

721485

3325

4642

航空高等院校教材

# 塑性力学与弹塑性断裂

杨南生 张志镇 官忠信 等编



5  
2

航空专业教材编目组

721485

3-25  
4642

3325

4642

# 塑性力学与弹塑性断裂

杨南生 张志镇 官忠信 等编

航空专业教材编审室

## 内 容 简 介

本书共两篇，上篇九章讲述塑性力学的基础内容，下篇四章介绍静态弹塑性断裂问题中的主要研究成果。  
本书可供航空、船舶、机械、土建等类强度计算专业的师生使用，也可供有关科技人员学习、参考。

**主审稿人** 赵旭生 臧修亮  
**责任编辑** 张其林

### 塑性力学与弹塑性断裂

杨南生 张志镇 官忠信 等编

航空专业教材编审室

西北工业大学印刷厂印装 内部发行

787×1092 1/16 印张 14.5 357千字

1984年4月第一版 1984年4月第一次印刷 印数 0001—1000册

统一书号：22133j 定价 1.50元

## 前 言

本书共两篇。前九章为上篇，讲述塑性力学的基础内容；后四章为下篇，介绍静态弹塑性断裂问题的主要研究成果。

上篇由张志镇同志编写，大部分章节曾经过使用，讲授主要内容约需50学时。

下篇是在杨南生同志的讲稿基础上，经一些同志整理后，再由杨南生、官忠信同志修改补充写成。这部分内容目前还处于探索发展阶段，作者虽曾着力收集最新资料以饷读者，但由于水平有限，漏误之处肯定不少，恳切希望读者指正。

参加下篇讲稿整理工作的同志有：张志镇（第十章），官忠信（第十一章及第十二章），田宗若（第十一章的部分），张剑英（第十章的部分及第十三章）。

书稿缮写和插图由楚康鸿、李俊凤、杨德康同志完成。

本书由北京工业学院赵旭生、藏修亮二同志主审；西北工业大学张其林、周维贤、于兴旺三同志负责校核。特此致谢。

编 者

一九八三年五月

# 目 录

## 上 篇

<b>第一章 引言</b> .....	1
§ 1—1 定义与研究对象.....	1
§ 1—2 发展简史.....	1
§ 1—3 两种基本实验资料.....	2
§ 1—4 弹塑性材料的简化假设.....	4
§ 1—5 应力应变曲线的经验公式.....	5
<b>第二章 弹性应力、应变状态</b> .....	7
§ 2—1 应力张量 斜面上的应力.....	7
§ 2—2 主应力 应力张量的不变量.....	8
§ 2—3 应力张量分解 应力偏张量.....	9
§ 2—4 八面体应力 等效应力.....	10
§ 2—5 应力圆 洛德参数.....	12
§ 2—6 应变张量 任意线素的应变.....	14
§ 2—7 主应变 应变张量的不变量.....	15
§ 2—8 应变张量分解 应变偏张量.....	16
§ 2—9 八面体应变 等效应变.....	17
§ 2—10 应变速度.....	19
§ 2—11 弹性应力应变关系.....	20
§ 2—12 塑性功的增量表达式.....	21
<b>第三章 屈服准则</b> .....	23
§ 3—1 一般原理.....	23
§ 3—2 应力空间 屈服曲面.....	23
§ 3—3 屈瑞斯加屈服准则.....	25
§ 3—4 米塞斯屈服准则.....	26
§ 3—5 屈瑞斯加与米塞斯屈服准则的实验证明.....	28
§ 3—6 加载方式 加载准则.....	30
§ 3—7 强化条件 加载曲面.....	30
§ 3—8 强化模型.....	31

<b>第四章 塑性应力应变关系</b> .....	35
§ 4—1 两类应力应变关系.....	35
§ 4—2 依留辛理论.....	35
§ 4—3 卸载定律.....	37
§ 4—4 汉基理论.....	38
§ 4—5 那达依理论.....	39
§ 4—6 理想塑性材料的增量理论.....	40
§ 4—7 强化材料的增量理论.....	42
§ 4—8 塑性力学基本方程.....	43
§ 4—9 普朗特—劳埃斯方程的实验验证.....	44
§ 4—10 增量理论的普遍形式.....	44
§ 4—11 塑性位势理论.....	47
§ 4—12 强化材料的塑性应变增量关系.....	49
§ 4—13 最大塑性功原理.....	50
<b>第五章 杆件弹塑性弯曲与扭转问题</b> .....	52
§ 5—1 直梁弹塑性纯弯曲.....	52
§ 5—2 直梁弹塑性横向弯曲.....	54
§ 5—3 直梁弹塑性挠度计算.....	56
§ 5—4 圆柱弹塑性扭转.....	61
§ 5—5 非圆截面柱体的塑性极限扭矩.....	63
<b>第六章 平面轴对称问题</b> .....	66
§ 6—1 内容提要和基本方程.....	66
§ 6—2 理想弹塑性材料环薄板.....	67
§ 6—3 强化弹塑性材料环薄板.....	72
§ 6—4 算例.....	76
§ 6—5 旋转圆盘.....	78
§ 6—6 厚壁圆筒.....	81
§ 6—7 承受内外压力的厚壁球形容器.....	83
<b>附录 函数表</b> .....	87
<b>第七章 理想刚塑性材料的平面应变问题</b> .....	91
§ 7—1 基本假设和基本方程.....	91
§ 7—2 滑移线场理论.....	92
§ 7—3 滑移线的几何性质.....	94
§ 7—4 应力边界条件.....	96
§ 7—5 滑移线场的简化图解法.....	97

§ 7—6	轴对称滑移线场	99
§ 7—7	双边带圆角切口板件的极限载荷	100
§ 7—8	滑移线场的数值解法	102
§ 7—9	速度场问题	104
§ 7—10	简单问题的速度场分析	106
§ 7—11	速度不连续与应力不连续问题	108
<b>第八章</b>	<b>极值定理及其应用</b>	<b>110</b>
§ 8—1	基本概念	110
§ 8—2	虚功率原理	110
§ 8—3	应力间断、速度间断对虚功率原理的影响	111
§ 8—4	下限定理	112
§ 8—5	上限定理	113
§ 8—6	解的唯一性定理	114
§ 8—7	上限定理的应用	115
§ 8—8	下限定理的应用	121
<b>第九章</b>	<b>弹塑性问题有限单元解法</b>	<b>126</b>
§ 9—1	平衡方程的建立与求解方法	126
§ 9—2	基于全量理论的割线模量法	128
§ 9—3	基于全量理论的组合模量法	130
§ 9—4	基于增量理论的变刚度法	133
§ 9—5	基于增量理论的初应力法	135
§ 9—6	基于增量理论的初应变法	136
<b>主要参考文献</b>		<b>138</b>

## 下 篇

<b>第十章</b>	<b>裂纹顶端的应力应变场</b>	<b>139</b>
§ 10—1	弹塑性断裂过程概述	139
§ 10—2	应力应变场近似分析	142
§ 10—3	塑性区分析	144
§ 10—4	裂级顶端弹塑性应力应变的其他分析结果	149
<b>参考文献</b>		<b>153</b>
<b>第十一章</b>	<b>弹塑性断裂判据</b>	<b>157</b>
§ 11—1	概述	157
§ 11—2	$J$ 积分	158

§ 11—3	裂纹尖端张开位移 COD .....	172
§ 11—4	$J \sim \delta$ 关系 .....	175
§ 11—5	其它单参数判据 .....	180
§ 11—6	应力状态的影响 .....	182
§ 11—7	裂纹扩展时的能量平衡问题 .....	183
§ 11—8	双参数断裂判据 .....	186
<b>参考文献</b> .....		191
<b>第十二章 抗裂特性及断裂失稳</b> .....		197
§ 12—1	断裂失稳现象的概述 .....	197
§ 12—2	阻力曲线 .....	200
§ 12—3	抗裂导数型判据及撕裂模量 .....	207
§ 12—4	其它动态与展望 .....	210
<b>参考文献</b> .....		212
<b>第十三章 弹塑性断裂的综合设计准则</b> .....		215
§ 13—1	序言 .....	215
§ 13—2	“双判据”方法 .....	215
§ 13—3	引伸单判据方法 .....	219
<b>参考文献</b> .....		222



# 第一章 引言

## § 1—1 定义与研究对象

物体受力较小时，它的变形是弹性的，而且应力与应变成线性，当全部应力被卸除，变形也完全消失，物体又恢复其原形，所以弹性变形过程是可逆的。

当物体所受的力较大时，它就会发生非弹性的塑性变形，虽然应力全部卸除，总变形中的弹性变形完全消失，但塑性变形却永远保留，所以塑性变形过程是不可逆的。固体力学中所研究的弹性体，是理想化了的弹性物体，因为一般的弹性物体，虽然受力较小，也会产生或多或少的塑性变形，但这些塑性变形的量级小于弹性变形的量级，因而可忽略不计。

实验资料表明，温度和工作持续时间等因素，能显著改变物体的塑性，而塑性金属材料（如碳钢、铜、铅等）的塑性特性在常温下却与时间无关，若在高温下持续工作，则其塑性变形会与时俱增，这就是所谓的金属材料的蠕变现象。一般在常温下研究塑性力学问题，都不考虑时间因素对塑性变形的影响，若研究材料的蠕变、粘弹性、流变学等问题，则时间就成为必须考虑的因素了。

塑性力学包含两个方面的基本内容，其一是拟定弹塑性材料的合理力学模型，从而建立确切反映材料力学特性的应力应变关系；其二是发展和完善被研究物体的塑性应力场、塑性应变场所需的方程及解法。

近百年来，塑性力学已逐步形成了一套规律性的成熟理论和许多有效解法，但由于塑性问题的非线性所引起的数学困难，以及物体塑性变形的微观机理与宏观研究结果之间的巨大偏离等原因，在应力应变关系与寻求封闭解等方面还有许多问题需要深入研究。

塑性力学除了在结构强度计算和金属材料工艺成型两个领域的广泛应用外，近期已成功地应用于地球物理、地质学等问题，象冰层、粘土层、岩石层都可作为具有塑性变形势的材料进行研究。

塑性的数学理论，实质上是一种抽象化过程，也就是企图将处于复杂应力状态的塑性材料宏观特性的实验资料，通过数学推理，使之系统化、公式化。塑性的物理力学理论，就是从材料的晶体结构入手，用微观方法研究物体的弹塑性变形与外力的定量关系。当然人们预期这两种不同的研究方法能殊途同归，最终能得出统一的塑性理论。

在塑性数学理论中，也有两种不同的研究方法，一种方法是研究塑性变形的全过程，即研究各瞬间的塑性应力场和塑性应变场，确定弹性与塑性的分界面以及卸载后重新加载时应力场和应变场的变化规律；另一种方法是从工程结构强度计算的需要出发，避开研究塑性变形全过程的巨大数学困难，而直接估算理想刚塑性材料的结构或构件进入极限状态时的载荷值，这就是所谓的“极限分析”问题。

## § 1—2 发展简史

金属材料塑性力学的正式研究工作开始于1864年，当时屈瑞斯加（Tresca）发表了金

属材料冲压与挤压的试验报告，他认为当最大剪应力达到它的临界值时，材料就开始屈服，这就是至今仍然应用的最大剪应力屈服准则。1870年，圣维南（Saint-Venant）运用屈瑞斯加屈服准则，确定了受内压力的薄壁圆管全部屈服时的应力，以后又建立了平面应变问题的五个应力应变关系式。1870年，列维（Levy）根据圣维南的概念给出了空间问题的应力与塑性应变之间的关系式，他还引入了平面应变问题的线性化方法。在以后的四十年里，塑性理论几乎没有什么进展。

本世纪初，塑性力学研究工作又有了较大发展。1909年，哈尔（Haar）和冯卡曼（Von Karman）从变分原理得到了塑性方程。1913年，米塞斯（Von Mises）从数学角度提出了金属材料最满意的屈服准则表达式。1924年，汉基（Hencky）对米塞斯的屈服准则作了物理解释，他认为当弹性应变能到达某临界值时，材料就开始屈服。

1920年，普朗特（Prandtl）证明了平面塑性应变问题中滑移线微分方程是双曲线型，并确定了当光滑平冲头压入半平面时所需要的压力。1923年，汉基提出了适用于普朗特解的普遍理论，他还定义了平面应变滑移线场的几何性质。1925年，冯卡曼首先将塑性理论应用于金属材料的工艺问题，他采用初等数学方法分析了一个金属材料轧制过程的应力分布；稍后，萨克斯（Sachs）等人对拉丝问题也给出了类似理论。

直到1926年，洛德（Lode）测量了多种金属材料的薄管在轴向拉伸和内压力的共同作用下的塑性变形，才证实了列维——米塞斯应力应变的关系的正确性；1931年，泰勒（Taylor）、奎尼（Quinney）等也先后进行了这种试验，他们的结果与塑性应力应变关系的理论值都有偏离。1930年，劳埃斯（Reuss）将弹性应变分量引入列维的塑性应力应变关系式；1932年，施米特（Schmidt）、奥德奎斯特（Odquist）又以不同的方式，证明了如何在列维——米塞斯方程组中考虑材料的应变强化效应。

1939~1944年，由于战争的刺激，英、美等国的塑性力学的研究方面有较大进展。

1951年，杜拉克（Drucker）、格林伯格（Greenberg）、普拉格（Prager）等人相继完成了关连塑性流动法则和极值原理的论证工作，从而促进了极限分析研究工作的迅速发展。

近二十年来，随着电子计算机的广泛应用而发展起来的有限单元法，已成功地应用于塑性力学，使长期难解的带奇异点的弹塑性应力场、应变场问题，也获得了令人满意的数值结果。目前正在大力发展带裂纹物体的弹塑性有限单元法和大塑性变形的有限单元法。

## § 1—3 两种基本实验资料

### 一、单向拉伸实验

金属材料的力学性能，都是通过单向拉伸（或压缩）实验和薄壁圆管的扭转实验直接测定的。这里只概括引述单向拉伸实验的一些重要结论。

屈服极限：有些金属材料（如低碳钢及一些合金钢等）具有显明的屈服流动阶段，此阶段的应变可以达到1%，工业生产中把材料开始屈服时的应力作为屈服极限，并用 $\sigma_s$ 表示。另一类材料（如中碳钢及某些超高强度钢、有色金属等）并无明显的屈服流动阶段，一般规定残余变形为0.2%时的应力为条件屈服极限 $\sigma_{0.2}$ 。

应变：应变有两种表示方式，第一种表示方式为： $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$ ，通常把  $\varepsilon$  称为工程应变；第二种表示方式为

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(l/l_0) = \ln(1 + \varepsilon) \quad (1-1)$$

式中  $l_0$  为试件的原长， $l$  为试件变形过程中的瞬时长度。按上式求出的应变  $\epsilon$  称为对数应变或自然应变，上式也表明了自然应变  $\epsilon$  与工程应变  $\varepsilon$  之间的关系。

如果认为在拉伸实验过程中，材料的体积不变，即

$$A_0 l_0 = A l = \text{常量}$$

则

$$A = A_0 l_0 / l = A_0 / (1 + \varepsilon) \quad (1-2)$$

应力：应力也有两种计算方法，一种计算方法为

$$\sigma_{\text{nom}} = P / A_0$$

通常把  $\sigma_{\text{nom}}$  称为名义应力，即不考虑试件原截面积  $A_0$  的变化。另一种计算方法为

$$\sigma_{\text{tru}} = P / A$$

一般把  $\sigma_{\text{tru}}$  称为真应力，在这种计算方法中采用的是试件的瞬时截面积  $A$ 。

考虑到 (1-2) 式，真应力计算式也可改写为

$$\sigma_{\text{tru}} = P / A = \frac{P}{A_0 / (1 + \varepsilon)} = \sigma_{\text{nom}} (1 + \varepsilon) \quad (1-3)$$

上式表明，当应变  $\varepsilon$  较小时，真应力  $\sigma_{\text{tru}}$  与名义应力  $\sigma_{\text{nom}}$  几乎相等，但随着变形  $\varepsilon$  值的增大，两种应力的偏差也随之而加大。

图 1-1 给出了真应力应变 ( $\sigma_{\text{tru}}, \varepsilon$ ) 曲线和名义应力应变 ( $\sigma_{\text{nom}}, \varepsilon$ ) 曲线

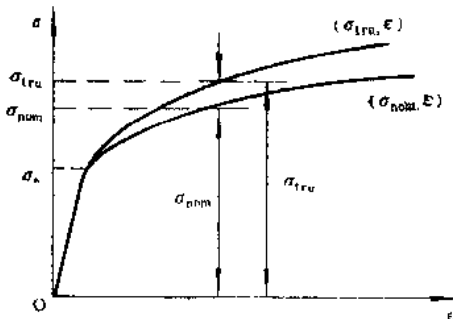


图 1-1

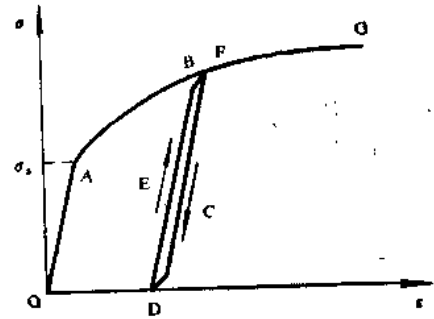


图 1-2

应变强化：图 1-2 应力应变曲线上的 B 点所对应的外载荷已超过屈服载荷，若缓慢的全部卸除该载荷，则 B 点对应的应力将沿着卸载路径  $B \rightarrow C \rightarrow D$  而降为零，试件的残余变形值为  $OD$ 。如果重新加载，则试件内的应力沿着加载路径  $D \rightarrow E \rightarrow F$  缓慢递增。值得注意的是重新加载时材料的弹性极限和屈服极限升高了，升高的幅度取决于前面的载荷引起的塑性变形程度。通常将已有塑性变形的材料重新加载，其弹性极限和屈服极限同时升高的现象称为应变强化。

普朗特对于卸载——加载所对应的应力应变图象提出了下面三点假设：

(一) 二次加载曲线  $DEF$  与第一次加载曲线  $OAB$  在起始点处的斜率相同。

(二) 滞后曲线  $DEF$  被  $E$  点唯一确定。

(三) 第二次加载曲线的屈服点  $F$  与卸载起始点  $B$  重合，两次加载到  $B$  点以后对应的应力应变曲线走向一致。

包辛格 (Bauschinger) 效应：图 1-3 表示将超过屈服极限的外力 (图上的  $B$  点) 完全卸除，而后施加符号相反的应力 (拉伸转变为压缩)，经压缩弹性变形之后，材料接着进入压缩屈服范围，但压缩弹性极限 (图内的  $D$  点) 小于未经拉伸而直接受压缩时的弹性极限 (图内的  $A'$  点)，通常将已强化材料受反号应力作用而提早屈服的现象叫做包辛格效应。

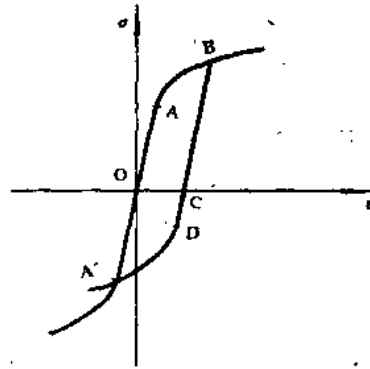


图 1-3

## 二、静水压力试验

勃里特曼 (Bridgman) 曾对几种材料进行了各向均压试验，并提出了均匀压力  $p$  与单位体积变形  $\theta$  之间的关系式

$$\theta = \frac{1}{K} p \left( 1 - \frac{1}{K_1} p \right) \quad (1-4)$$

式中： $K$  为体积压缩模量， $K_1$  为派生的模量，对于不同的金属材料其值也不相同。

当均匀压力  $p$  到达金属材料的屈服极限  $\sigma_s$  时，勃里特曼提出的体积变形公式与弹性体积变形公式  $\theta = p/K$  的偏差近乎 1%，显然略去  $K_1$  的影响是允许的。

勃里特曼在 10000 个大气压力下的试验表明，弹簧钢的体积仅缩小 2.2%，镍的体积仅缩小 1.8%。但结构松散的碱性金属 (如铯) 在  $1.5 \times 10^4$  个大气压力下，其体积改变可达 1/3。

对于一般金属材料，可以近似的认为体积变形是弹性的，卸除各向均匀压力后，材料的体积变形完全恢复，并无残余体积变形。当材料进入塑性变形阶段，体积变形与塑性变形相比是很微小的，故可忽略体积变形，即认为材料的体积是不可压缩的。

## § 1-4 弹塑性材料的简化假设

当材料屈服以后，其应力应变变成非线性关系，为了减少实际求解工作的数学困难，对工程中的实际弹塑性材料常引入下面几种简化假设。

**线性强化弹塑性材料** 认为材料屈服以后，其应力与应变之间的关系仍为直线关系，只是比例常数小于弹性变形阶段的比例常数 (即弹性模量  $E$ )，相的应力应变关系图象如图 1-4(a) 所示。

**线性强化刚塑性材料** 认为材料在屈服现象出现以前为绝对刚体，屈服以后则只产生塑性变形，并且是线性强化的，相应的应力应变图象如图 1-4(b) 所示。

**理想弹塑性材料** 认为材料开始屈服以后，并不显示应变强化，只呈现塑性流动，其应力应变图象如图 1-4(c) 所示。

**理想刚塑性材料** 认为材料在屈服极限以前，并不产生弹性变形，即为绝对刚体，当材

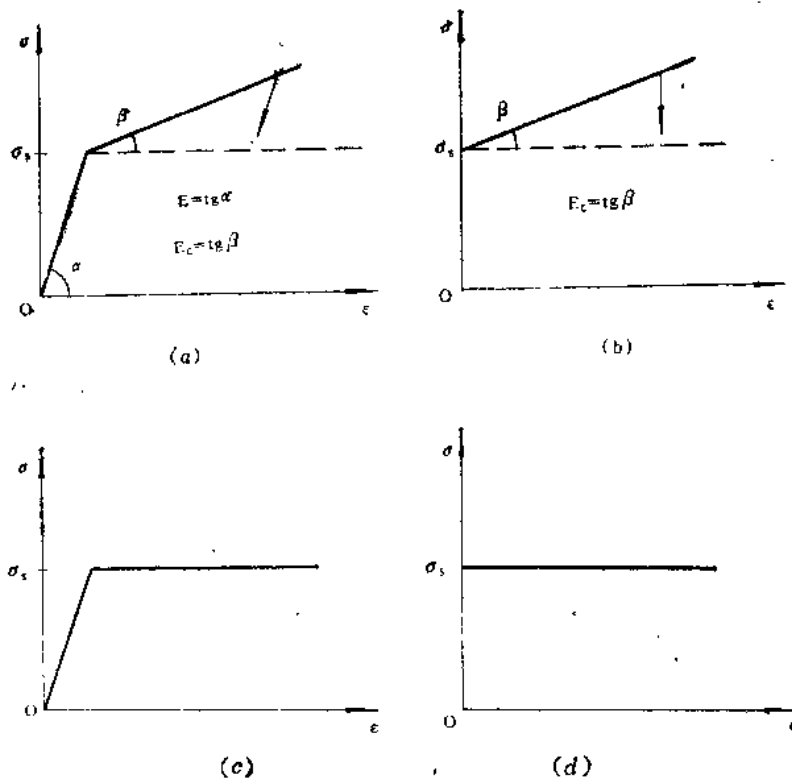


图 1-4

料进入屈服后，也不显示应变强化，能继续产生塑性流动，其应力应变图象如图 1-4(d) 所示。

图 1-4 中 (a)、(b) 应力应变曲线上指向横坐标轴的箭头，代表卸载时的应力应变途径。

### § 1—5 应力应变曲线的经验公式

求解塑性力学问题时，为了简化数学运算，经常采用基于实验资料的应力应变曲线的经验公式。下面介绍两种常用的经验公式。

#### 一、吕德维克(Ludwik)经验公式

吕德维克经验公式为

$$\sigma = \sigma_s + A\epsilon^n \quad (1-5)$$

式中： $\sigma_s$  为材料的初始屈服极限， $A$  与  $n$  是材料常数。值得注意的是上式中的应变是自然应变，对微小弹塑性问题（即塑性应变与弹性应变属同量级）而言，自然应变  $\epsilon$  可直接用工程应变  $e$  代换。

图 1-5(a) 给出了经验公式中  $0 \leq n < 1$  的曲线，绘制该曲线时假定材料在其屈服极限以前是绝对刚体。

若令屈服极限  $\sigma_s = 0$ ，则 (1-5) 式变为

$$\sigma = A\epsilon^n \quad (1-6)$$

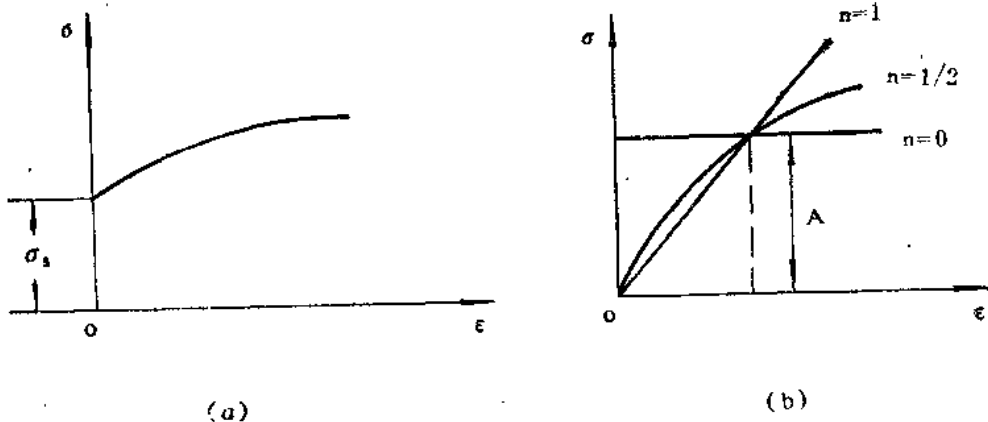


图 1-5

图 1-5(b) 给出了上式中  $n=0, 1/2, 1$  的三条曲线。(1-6) 式在对数坐标系中是一条直线, 该直线在  $\ln \sigma$  轴上的截距就是  $\ln A$ , 所以  $A$  值就被确定了, 直线的斜率就是应变强化指数  $n$ 。在  $\epsilon=0$  处,  $d\sigma/d\epsilon$  变为无限, 这表明上面的经验公式不宜用于应变较小的区域。

## 二、兰伯-奥斯古 (Ramberg—Osgood) 经验公式

早在 1943 年, 兰伯-奥斯古就给出了适用于钢材与铝合金的三参数方程

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 + B \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^{n-1} \right], \quad n \geq 1 \quad (1-7)$$

式中  $\epsilon, \sigma$  为单向拉伸应变及相应的应力,  $E$  为弹性模量。三个参数是指材料常数  $B, n$  及条件屈服极限  $\sigma_s$ , 条件屈服极限  $\sigma_s$  原指割线模量  $E_s = 0.7E$  [注] 时的应力 (图 1-6), 对一般钢材而言, 条件屈服极限  $\sigma_s$  与  $E_s = 0.7E$  时的应力值很接近。

材料常数  $B$  的确定, 与规定的条件屈服极限  $\sigma_s$  有关。先将方程 (1-7) 写成无量纲形式, 即

$$\frac{E}{\sigma_s} \epsilon = \frac{\sigma}{\sigma_s} \left[ 1 + B \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^{n-1} \right]$$

将  $\sigma = \sigma_s, \epsilon = \epsilon_s$  (与  $\sigma_s$  相应的应变值) 及  $\sigma_s / \epsilon_s = 0.7E$  代入上式, 即得

$$B = \frac{1}{0.7} - 1 = \frac{3}{7}$$

所以规定了钢材的条件屈服极限  $\sigma_s = 0.7E$  时的应力值后, 常数  $B$  只能取  $3/7$ , 这样三参数方程才能自行满足。

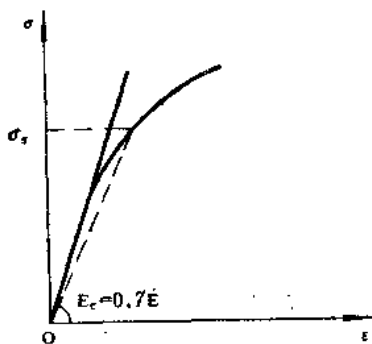


图 1-6

[注] 美国技术资料中以  $E_s = 0.7E$  对应的应力作为条件屈服极限。

## 第二章 弹性应力、应变状态

为了适应塑性力学解题的需要，须将弹性应力状态与应变状态作适当引伸。

### § 2—1 应力张量 斜面上的应力

应力张量 对直角坐标系而言，受力物体任一点  $M$  (见图 2-1) 的应力状态可用应力张量  $\mathbf{T}(\sigma)$  表示，即

$$\mathbf{T}(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

当坐标系  $xyz$  绕原点  $O$  转过一角度，用  $x'y'z'$  表示旋转后的新坐标系，则  $M$  点的应力状态可用新坐标系的应力张量表示，即

$$\mathbf{T}(\sigma') = \begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'o'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'o'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

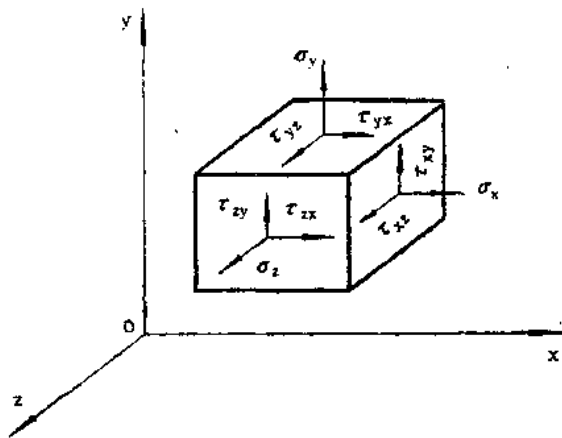


图 2-1

二张量  $\mathbf{T}(\sigma)$  与  $\mathbf{T}(\sigma')$  的分量应服从下面的变换

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{mn} l_{mi} l_{nj} \quad (2-3a)$$

二坐标系之间的方向余弦  $l_{ij}$  见下表：

表一

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_{11}$	$l_{21}$	$l_{31}$
$y'$	$l_{12}$	$l_{22}$	$l_{32}$
$z'$	$l_{13}$	$l_{23}$	$l_{33}$

上式的展开式为

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x l_{11}^2 + \sigma_y m_{11}^2 + \sigma_z n_{11}^2 + 2\tau_{yz} m_{11} n_{11} + 2\tau_{zx} l_{11} n_{11} + 2\tau_{xy} l_{11} m_{11} \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x l_{11} l_{12} + \sigma_y m_{11} m_{12} + \sigma_z n_{11} n_{12} + \tau_{yz} (m_{11} n_{12} + m_{12} n_{11}) \\ &\quad + \tau_{zx} (l_{11} n_{12} + l_{12} n_{11}) + \tau_{xy} (l_{11} m_{12} + l_{12} m_{11}) \\ \tau_{x'z'} &= \sigma_x l_{11} l_{13} + \sigma_y m_{11} m_{13} + \sigma_z n_{11} n_{13} + \tau_{yz} (m_{11} n_{13} + m_{13} n_{11}) \\ &\quad + \tau_{zx} (l_{11} n_{13} + l_{13} n_{11}) + \tau_{xy} (l_{11} m_{13} + l_{13} m_{11}) \end{aligned} \quad (2-3b)$$

斜面上的应力 为了导出图 2-2 所示通过考察点  $M$  的任意斜面上的应力表达式，设通过  $M$  点而与坐标轴垂直的三个微分面上的应力为已知，待求应力所在倾斜微分面  $abc$  的外法线为  $\mathbf{V}$ ，它与坐标轴的方向余弦为  $l$ 、 $m$ 、 $n$ ，利用此四面体平衡的条件，即得斜面上的应力表达式

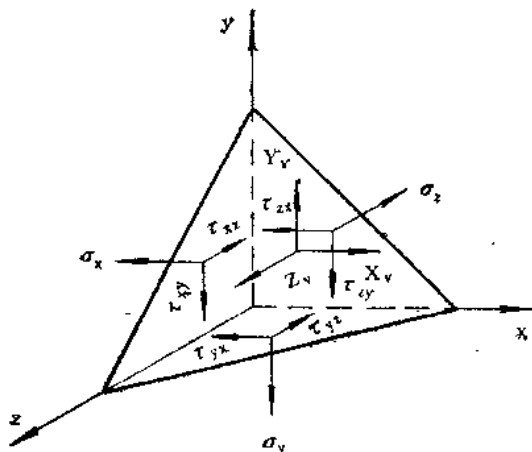


图 2-2

$$\begin{aligned} X_V &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_V &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_V &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2-4)$$

### § 2-2 主应力 应力张量的不变量

设图 2-2 中的倾斜微分面是主微分面，即此微分面上只有正应力，而剪应力为零，此倾斜微分面上的总应力就是主应力。用  $\sigma$  表示主应力，则它在各坐标轴上的投影为

$$X_V = \sigma l \quad Y_V = \sigma m \quad Z_V = \sigma n$$

代入 (2-4) 式，得

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

三个方向余弦应满足关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-6)$$

现在从方程 (2-5) 与 (2-6) 式求解  $\sigma$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $n$ 。齐次方程组 (2-5) 式不能有

$$l = m = n = 0$$

这样的解，因为这样的解不满足 (2-6) 式。方程组 (2-5) 有非零解的条件是该方程组的系数组成的行列式为零



$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-7)$$

将行列式展开，得

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2-8)$$

其中引用了记号

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2-9)$$

三次方程式 (2-8) 称为应力状态的特征方程，它有三个实根  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，这就是所要求的主应力。把三个主应力值分别代入方程组 (2-5) 式，并利用关系式 (2-6)，便可求得三组主平面的方向余弦。

在给定的外载荷作用下，物体内任意一点的主应力值及方向即已确定，而与坐标系的选择无关，所以方程 (2-8) 式的根应与坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  无关。(2-9) 式中的三个量  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  是坐标变换时的不变量，并称为应力张量不变量。

### § 2—3 应力张量分解 应力偏张量

在一般情况下，应力张量 (2-1) 式可以表示成两个张量和，即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-10)$$

式中引用了记号

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m \quad S_y = \sigma_y - \sigma_m \quad S_z = \sigma_z - \sigma_m \quad (2-11)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-12)$$

对主应力而言，上面的记号可改写为

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_m \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma_m \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma_m \quad (2-13)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2-14)$$

应力分量  $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$  只引起单元体的几何形状发生改变，故称此应力分量为应力偏量；应力  $\sigma_m$  只引起单元体的体积大小发生改变，故称此应力为平均应力。相应的将 (2-10) 式右