中学数学教学

一九八一年第一期

《高二复习专辑》

贵州省数学学会中学数学教学研究组
贵 阳 市 数 学 教 学 研 究 会

目　录

怎样搞好今年高二毕业复习

省数学学会中学数学教学研究组

根据今年高二学生的际实情况，以及近几年毕业复习的经验和教训，今年的高二复习要注意如下几个方面。

一、毕业复习一定要以教学大纲、教材为依据，正确使用适当的复习资料。

前几年，全国没有统一的教材，各地为了帮助学生复习，编写了各种复习资料，发挥了一定的作用。但是，各地的复习资料要求不一，一般都偏难偏深。今年，全国基本上都按统一的教学大纲、教材教学，教育部还重行颁布了教学要点和过渡办法，复习时就有章可循了。因此，在复习时，对复习资料要恰当选择，更应慎重使用。担任高二复习的老师一定要根据重行颁布的教学要点和过渡办法，结合学生的实际情况，制订切实可行的复习计划。安排要紧凑，但不要订得太死，要留有余地，要避免前松后紧或前紧后松的现象。

二、从学生的实际出发，切实抓好"双基"复习，不要追求形式上过了几遍。

前几年，一般都觉得复习的时间越长、遍数越多越好。实践证明，这样做常常影响了"双基"的扎扎实实的复习，师生往往被拖得筋疲力尽，学生临考前的精力不济，影响了复习效果和考试成绩。今年的复习要接受这个教训，不要草

率地结束新课，以图“抢”些时间复习。

要根据教学大纲和教材的要求，扎扎实实地抓好“双基”复习，通过全面复习，使学生做到基本概念清楚，基本技能熟练，有一定的技巧。

在全面复习“双基”的基础上，根据学生的复习情况以及教材的要求，进行重点复习，进一步提高综合运用“双基”的能力。

要正确理解“综合能力”。它是指对“双基”的多方面联系的掌握，不是搞偏难偏深的题目。综合运用“双基”的能力的形成有一个过程，不可能通过解几个难题就能实现。因此，在全面复习“双基”时，就要逐步进行综合能力的培养，不要把“双基”复习和综合能力的培养截然分开。

在高考前的十天左右时间内，要让学生自己掌握时间，充分消化、整理复习过的东西，老师进行适当的辅导质疑。

在全面复习和重点复习阶段，要进行适当的考试，每次试卷要及时进行讲评。经验证明，试卷讲评给学生的印象很深刻，帮助很大。

对于不同情况的学生要有恰当的要求，既能充分发挥学生的才智，又能对大多数学生有所帮助。例如，对基础较好的学生，要让他们独立解决教材中所有问题，引导他们自己归纳和总结，提高解题技巧；对一般学生，要及时帮助他们解决教材中比较困难的问题；对基础较差的学生，要使他们达到教材的基本要求。对文科班学生，要着重复习初中和高一的教材内容。

三、要帮助学生系统地、深入地掌握“双基”，提高解题能力。

中学数学的内容较多，复习时可以不依教材安排的次

序，按知识的联系归类整理成几个部分（例如，像八〇年高考大纲那样来做）进行复习，这样有助于学生系统地掌握中学数学的“双基”。具体地说，要做到下面几点：

1、通过复习，使学生对基础知识的掌握系统化，对基础知识的理解和记忆做到脉络分明，联系清楚。要教育学生纠正在复习基础知识时的草率作法，要通过具体例子使学生懂得系统掌握基础知识对于记忆和应用都有很大作用。

2、通过复习，使学生对运用基础知识的基本技能条理化。各种基本技能不是孤立的，它们有区别也有联系。许多学生有一种感觉，解出一个题目的想法大多带有“碰巧”的因素，盲目性较大。这固然反映学生的基本技能不熟练，重要的原因在于对基本技能的掌握是孤立的，不能逐一运用有关的基本技能考察题目，探求解题途径。要帮助学生在系统地掌握基本技能的基础上，逐渐形成正确的思维习惯。

新教材的每一章都有一个小结，它比教学大纲具体，又把各章内容集中，重点突出，条理分明。这是系统地掌握各章基础知识和基本技能的提纲。要教会学生使用各章小结进行系统的复习。

还要注意，在分类复习时，要切实按照大纲和教材的提法。不要另外提出一些名称，增加学生不必要的记忆。

3、在解题方面，要引导学生善于把问题明确地归结为有关的基础知识和基本技能的应用，提高对问题的判断力。无论用分析法或是综合法探求解题途径，都要把基础知识和基本技能作为思索的出发点和终结。简单地说，应用基础知识和基本技能分析问题要明确问题要求“做什么”和“怎样做”。“做什么”规定了解题的目的和方向，“怎样做”确定了解题的具体方法和步骤。

要抓紧双基才能提高数学解题能力

黄锦明

解题能力对于学好数学是一个重要环节，要检验是否学好数学，可以通过解题能力来体现。另一方面若果解题能力强，在数学学习中能取得更好的效果。因此，提高解题能力就成为数学学习中的一个重要问题了。但对于解题能力的培养不可能从单纯强调多解题就能达到，认为搞题海战术就能提高能力的作法是有片面性的。我们认为“解题能力”应该是在更好地掌握基本知识的基础上，加强培养用基本概念为依据，进行分析、推理和论证的能力，即使是计算能力，也应以概念、推理为依据。若不是在重视基础知识学习的基础上进行能力培养，在解题时就会出现看不懂题或解题时无从下手等情况，概念理论清楚，再加上会进行合理的分析论证，就有可能找到简捷的方法解题。

（一）

中学数学的内容是分散在各个年级依次学习，但较多教材的内容是同一类型的。例如方程这部分教材它是代数中的一个重要分支，但学习方程时，并不像某一专项那样从头到尾一气学完，而是根据教材的发展，分散在相关的地方，逐步出现，逐步学习，如整式方程、分式方程、无理方程，还有超越方程等等。但在解方程的问题出现时，往往不一定是

被这种单一的方式出现，较多的是混合出现的，这时，就需要我们能把各种类型的方程的解法分类总结。再根据其内在联系，把相关的地方串联起来，就能对解题能力的提高起很好的作用。就从方程解法的基本思路上看，可以归结为一句话："三化一替换"，即是"高次方程低次化，分式方程整式化，无理方程有理化，以及变量替换的换元法"。这种归纳对解法思路来说是很解决问题的。但是就在这种思路的指导下进行解题，还得根据具体问题，具体条件，具体情况找出与题目的条件，结论有适当联系的基本知识，才能使题目中的复杂情况化为简单，未知转化为已知。也只有在这种情况下，需要解决的问题才能顺利地得出结果来。因此也就反映出抓好基础知识学习与解题能力的提高之间的紧密关系。

如解无理方程时，从解题思路是"无理方程有理化"，这个有理化具体点说，就是有平方根的用平方的方法去根号，有立方根的用立方的方法去掉根号，如下面的例题：

（1）$\sqrt{x^2-5}+1=x$

（2）$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0$

就可以通过方程两边有限次平方就可以把无理方程化为有理方程而求解了。这就是所谓的常规解法，作为解题能力来说，除常规的情况外，更重要的是要密切注意题目中特殊情况的出现，会使常规解法失去作用，如下面例题：

（3）$\sqrt{4x+5}\times\sqrt{x+1}+\sqrt{9x+10}=0$

（4）$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$

虽然它们也是无理方程，但它们有特殊的地方，就是它们都是由算术平方根的和组成的方程，这种情况的方程只能由每个算术平方根为零的情况下，方程才可能有解，所以解这种

方程只能将它们化为方程组如

$$(3)\begin{cases}4x+5=0\\ x+1=0\\ 9x+10=0\end{cases}\qquad(4)\begin{cases}x^2-3X+2=0\\ x-1=0\\ x^2-1=0\end{cases}$$

之后，看方程组中若有公共解［如（4）］，则为原方程的解，若无公共解，［如（3）］则方程无解，这说明若对算术根这一知识理解不深，掌握不好时，就会在解这类方程中导致错误。

又如方程

$$(5)\quad\sqrt{1+\frac{9}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+9}}=2.05$$

虽然也可用平方的方法来解，但根据这个方程的特点，不如用换元法。

命 $y=\sqrt{1+\frac{9}{x}}=\sqrt{\frac{x+9}{x}}$ 则有 $\sqrt{\frac{x}{x+9}}=\frac{1}{y}$

故方程（5）可化为：

$$y+\frac{1}{y}=2.05$$

这样解起来就更简便了。这进一步说明，基础知识掌握得好，就可以结合题的具体情况，选择适当的解法进行解题。显然在这种情况下，解题能力的高低就很明显的表现出来了。

中学数学各科——代数、几何、三角、解几中，根据题目类型适当选用各种方法和知识进行解题，是培养解题能力的最根本的方式。若进一步再由一题多解，特别是对同一词题分别采用代数、几何、三角或解几的方法进行解题，既能开阔思路，又能培养能力，特别是综合解题能力，这种综合

解题能力，采用单科题目，而应用各种科目的方法去探索解决方法，是培养综合能力的较好途径，决不能只依靠综合题来培养综合解题能力。如下例

（6）解方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$

这个方程既是无理方程，又是分式方程，按常规解法当然根据“分式方程整式化，无理方程有理化”来进行，但照常规解法进行之后，就产生了一个一般的一元四次方程。这就超出了大纲的范围而无法求解了。

但我们还可以研究一下是否可以通过别的途径来解这个方程，我们应该先总结第一种解法为什么行不通，原因何在？这得从为什么会产生四次方程探讨一下，答案是很明显的，也就是方程两边平方及去分母引起末知数“升次”，若我们考虑用另外方法不使它“升次”不就行了吗？从基本知识来考虑，去根号的方法除了平方的方法外，还可以用基本知识“$\sqrt{a^2}=|a|$”来解决，即是把被开方的数或式子化成完全平方的方法来进行解题，但结合本题式子“x^2-1”是不可能化为完全平方的。这就迫使我们为了解决问题而抛开代数的方法而改用三角的方法来考虑解题了，也就是用三角函数去代替x。（实质上仍属换元法）从基本知识的角度看，用什么三角函数去代替x，这要从x的定义域来决定，因此我们得研究原方程的定义域，知道“方程（6）的定义域是$x>1$，根据定义域只能选用相同定义域的正割或余割去代替x。故命

$x=\mathrm{Sec}\,\alpha$、且α为锐角

（只要锐角就解决问题，没有必要取一般角，那只能使问题复杂化），并将其代入原方程得：

$$\sec\alpha+\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}=\frac{35}{12},$$

即 $$\sec\alpha+\frac{\sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{35}{12},$$

（三角公式给我们解决了有理化的问题）

简化得 $$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{35}{12}$$

即 $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{35}{12}$$

平方得 $$\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1225}{144}$$

即 $$\frac{4(1+\sin2\alpha)}{\sin^2 2\alpha}=\frac{1225}{144}$$

去分母得 $$1225\sin^2 2\alpha-576\sin2\alpha-576=0$$

即 $$(25\sin2\alpha-24)(49\sin2\alpha+24)=0$$

$\therefore$ $\sin2\alpha=\frac{24}{25}$，或 $\sin2\alpha=\frac{24}{49}$（舍，$\because$ α 锐角）

$$\therefore\ \cos2\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\pm\frac{7}{25}$$

$$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1\pm\frac{7}{25}}{2}}$$

$$=\frac{4}{5}\text{或}\frac{3}{5}$$

从而得 $\sec\alpha=\frac{5}{4}$或$\frac{5}{3}$

∴得 $x_1=\frac{5}{4}$ 或 $x_2=\frac{5}{3}$

经检验 $x=\frac{5}{4}$或$x=\frac{5}{3}$为方程（6）的解。

从方程（6）使代数问题三角解法来看，当然是属于有一定难度的解法，但从整个解题思路及过程来看，它并没有超越中学数学的基础知识范围，关键是怎样把所掌握的基础知识用得灵活适当，这就需要我们对基础知识的学习及使用要花一定的功夫。因此更看出解题能力的培养不能离开基础知识这个根本。

方程（6）我们还可从代数方法来探讨解法，解题思路仍从降次换元入手。毕节一中杨天泽老师提供了以下解法。

将方程化为：

$$x+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x}^2)}}=\frac{35}{12}\cdots\cdots①\quad(x>0)$$

命 $y=\frac{1}{x^2}$ 则 $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 代入①得

$$\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}=\frac{35}{12}$$

即 $$\frac{\sqrt{1-y}+\sqrt{y}}{\sqrt{y(1-y)}}=\frac{35}{12}\quad\cdots\cdots②$$

方程②两边平方得：

$$\frac{1+2\sqrt{y(1-y)}}{y(1-y)}=\frac{35^2}{12^2}\cdots\cdots\cdots③$$

再命 $u=\sqrt{y(1-y)}$ 代入①得：

$$\frac{1+2n}{u^2}=\frac{35^2}{12^2}$$

去分母得： $35^2u^2-2\times12u-12^2=0$

而 $\triangle=4\times12^4+4\times35^2\times12^2=4\times12^2(12^2+35^2)$

$=4\times12^2\times37^2$

$$\therefore\quad u=\frac{2\times12^2\pm2\times12\times37}{2\times35^2}$$

$$=\frac{12(12\pm37)}{35^2}\quad\because\quad u>0\quad\therefore(\text{舍负})$$

$$\text{得}\quad u=\frac{12\times49}{35^2}=\frac{12}{25}$$

$$\therefore\text{有}\sqrt{y(1-y)}=\frac{12}{25}\quad(1>y>0,1-y>0)$$

$$\text{平方得}\ y-y^2=\frac{12^2}{25^2}$$

即 $25^2y^2-25^2y+12^2=0$

而 $\triangle=25^4-4\times25^2\times12^2=25^2(25^2-4\times12^2)$

$=25^2(675-576)=25^2\times49=25^2\times7^2$

$$\therefore\quad y=\frac{25^2\pm25\times7}{2\times25^2}=\frac{25\pm7}{2\times25}$$

$$\therefore\quad y_1=\frac{32}{50}=\frac{16}{25};$$

$$y_2=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$

由 $y=\frac{1}{x^2}$

得 $x^2=\frac{1}{y_1}=\frac{25}{16}$ $\therefore x_1=\frac{5}{4}$（$\because x>1$ $\therefore$舍负）

又 $x^2=\frac{1}{y_2}=\frac{25}{9}$ $\therefore$ $x_2=\frac{5}{3}$（舍负）

$\therefore$ 方程（6）的解为 $x=\frac{5}{4}$或$x=\frac{5}{3}$。

（二）

某些类型的数学题，它们有一定的规律的解题方式，如解几中求二曲线的交点的问题，实质上解法可归结为解方程组；……等等。这些解题规律，应在平时解题中，经常归纳总结解题规律的特征，不用费很大思索，解法信手拈来，毫不费力，题目迎刃而解。如80年高考理科试题附加题：

"设直线（L）的参数方程式为$\begin{cases}x=t\\y=b+mt\end{cases}$（t为参数）椭园（E）的参数方程为$\begin{cases}x=1+a\cos\theta & (a\neq0)\\y=\sin\theta & (\theta\text{ 为参数})\end{cases}$，问a、b应满足什么条件，使得任意m值来说，直线（L）与椭圆（E）总有公共点"。

从这个题目所求的结论是证明两曲线总有公共点，这是关于已知二曲线的位置关系（相交或相切）的问题，所以解法思路很明显地是用题给两曲线的方程组消去一个未知数后，得出一个一元二次方程的判别式的值来做结论就可以了。但本题所给两曲线是参数各不相同的两个参数方程，需

要先分别消去参数化为普通方程，才能得出方程组如下：

$$\begin{cases} y = mx + b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (l) \\ \dfrac{(x-1)^2}{a^2} + y^2 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E) \end{cases}$$

根据这个方程组的特点，可消去y而得出关于x的一元二次方程为：

$(1+a^2m^2)x^2 + 2(a^2mb-1)x + a^2b^2 - a^2 + 1 = 0 \cdots$ (1)

因本题只要求证明“对任意的值来说，a、b满足什么条件，二曲线总有公共点”。故没有必要直接求出交点坐标，只要利用判别式大于或等于零就可得出关于a·b·m之间的关系式，故有：

$\triangle = (a^2b-1)^2 - (1-a^2m^2)(a^2b^2-a^2+1) \geqslant 0$

简化得：$(a^2-1)m^2 - 2bm + (1-b^2) \geqslant 0 \cdots\cdots\cdots$ (2)

不等式(2)化为关于m的二次不等式的问题是根据题意而定的，所以本题最终转化为二次不等式的问题了。故按解不等式的法则，对任何m值来说，使不等式(2)成立的条件，可分别按$m \neq 0$及$m = 0$两种情况来探讨，因有：

① 当$m = 0$时，有：

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ b^2 - (a^2-1)(1-b^2) \leqslant 0 \end{cases}$$

② 当$m = 0$时，有：

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

解①及②得：

③ $$\begin{cases} |a| > 1 \\ -\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leqslant b \leqslant \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \end{cases}$$

④ $\begin{cases} |a| = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

由③及④得：

$$\begin{cases} |a| \geqslant 1 \\ -\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leqslant b \leqslant \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \end{cases}$$

故当a、b满足条件

$$\begin{cases} |a| \geqslant 1 \\ -\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leqslant b \leqslant \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \end{cases}$$

时，对任意以m值来说，直线（l）与椭圆（E）总有公共点。

从这个题的解题过程来看，显然只要抓住了关键解题规律之后，每一过程的思路衔接及解法的得出是很自然的，但这要求我们对基础知识的掌握及怎样应用要非常非常熟炼，当然对每个关键过程都比较容易突破，也就可以看出从基础知识学习开始到应用时的规律的总结，对解题能力培养所起的作用了。

（三）

运用基本知识及基本概念，以及概念与概念之间的联系及转化，对审题及找到解题方法等方面能起到重要作用。在数学的学习中，对每一个基础知识的学习，并理解之后，再通过一定数量的习题进行巩固，使这个基本知识逐步消化并掌握，而且可以应用它来解决一些实际问题，但这种学习过程往往只能达到对单一知识的掌握及应用起到良好效果。若遇到较复杂一点的问题，而综合性的问题，这种常规的学习

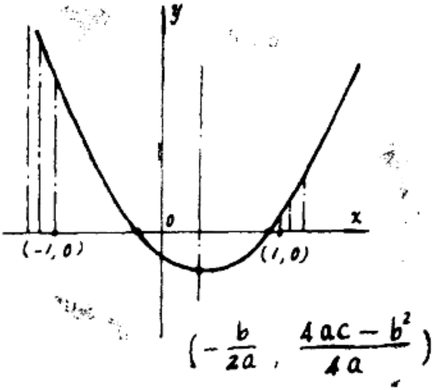
方法，对解决综合性问题会有一定的困难，因此就需要在学习过程中会把学过的各种单一知识概念间的联系及转化掌握住，这才能达到提高解题能力特别是解综合性问题的能力，例如学习了一元二次方程解法，二次不等式，二次函数之后，就应根据这些知识存在的普遍性的东西，把这几种知识用二次函数统一起来，也就是当二次函数的值 $y=ax^2+bx+c=0$ 时，实质上就是一元二次方程问题，当二次函数的值 $y=ax^2+bx+c\neq 0$ 时，这就属于二次不等式的问题，因此，二次函数的性质及图象，就可以成为解决二次不等式及二次方程问题的有力工具，成为解决具体问题时进行转化的桥梁，如下面的例题：

"a、b、c、d都是实数，且满足 $ac>2(b+d)$，如果方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+cx+d=0$ 的根在 -1 与 1 之间，那么方程 $2x^2+(a+1)x+(b+d)=0$ 的根也在 -1 与 1 之间。"

从表面上看，这个例题的题设及结论都是方程的根在 -1 与 1 之间，当然解题关键也就集中在"具备什么条件，才能使一元二次方程的根在 -1 与 1 之间"这一点上了。我们若企图只用解方程这部分知识来解决这个问题，就会发现对这个题无从着手。因为从学过的与方程的有关知识中，并没有与这方面有关的东西。但若我们结合二次函数的有关性质及图象来研究这个问题，就会发现这个问题并不怎么困难，因为我们知道方程的根就是把这个方程看作函数时，函数值为零时自变量所取的值，从图象上看，方程的根就是函数图象与 x 轴交点的坐标。因为二次函数的图象是抛物线，若方程的根在 -1 与 1 之间，则这个函数图象抛物线与 x 轴的交点也在 -1 与 1 之间，我们就可以从这里入手联系函数，

方程、不等式三者关系解这个问题了。

结合图中三个一元二次方程，都是二次项系数为正的情况，故转化为二次函数之后，其图象的抛物线均属于顶点向下，开口向上的情形（如图）而研究二次函数图象的关键问题是抛物线顶点的位置，也就是顶点坐标，我们由已知方程转化为二次函数，并抓住图象顶点坐标，可得解法如下：



将方程$x^2+ax+b=0$转化为二次函数得$f(x)=x^2+ax+b$，它的顶点坐标为$\left(-\frac{a}{2},\ \frac{4b-a^2}{4}\right)$，依题意并结合图象，应有以下关系：

1、$f(1)>0$，即$f(1)=1+a+b>0$；

2、$f(-1)>0$，即$f(-1)=1-a+b>0$；

3、$-1<-\frac{a}{2}<+1$，即顶点横坐标也在-1与1之间；