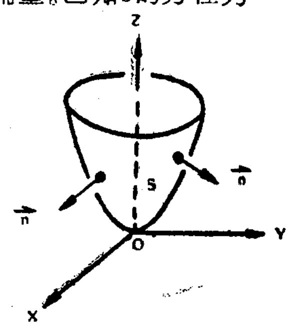
$$\text{解：}\Phi=\oint\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$=\oint\!\!\oint \frac{q}{r^3}\vec{r}_0\cdot d\vec{s}=\oint\!\!\oint_s \frac{q}{r^3}ds=\int_0^{2}\int_0^{\pi}\frac{q}{R^3}R^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{4\pi q}{R}$$

Φ与球面半径R成反比。

习题29　给定速度场$\vec{v}=(x+y+z)\vec{k}$，求穿过曲面s的流量。已知s的方程为 $z=x^2+y^2$（$0\leqslant z\leqslant 1$），法线方向如附图所示。



解：引入标量$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z$

$$\text{grad}\varphi=2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k},$$

s 的外法向量

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k})$$

$$\text{流量}=\iint_s \vec{a}\cdot d\vec{s}=\iint_{S_{xy}}(x+y+z)\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{S_{xy}}-(x+y+x^2+y^2)dxdy$$

$$=-\int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\rho^2)\rho d\rho d\theta=-\frac{\pi}{2}.$$

习题30　已知矢场$\vec{a}=xz\vec{i}-y^2\vec{j}+2x^2y\vec{k}$，求div$\vec{a}$。

$$\text{解：div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=z-2y.$$

习题31　求下列矢场在给定点的散度值。

（1）$\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}+xy(x+y+2z)\vec{k}$，p(1,1,1)；

（2）$\vec{a}=(x^2+y^2+z^2)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(xy^2-zy^2)\vec{k}$, Q $(2,1,-\frac{1}{2})$ ；

（3）$\vec{a}=xyz(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$，$M_1(1,2,3)$，$M_2(-1,-2,-3)$．

解：（1）$\operatorname{div}\vec{a}=2yz+2xz+2xy=2(xy+yz+xz)$

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(1,1,1)}=6;$$

（2）$\operatorname{div}\vec{a}=2x+3xz-y^2$

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(2,1,-\frac{1}{2})}=0;$$

（3）$\operatorname{div}\vec{a}=2yzx+2xyz+2xyz=6xyz$

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(1,2,3)}=36;$$

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_{(-1,-2,-3)}=-36。$$

习题32　试问a、b、c 应取何值，方能使矢场$\vec{F}=(axz+x^2)\vec{i}+(by+xy^2)\vec{j}+(z-z^2+cxz-2xyz)\vec{k}$处处无散？

解：$\operatorname{div}\vec{a}=az+2x+b+2xy+1-2z+cx-2xy=0$

即　$(a-2)z+(c+2)x+(b+1)=0$

所以　$a=2$，$c=-2$，$b=-1$为所求。

习题33　计算（$r\neq 0$）：

（1）$\operatorname{divgrad}r$，（2）$\operatorname{divgrad}\frac{1}{r}$，（3）$\operatorname{divgrad}f(r)$。

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

解：（1）$\operatorname{divgrad}r=\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{1}{r}\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}$

$$=\frac{3}{r}+\vec{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}=\frac{2}{r};$$

（2）$\operatorname{divgrad}\frac{1}{r}=\operatorname{div}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{3}{r^3}+\vec{r}\frac{3}{r^4}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=0;$

（3）$\operatorname{divgrad}f(r)=\operatorname{div}(f'(r)\vec{r}_0)=\frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r}$

$$=\frac{1}{r}\left[f''(r)\vec{r}+2f'(r)\right].$$

习题34 证明$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

证明：$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

习题35 设$\vec{c}$是常矢量，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，求证：

（1）$\mathrm{div}(r\vec{c})=\frac{1}{r}\vec{c}\cdot\vec{r}$；（2）$\mathrm{div}(\vec{r}\times\vec{c})=0$；

（3）$\mathrm{div}\left[(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n\right]\vec{r}=(n+4)(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n$.

证明：（1）$\mathrm{div}(r\vec{c})=r\,\mathrm{div}\vec{c}+\vec{c}\cdot\mathrm{grad}r=\frac{1}{r}\vec{c}\cdot\vec{r}$；

（2）$\mathrm{div}(\vec{r}\times\vec{c})=\mathrm{div}[(yc_z-c_yz)\vec{i}-(c_xz-c_zx)\vec{j}+(c_yx-c_xy)\vec{k}]=0$

（3）$\mathrm{div}[(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n]\vec{r}=[(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n]\mathrm{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\mathrm{grad}[(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n]$

$$=3(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n+\vec{r}\cdot[(\vec{c}\cdot\vec{r})nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}+r^n\vec{c}]$$

$$=3(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n+(\vec{c}\cdot\vec{r})nr^n+r^n(\vec{c}\cdot\vec{r})$$

$$=(n+4)(\vec{c}\cdot\vec{r})r^n。$$

习题36 证明：

$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v)=\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v+u\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}v$。

证明：$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v)=\mathrm{div}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+u\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+u\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2v}{\partial z^2}$$

$$=\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v+u\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}v。$$