

微积分讲义习题集

第三册

北京工业学院数学教研室

1980.1.

目 录

第十一章 多元函数的微分学 ~~~~~ 1

§ 11.1	多元函数的概念	1
§ 11.2	极限与连续	4
§ 11.3	偏导数	5
§ 11.4	复合函数的微分法	8
§ 11.5	隐函数微分法	11
§ 11.6	方向导数	13
§ 11.7	几何应用	13
§ 11.8	全微分的概念与应用	16
§ 11.9	多元函数的极值	19
§ 11.10	条件极值	19

第十二章 重积分 ~~~~~ 22

§ 12.1	二重积分的概念	22
§ 12.2	二重积分的性质	22
§ 12.3	二重积分在直角坐标系的计标法	23
§ 12.4	二重积分在极坐标系的计标法	28
§ 12.5	二重积分的应用	30
§ 12.6	三重积分的概念	30
§ 12.7	三重积分在直角坐标系的计标法	30
§ 12.8	三重积分在柱坐标系的计标法	30
§ 12.9	三重积分在球坐标系的计标法	30

第十三章 曲线积分与曲面积分 39

第十四章 级数 50

§ 14.1 数列的极限 50

§ 14.2 无穷级数的收敛性 53

§ 14.3 正项级数 57

§ 14.4 任意项级数 61

§ 14.5 Γ 级数 63

§ 14.6 泰勒公式 64

§ 14.7 泰勒级数 66

§ 14.8 Γ 级数的应用 67

§ 14.9 微分方程的级数解 69

第十五章 付里叶级数 70

第十一章 多元函数的微分学

§ 11.1 多元函数的概念

11.1 求 $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ 时函数 $z = \left[\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)} \right]^2$ 的值.

11.2 已知函数 $f(u, v) = u^v$, 试求 $f(xy, x+y)$.

11.3 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

11.4 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \operatorname{tg} \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

11.5 验证函数 $F(x, y) = \ln x \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

在题 11.6—11.15 中, 求各函数的定义域:

11.6 $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ 11.7 $z = \ln xy$.

11.8 $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ 11.9 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

11.10 $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$ 11.11 $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

11.12 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 11.13 $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

11.14 $z = \sqrt{x \sin y}$ 11.15 $z = \operatorname{ctg} \pi(x+y)$.

11.16 $z = xy + \sqrt{\ln \frac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

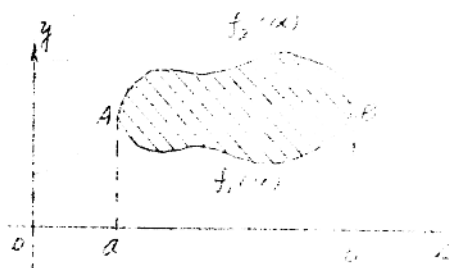
$$11.17 \quad z = \ln(x \ln(y-x)).$$

$$11.18 \quad u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2} \quad (R > r > 0).$$

11.19 如题所示, 曲线 L 围成平面域 D . 平行于 y 轴的直线切 L 于点 A, B (它们的横坐标分别为 a 和 b). 它们把 L 分为两段, 其方程分别为 $f_1(x) = 0$ 和 $f_2(x) = 0$. 问域 D 为什么可以用联立不等式

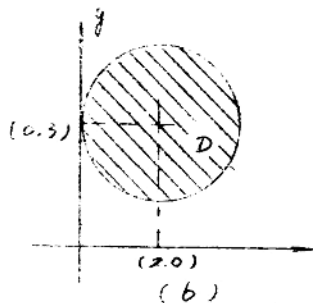
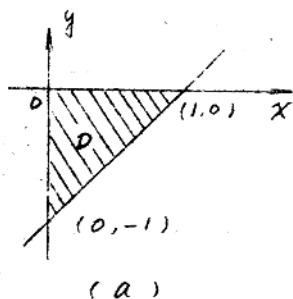
$$\begin{cases} f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

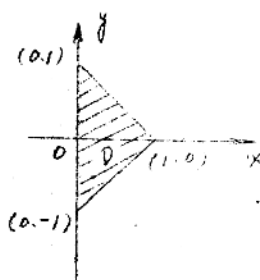
来表示?



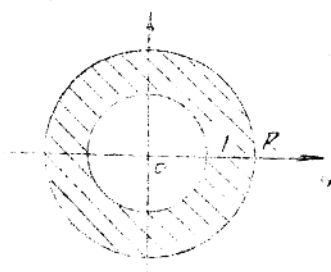
(11.19 题图)

11.20 用 11.19 题中形式的联立不等式表示下列图形中阴影部分的域:

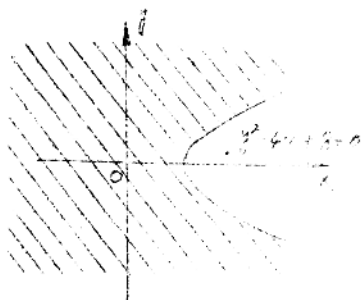




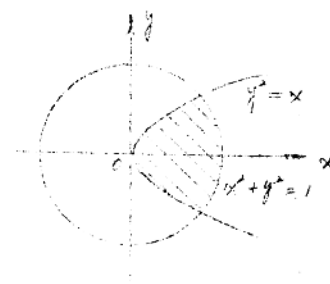
(c)



(d)



(e)



(f)

11.21 用11.19题的联立不等式表示下列平面域：

(a) $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 所围成的开域。

(b) $y = 0$, $y = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ 所围成的闭域。

(c) 位于第一象限的正三角形，三角形顶点之一在原点，一边在x轴上，边长为a。此三角形所围成的开域。

(d) 半径为R，始边为极轴，圆心角为 θ 的扇形开域。

11.22 用联立不等式表示下列各函数的定义域：

(a) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} - \sqrt{x-y}$, (b) $z = \arcsin \frac{x^2+y^2}{x}$.

$$(c) z = \frac{1}{\sqrt{y-3}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2}}$$

11.23 取 $z = -2, -1, 0, 1, 2$ 作下列函数的等值线:

$$(a) z = x^2 + y^2 - 3, \quad (b) z = x^2 - y^2;$$

$$(c) z = \frac{1}{x+y^2}.$$

11.24 取 $u = 1, 2, 3$ 作 $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 的等值面.

11.25 已知 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

11.26 已知 $f(x+y, x-y) = xy + y^2$, 求 $f(x, y)$.

11.26 $z = \ln x - \ln \sin y$ 与 $z = \ln \frac{x}{\sin y}$ 是否相同?

§ 11.2 极限与连续

11.28 总结二元函数的极限定义和性质与一元函数的相同和不同之处.

求下列极限 (11.29—11.36):

$$11.29 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$$

$$11.30 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

$$11.31 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$$

$$11.32 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$11.33 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)x^2y^2}$$

$$11.34 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2) \frac{1}{x^2+y^2}$$

11.35 证明：对于函数

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

有：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = -1$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 0 \\ y &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

11.36 验证当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $u = \frac{x+y}{x-y}$ 的极限不存在。

(x, y) 以怎样的方式趋于 $(0, 0)$ 能使 (a) $\lim u = 1$ 。

(b) $\lim u = 2$?

11.37 函数 $z = \frac{1}{x-y}$ 在何处是不连续的?

11.38 函数 $z = \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$ 在何处是不连续的?

§ 11.3 偏导数

11.39 已知 $z = xy$ ，求在点 $(1, 0, y)$ 处的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

11.40 已知 $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ (a 为常数) 而 $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ 。

求 $\frac{dz}{dx}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，并比较 $\frac{dz}{dx}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的求法和结果。

1141 求下列函数的偏导数

$$(a) z = 3x + \frac{4}{y} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{y}{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \lg 5.$$

$$(b) z = \frac{y}{x}.$$

$$(c) z = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$(d) z = \cos(xy).$$

$$(e) z = e^{-x} \sin y.$$

$$(f) z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$(g) z = \arctg \frac{x}{y} + \arcsin y.$$

$$(h) z = x e^{-x^2 y}.$$

$$(i) z = xy \ln(x+y).$$

$$(j) u = \rho e^{x+y} + e^{-x^2+y} + t.$$

$$(k) u = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

$$(l) u = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + z \quad (m) u = x e^{\pi x y z}.$$

$$1142 \text{ 设 } f(x, y) = \sqrt{x^2 - 3y^2}, \text{ 求 } f'_x(1, 0) \text{ 和 } f'_y(1, 0).$$

$$1143 \text{ 设 } z = \ln(x + \frac{y}{2x}), \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1, 0)}.$$

$$1144 \text{ 设 } u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}, \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(0, 0, \frac{\pi}{4})}.$$

$$1145 \text{ 设 } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \text{ 计算}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

文选

$$1146 \text{ 设 } z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

11.47 设 $z = e^{\frac{x}{y}}$, 求证 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

11.48 设 $z = x y$, 求证 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

11.49 设 $T = \pi \sqrt{\frac{b}{g}}$, 求证 $\ell \frac{\partial T}{\partial \ell} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

11.50 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与横轴

的正向所成的角度是多少?

11.51 曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与

y 轴的正向所成的角度是多少?

11.52 二曲面 $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ 和 $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$ 与平面 $y = 2$

相交的曲线成什么角度?

求下列各函数的各个二阶偏导数 (11.53-11.58):

11.53 $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ 11.54 $z = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$

11.55 $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$ 11.56 $z = \arccos(xy)$

11.57 $z = y \ln x$ 11.58 $z = \sin^2(ax + by)$

11.59 $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ 求 $f''_{xy}(2, 1)$

11.60 $W = x^2 + y^2, z = 2xz, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = ?$

11.61 $z = e^{xy^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

11.62 $z = \ln(e^x + e^y)$ 验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$

11.63 验证: $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

11.64 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$

§11.4 复合函数的微分法

11.65 设 $z = x^2 y - xy^2$, 而 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$,

求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

11.66 设 $z = x^2 \ln y$ 而 $x = \frac{1}{2}u$, $y = 3u - 2v$,

求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

11.67 设 $z = \frac{y}{x}$, 而 $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

11.68 设 $z = e^{x-2y}$, 而 $x = \sin t$, $y = t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

11.69 设 $z = \arcsin(x-y)$, 而 $x = 3t$, $y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

11.70 设 $z = \arctan(x, y)$ 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

11.71 设 $z = \sqrt{3t + 2x^2 - y}$ 而 $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

11.72 $z = \frac{x^2}{y}$, 而 $x = u - 2v$, $y = v + 2u$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

11.73 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2 + 1}$, 而 $y = a \sin x$, $z = \cos x$,

求 $\frac{du}{dx}$.

11.74 $z = (2x + y)^{2x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

11.75 设 $z = x^x y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

11.76 若 $u = F(x, y)$, 而 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 求 $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

11.77 验证函数 $z = a \ln \frac{x}{y}$ 其中 $x = u+v$, $y = u-v$, 满足关系式 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

11.78 设 $z = xy + xF(x)$, 而 $x = \frac{y}{z}$, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

11.79 设 $z = u^v$, 而 u, v 均为 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11.80 设 $z = f(x^2 - y^2, x^2 y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

11.81 设 $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$, 验证 z 满足可微分方程.

验证: $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}$

11.82 设 $u = f(y + ax)$, f 是可微分函数, 验证:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial y}$ b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

11.83 设 $u = f(y + ax) + g(y - ax)$, f, g 是可微函数,

验证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

11.84 试证明零次齐次可微分函数 $z = F(\frac{y}{x})$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

11.85 设 $z = \frac{y^2}{3x} + y(xy)$, 验证: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

11.86 若函数 $f(x, y, z)$ 恒满足关系式 $f(tx, ty, tz) = tf$

$f(x, y, z)$ 称为 k 次齐次函数. 证明 k 次齐次函数 $f(x, y, z)$ 满足关系式

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f.$$

11.87 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明

$$\frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

11.88 设 $u = f(x, y)$, 而 $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$. 求证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'} \right)^2 \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.$$

11.89 设 $u = f(x, y)$ 而 $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$. 求证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

11.90 在函数 $u = f(x, y, z)$ 中,

(a) 令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$. 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(b) 再令 (a) 中 ρ, z, θ 依次为

$$\rho = r \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi, \quad \theta = \varphi. \quad \text{证明}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

11.91 设 $u = f(s) + g(t)$, 其中 $s = x - y$, $t = x + y$.

验证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

11.92 证明在微分方程 $z_{xx} + 2xy^2 z_x + 2(y-y^3)z_y + x^2 y^2 z = 0$ 中, 令 $x = uv, y = \frac{1}{v}$, 则方程的形式不变.

§ 11.5 偏微分方程方法

11.93 试述一元函数的隐函数微分法.

11.94 $\sin(x+y) - x^2 y = 0$, 求下列两种方法求 $\frac{dy}{dx}$.

(a) 两边求导数, (b) 用公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

在下列各题中求 $\frac{dy}{dx}$ (11.95 ~ 11.99):

11.95 $xy - \ln y = 0$ 11.96 $\sin y + e^y - 1/y = 0$.

11.97 $\arctg \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$ 11.98 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$.

11.99 $xy + \ln y + \ln x = 0$.

在下列各题中求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (11.100 ~ 11.106)

11.100 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$.

11.101 $e^z - xyz = 0$. 11.102 $x^2 + y^2 + z^2 - 2axy = 0$.

11.103 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$. 11.104 $z^2 y - xz^2 - 1 = 0$.

11.105 设 $xyz = a^2$, 求 $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2z$.

11.106 设 $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$.

11.107 证明由方程 $f(CU - aV - Cy - bz) = 0$ (f 为任意可微函数) 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

11.108 证明方程 $ax + by + cz = F(x^2 + y^2 + z^2)$ (F 是任意的可微分函数) 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

11.109 函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = y + (\frac{z}{y})$ 所确定, 证明

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

11.110 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 所确定, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

11.111 若 $F(x, y, z, u) = 0$, 且 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = 1$.

11.112 设 $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

11.113 设 $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, 求 y'' .

11.114 设 $e^{x+y} = xy$, 验证 $y'' = -\frac{y[(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

11.115 $y = \lg(x+y)$, 验证 $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}$.

11.116 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11.117 $e^z - xye^z = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.118 $z^3 - 2xz + y = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.119 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 由下列方程确定

$$\begin{cases} x + y + z + z^2 = 0, \\ x + y^2 + z + z^3 = 0 \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}.$$

11.120 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 由下列方程确定

$$\begin{cases} y^2 + x + x^3 + z = 1 \\ z + x^2 + 2x + 5y = 0 \end{cases} \quad \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}.$$

§11.6 方向导数

11.121 试求函数 $z = 3x^6 + xy + y^3$ 在点 $M(1, 2)$ 处沿 OX 轴的正向成 135° 角的方向上的导数.

11.122 试求函数 $z = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 1$ 在点 $M(3, 1)$ 处到点 $(6, 5)$ 的方向上的导数.

11.123 试求函数 $z = \arctan xy$ 在点 $M(1, 1)$ 处沿第一象限角平分线方向上的导数.

11.124 试求函数 $u = x^2y + z^2 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处分别沿坐标轴成 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的方向上的导数.

11.125 试求函数 $w = x^2y^2$ 在点 $A(5, 1, 2)$ 处到点 $B(9, 4, 14)$ 的方向上的导数.

11.126 试求 $z = \ln(e^x + e^y)$ 在坐标原点处沿 Ox 轴上的导数.

11.127 试求函数 $z = \ln(x+y)$ 在位于抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 $(1, 2)$ 处, 沿这个抛物线方向上的导数.

11.128 试求函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在位于圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上一点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 处, 沿这个圆周的方向上的导数.

§11.7 几何应用

空间曲线的切线及法平面

11.129 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在

点 $(\frac{\pi}{2}, 1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

11.130 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在点 $t=1$ 处的切线及法平面方程.

11.131 求 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线及法平面方程.

求下列曲线在所给点的切线和法平面方程 (11.132-11.136):

11.132 $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ 在任意点处.

11.133 $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x = y \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处.

11.134 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ 在点 $M(1, 1, 3)$ 处

11.135 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ 在点 $(-2, 1, 6)$ 处.

11.136 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一质点, 此点的切线是平行于平面 $x + 2y + z = 4$ 的.

11.137 证明曲线 $y = \psi(x), z = \varphi(x)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{dz}{dx}\big|_{x=x_0}}$$

$$(x-x_0) + \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} (y-y_0) + \frac{dz}{dx}\bigg|_{x=x_0} (z-z_0) = 0,$$

并求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.