

专题参考资料(三)

计算流体力学译文集

武汉水运工程学院科研处

目 录

用标记点和格子法计算不可压缩的水下气泡现象.....	(1)
船舶振动下附连下的数值确定.....	(21)
运用流线曲率法解敞水螺旋桨的正问题.....	(34)
任意形状物体上三元湍流边界层的一个求解方法.....	(44)
低速船舶兴波阻力理论的数值计算.....	(55)
泛函分析基本概念.....	(71)
有限差分法中常用的一些基本概念.....	(88)
用数学模型模拟内燃机工作过程的经验 (第二部份)	(97)
流体动力学数值方法 (讲座)	(109)

用标记点和格子法计算 不可压缩的水下气泡现象

Michael J. Vander 和 Andrew H. Van Tuyl

摘 要

用标记点和格子法的计算机编码, 计算了一个轴对称水下气泡在不可压缩的非粘性流体中的运动。文中所提出的计算对应于水深81呎处, 相当于354磅TNT炸药爆炸时所产生的爆炸气泡的情况。这些计算证明了熟知的运动特性, 例如在气泡的第一个极小值时的气泡射流及圆环形状。计算与试验所得的气泡形状十分相符。对早先的编码方法作了一些改进, 以便减小在气泡收缩阶段开始时所出现的一种不稳定性的影响。这些改进包括用“不规则星形”有限差分技术和外插法将速度场沿流体表面的法线方向开拓。

I、引 言

1. 标记点和格子法

我们在本文中提出的是利用标记点和格子法得到的, 在不可压缩非粘性流体不可压缩流动中, 水下爆炸的一个数值解。原先由Harlow 及其同事们 [1—4] 发展起来的标记点和格子法 (以后简称为 MAC 法) 已得到广泛的应用, 并且在加以改进后用来计算具有自由表面及固体边界的不定常不可压缩的流动 [5—15]。MAC 法是以速度和压力作为基本变量的不可压缩运动方程的有限差分解为其特征。速度被明确地划分为随时间和空间而变, 而压力是通过解一个泊松方程求得的。这个方法独有的特点是自由表面由无质量的标记点质点所代替。这些质点把下面矩形的欧拉网格分为空域和满域, 使计算只需在那些具有流体的网格内进行。

从一开始就对 MAC 法做过许多精确化的工作。对那些应用于求解水下爆炸问题的精确化 MAC 法, 已经合并为 MACBUB 法。原始的 MACBUB 法是 Pritchett 的 MACYL 编码, 用以计算由核爆炸形成的一个水下气泡的运动。Pritchett 利用 Harlow 的基本研究方法, 以柱坐标系代替二因次的直角坐标系。此外他还考虑到多至两个自由表面, 一个是空气的自由表面, 另一个是气泡的自由表面, 并且引进不均匀分布的网格。

从 MACYL 编码引伸出对 SMAC [7] 研究方法的某些简化应用。合并利用 Chan 和 Street [10, 11] 的不规则星形技术以加强自由表面的压力边界条件, 可以达到明显提高正确性的目的。正如 Chan 和 Street 所做过的那样, 我们发现在自由表面一边开拓的速度场, 比之

在部分填满的网格中任意规定这些,能得到更好的结果,以便满足质量守恒的差分方程,好象网格是填满的。但是,我们在表面的法线方向外插,而不是限于对垂直或水平方向的外插。此外,为了保证在一般的非均匀网格分布下,对压力的有限差分方程是一阶的,我们曾对独立变量相对于有限差分格子位置作了变化。当网格等距离分布时,独立变量的位置仍然保持与Harlow的原始形式相同;亦即速度被定义在格子的边上,压力则在格子的中心。

我们在最后一节叙述的气泡运动的数值计算是用老一些的程序作出的,其中对动量方程中的迁移项作近似的有限差分集不完全是一阶的。所以这个计算未确立由于改变应变量的位置所带来的影响。但是,应用不规则星形技术得到的结果以及在自由表面上的速度外插值却清楚地表示出来了。

2. 水下爆炸气泡

本文涉及的是因炸药爆炸产生的水下爆炸气泡的计算。计算的目的是把爆炸炸药的特性,尺度和爆炸深度的与爆炸气泡的随后运动,最后的速度和压力场以及自由表面的运动联系起来。

在这样的一个水下爆炸中,开始的一个时间间隔内,水的可压缩性是重要的,而在较长的后续运动中,可把水当作是不可压缩的。本文的计算所涉及的仅仅是后面那一部分的流动情况,而且从那些必须由经验或者别的计算获得的初始条件开始做起。爆炸开始时的压缩性流动可以用诸如由Sternberg和Walker [16] 描述的方法来计算。这个压缩性流动包括一个沿径向向外运动的强大的球形激波,以及在爆炸气泡内的一系列稀疏作用和弱激波。

激波消失后,气泡即开始迅速扩展,当旁边无边界时,则后续运动包含着许多振荡运动,并伴随着一个由浮力引起的向上的迁移运动。当迁移运动的速度变得大起来时,则在每一个极小值之前的短暂瞬时将在气泡的底部形成一股射流。当水深不是太大时,这股射流会打击气泡的顶部,并使它暂时变成圆环状。在每一个极小值时,原来的能量将损失掉一部分,这部分损失的能量可近似地用Snay的方法来估算 [17]。

如图1所示,本文中假定气泡外面的流体是由一个大半径的柱形壁,很深处是一个刚性

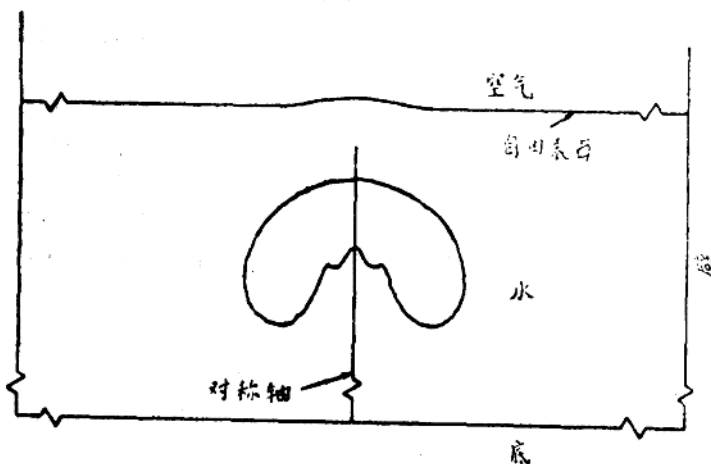


图1 水下爆炸气泡问题的简图。

底, 以及一个液体和空气的分界面所包围。爆炸假定发生在对称轴上。在存在重力的情况下, 利用H. Snay提供的初始条件对一个水下爆炸气泡进行了计算。这种情况相当于一团354磅TNT炸药在水下81呎深度的爆炸。

II、MAC 法的梗概

1. 微分方程

在下面给出的是用目前的MAC编码求解的不定常的, 不可压缩的, 轴对称的, 计及重力影响的非粘性流动方程。质量守恒的连续性方程为

$$(2.1) \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

式中 r 和 z 为柱坐标, u 和 v 为对应于 r 和 z 坐标的速度分量。径向和轴向加速度由欧拉方程给出相应地为

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

及

$$(2.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = g$$

其中 $\phi = p/\rho$, 而 p 是压力, ρ 是常数质量密度, g 是重力加速度。(2.2)和(2.3)中的迁移项。本文中的形式是合并(2.1)式所得为

$$(2.4) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru^2)}{\partial r} + \frac{\partial(uv)}{\partial z}$$

$$(2.5) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ruv)}{\partial r} + \frac{\partial(v^2)}{\partial z}$$

众所周知, 对于线性化的原型方程如果在(2.2)和(2.3)中时间离散为显式向前, 用中心差分近似迁移项, 则差分方程是不稳定的。但是, 如果除了通常的库朗条件外, 再对方程附加一个充分大的类似于粘性的阻尼项, 则差分方程将变为稳定的。类似的情况下, Hirt [19] 已经在一个论证性的稳定性分析中证明过, 中心有限差分引进负粘性项那样的误差项, 对于稳定性而言这些负粘性项可用对动量方程引进一个数值粘性 γ 来加以平衡。于是计算程序采用的动量方程的最后形式为

$$(2.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru^2)}{\partial r} - \frac{\partial(uv)}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

和

$$(2.7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ruv)}{\partial r} - \frac{\partial v^2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + g$$

为了使方程稳定, 式中利用 [5] 中描述过的符号, 即

$$v \geq 0.7 \left[(\Delta X)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right]_{\max}, \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta X)^2_{\min}}{v}$$

将连续性方程 (2.1) 对 t 求导, 并以动量方程 (2.6) 和 (2.7) 代入所得的方程后得

$$(2.8) \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -Q$$

式中已消去粘性项, Q 恰好是迁移项的散度。我们有

$$(2.9) \quad Q = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ru^2)}{\partial r} + \frac{\partial (ru^2)}{\partial r} + \frac{\partial (uv)}{\partial z} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ruv)}{\partial r} + \frac{\partial (v^2)}{\partial z} \right]$$

当 u 和 v 已知时, 式 (2.8) 是对 ϕ 的泊桑方程。

2. 边界条件

由于固体壁面是不可渗透的, 且流体被认为是无粘性的, 故在刚性壁面的相应的边界条件是“自由滑动”条件, 即在壁面上只有速度的法向分量等于零。当数值粘性 v 不等于零时, 为了在刚性壁面上获得一个附加条件, 我们需要令该处的粘性应力 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial r$ 为零。对称轴上的速度边界条件与前面刚性壁面上的边界条件一样, 因为我们有 $u = 0$ 和 $\partial v / \partial r = 0$ 。

自由表面上的压力 p 是规定了的。在图 1 中的空气表面上, p 被假定为一个恒定的外加强力, 即一个大气压。在气泡的表面, 压力 p 由状态方程给定, 比如像气体的绝热方程 $p v^\gamma = \text{const}$ 。在一个固体边界上的压力边界条件由动量方程及速度边界条件得到。例如在一个垂直壁上, 由于 $u = 0$, $\partial u / \partial t$, $u \frac{\partial u}{\partial r}$ 和 $\partial u / \partial z$ 均在 (2.1) 中消失了, 于是相应的条件为 $\partial \phi / \partial r = 0$ 。类似地, 在水平壁面上有 $\partial \phi / \partial z = g$ 。

此外, 接近或位于自由表面的速度, 通过动量方程 (2.2) 和 (2.3) 中的 $\partial \phi / \partial r$ 和 $\partial \phi / \partial z$ 项, 受自由表面的压力条件所限制。

3. 计算程序的发展

方法的发展建立在由 Chorin [20] 开创的程序的基础上。这个发展相当于一个通常的, 但是在固体边界上更合乎规律地得到对压力的差分方程。

在本文所讲到的 MAC 法中应用了一个不均匀网格, 如图 2 所示, 还把在图 3 中所示的位置上的流量之值求出来了。这样就计算了一个格子内部的压力值, 计算了垂直边缘上的 u 和水平边缘上的 v 。

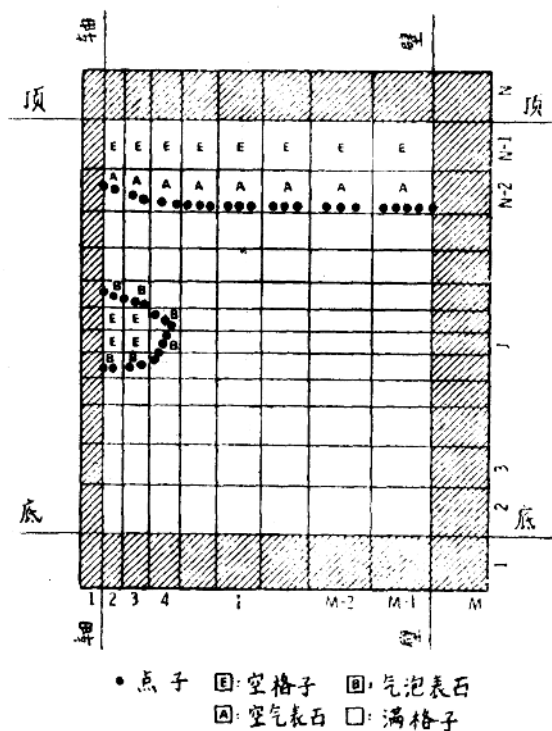


图2 计算网格

设 D 表示通常近似估算连续方程(2.1)的离散的散度算子, 设 $\bar{G}$ 表示通常求算(2.6)中的 $\partial\phi/\partial r$ 和(2.7)中的 $\partial\phi/\partial z$ 的离散的梯度算子。设 $\bar{W} = (u, v)$ 。利用图3中建立起来的符号, 我们对这些算子的近似估算为

$$(2.10) \quad (D\bar{W})_{i,j} = \frac{r_{i+1/2} u_{i+1/2,j} - r_{i-1/2} u_{i-1/2,j}}{r_i \Delta v_i} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta z_j}$$

及

$$(2.11) \quad \bar{G}\phi = (G_r\phi, G_z\phi)$$

式中

$$(2.12) \quad (G_r\phi)_{i+1/2,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta r_{i+1/2}}$$

$$(2.13) \quad (G_z\phi)_{i,j+1/2} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta z_{j+1/2}}$$

利用一个在每一时间步长内保证稳定性的时间增量 Δt 用前差分来代替对时间 t 的导数, 我们

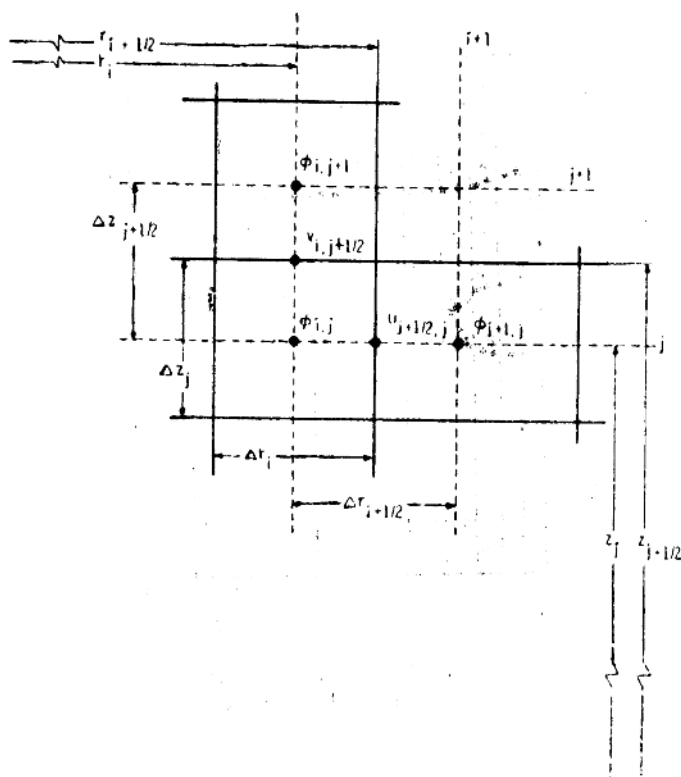


图3 格子名称

以符号形式写出对 (2.6) 和 (2.7) 的一阶近似为

$$(2.14) \quad u_{i+1/2,j}^n = u_{i+1/2,j}^n - \Delta t^n [C_z + G_z \phi - g - \Lambda_z]_{i+1/2,j}^n$$

$$(2.15) \quad v_{i,j+1/2}^n = v_{i,j+1/2}^n - \Delta t^n [C_z + G_z \phi - g - \Lambda_z]_{i,j+1/2}^n$$

式中的注脚代表第 \$n\$ 个时间水准, \$(C_r)_{i+1/2,j}\$ 和 \$(C_z)_{i,j+1/2}\$ 为离散的迁移项, \$(\Lambda_r)_{i+1/2,j}\$ 和 \$(\Lambda_z)_{i,j+1/2}\$ 为离散的阻尼项。本计算中所用的对迁移项和扩散项的差分近似属于 Pritchett [5], 但在图 3 中所示网格上 [5] 中的迁移项不是一阶的。所以, 本计算不能表出应变变量新位置的影响。但是, 对不同例子的计算结果与具有完全一阶的方程组的近似计算 [5] 进行比较后, 表明在气泡剖面和气泡周期有少量差异。

如果我们写成

$$(2.16) \quad u_{i+1/2,j}^{n,x} = u_{i+1/2,j}^n - \Delta t^n [C_r - \Lambda_r]_{i+1/2,j}^n$$

$$(2.17) \quad v_{i,j+1/2}^{n,x} = v_{i,j+1/2}^n - \Delta t^n [C_z - g - \Lambda_z]_{i,j+1/2}^n$$

则

$$(2.18) \quad u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^{n,x} - \Delta t^n (G_r \Phi)_{i+1/2,j}^n$$

$$(2.19) \quad v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^{n,x} - \Delta t^n (G_z \Phi)_{i,j+1/2}^n$$

质量守恒 (2.1) 的要求为

$$(2.20) \quad (D\bar{W})_{i,j}^{n+1} = 0$$

将 (2.18) 和 (2.19) 代入 (2.20) 后对每一个格子 (i, j) 给出

$$(2.21) \quad (D\bar{G}\Phi)_{i,j}^n = (D\bar{W}^{n,x})_{i,j} / \Delta t^n$$

如果另外我们还要求 $\bar{\Lambda} = \Lambda_r, \Lambda_z$ 以使 $D\bar{\Lambda} = 0$, 则 (2.21) 为类似于泊桑方程 (2.8) 的离散项。

关于图 2 和图 3 对有限差分网格的数值系统, 我们对每个流体格子 i, j 把 (20) 开拓为

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^{n,x} = 0 \quad \text{或} \quad v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^{n,x} = 0$$

当作附在刚性壁上。于是我们得到未知数为 $\Phi_{i,j}^n$ 的线性代数方程组

$$(2.22) \quad \alpha_{1,j} \Phi_{i,j-1}^n + \beta_{1,i} \Phi_{i-1,j}^n - (\alpha_{1,i} + \alpha_{2,j} + \beta_{1,i} + \beta_{2,j}) \Phi_{i,j}^n + \beta_{2,i} \Phi_{i+1,j}^n + \alpha_{2,j} \Phi_{i,j+1}^n = R_{i,j}$$

式中

$$(2.23) \quad R_{i,j} = D(\bar{w}^{n,x})_{i,j} / \Delta t$$

$$(2.24) \quad \alpha_{1,j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z_j \Delta z_{j-\frac{1}{2}}}, & j = 3 \text{ 至 } N-1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$(2.25) \quad \alpha_{2,j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta z_j \Delta z_{j+\frac{1}{2}}}, & j = 2 \text{ 至 } N-2 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$(2.26) \quad \beta_{1,i} = \begin{cases} \frac{r_{i-1/2}}{r_i \Delta r_i \Delta r_{i-1/2}}, & i = 3 \text{ 至 } M-1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$(2.27) \quad \beta_{2,i} = \begin{cases} \frac{r_{i+1/2}}{r_i \Delta r_i \Delta r_{i+1/2}}, & i = 0 \text{ 至 } M-2 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

这个方程组自动地包括刚体壁上的压力边界条件, 如下面所指出并等于由更常规的导数产生的方程组。再者方程组 (2.22) 至 (2.27) 立即引起一个有效的算法, 因为执行边界条件只须令包含系数 $\alpha_{k,i}$ 和 $\beta_{k,i}$ 的排列中的适当位置等于零。

在通常的MAC法的发展中,利用引进一层邻近边界的“虚构的”格子以便离散五个点的拉普拉斯方程, $D\bar{G}\phi$, 既包括邻近固体边界的格子,也包括内部的格子。对法向求导的边界条件作近似估算的有限差分,用位于虚构的格子中的以及在邻近的边界格子中的压力来表示。把这个方程与对内部边界格子的五个离散点的拉普拉斯方程合并起来加到压力的边界条件上去,以便给出一个不包括虚构格子的压力表达式。我们要在下面证明这等价于边界 $Z=0$ 处的Chorin的程序。

在底部 $Z=0$, 将 $V=0$ 代入 (2.3) 式给出诺曼条件 $\partial\phi/\partial z = g$ 。利用如图 3 所示的一行虚构位于底部以下的格子,我们可以用下式近似这个条件

$$(2.28) \quad \frac{\Phi_{1,2} - \Phi_{1,1}}{\Delta Z_{3/2}} = g$$

或

$$(2.29) \quad \Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} - g\Delta Z_{3/2}.$$

引进虚构的格子后,在底部的一排格子, $j=2$ 和 $3 \leq i \leq M-2$, 其通常的离散压力的泊桑方程与具有 $\alpha_{1,2}$ 的 (2.22) 式相同,不过 $\alpha_{1,2}$ 要代之以

$$(2.30) \quad \alpha'_{1,2} = \frac{1}{\Delta Z_2 \Delta Z_{3/2}},$$

而 $R_{1,2}$ 须代之以

$$(2.31) \quad R'_{1,2} = (D\bar{W}^{aux})_{1,2}/\Delta t.$$

在方程 (2.31) 中,速度的标准内部形式 (2.17) $V^{aux}_{1,3/2}$ 用以构成表达式 $(D\bar{W}^{aux})_{1,2}$ 。注意到在边界上 $(C_z)_{1,3/2} = 0$, 于是我们得

$$V^{aux}_{1,3/2} = (g + \Lambda_z) \Delta t.$$

将 (2.29) 式代入变了形的 (2.22) 式后,我们得到满足底部格子的有限差分方程

$$(2.32) \quad \beta_{1,i} \Phi^n_{i-1,2} - (\alpha_{2,2} + \beta_{1,1} + \beta_{2,1}) \Phi^n_{i,2} + \beta_{2,i} \Phi_{i+1,2} + \alpha_{2,2} \Phi_{i,3} = R'_{i,2} + \alpha'_{1,2} g \Delta Z_{3/2},$$

为了证明 (2.32) 式对底部格子是相同的,我们需要证明

$$(2.33) \quad R'_{1,2} + \alpha'_{1,2} g \Delta Z_{3/2} = R_{1,2}.$$

从 (2.23) 式,我们有

$$(2.34) \quad R_{1,2} = \left\{ \frac{1}{r_1 \Delta r_1} \left[r_{1+1/2} (u - c_r \Delta t)^{n_{1+1/2,2}} - r_{1-1/2} \cdot (u - c_r \Delta t)^{n_{1-1/2,2}} \right] + \frac{1}{\Delta Z_2} [V - \Delta t (C_z - g)]^{n_{1,5/2}} \right\} / \Delta t.$$

为了使 $D\bar{A} = 0$, 引出

$$(2.35) \quad R'_{1,2} = \left\{ \frac{1}{r_1 \Delta r_1} [r_{1+1/2} (u - C_r \Delta t)^{n_{1+1/2,2}} - r_{1-1/2} \cdot (u - c_r \Delta t)^{n_{1-1/2,2}}] + \frac{1}{\Delta Z_2} [V - \Delta t c_z]^{n_{1,3/2}} \right\}.$$

最后,从 (2.34), (2.35) 及 (2.30) 可得 (2.33) 对轴、壁及顶格子的类似分析表明,方程 (2.22) 至 (2.27) 与通常的MAC程序是等价的。

4. 离散的拉普拉斯方程的精确度

在推导原型的MAC法时,压力被定义在格子的中心,速度的水平和垂直分量相应地被定义在垂直边和水平边的中心。下面将指出,差分方程的某些项,对任意分布格子,当格子的最大尺寸变为零时,对于一阶而言是不正确的。但是,当压力和速度的分量定义在如图3所示的点上时,这些项变成对一阶而言是正确的,特别是当保持如(2.21)式那样的一个梯度的散度形式时,离散的拉普拉斯方程是一阶的。对于等距离分布的网格,原来的位置和新位置当然是一样的。如在图3中压力被定义的那些点是这样的点,即连接两相邻点的直线的中点是在格子的边上;而且一个径向或垂向速度分量,如情况可能的话,被定义在这个交叉点上。当规定了压力的定义点时,这样的一个网格唯一的被确定了。

为了证明这个变更是正确的,我们来考虑一维算子 $\partial^2\phi/\partial z^2$ 。泰勒级数的一阶近似值为

$$(2.36) \quad \Delta^T_{1,j}\Phi = \left[\frac{\Phi_{1,j+1} - \Phi_{1,j}}{\Delta z_{j+1/2}} - \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{1,j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \right] / \left[\frac{\Delta z_{j+1/2} + \Delta z_{j-1/2}}{2} \right]$$

为了满足像(2.21)式中 $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ 在数值上就是 $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \right]$ 这个准则,通常的MAC法近似为

$$(2.37) \quad \Delta^M_{1,j}\Phi = \left[\frac{\Phi_{1,j+1} - \Phi_{1,j}}{\Delta z_{j+1/2}} - \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{1,j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \right] / \Delta z_j$$

用原来的公式表示时,压力被定义在格子的中心,MAC法的表达式(2.37)与泰勒级数的表达式(2.36)有下面的关系式

$$(2.38) \quad \Delta^M_{1,j}\Phi = \Delta^T_{1,j}\Phi \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta z_{j+1} + \Delta z_{j-1}}{4\Delta z_j} \right]$$

括弧内的值欲为1,仅当

$$(2.39) \quad \Delta z_j = \Delta z_0 + (\Delta z_1 - \Delta z_0) j,$$

上式包括像一个球那样的情形的非均匀分布网格。需要时还可以代以

$$(2.40) \quad \Delta z_j = \frac{1}{2} [\Delta z_{j+1/2} + \Delta z_{j-1/2}]$$

(2.36)和(2.37)就变成相等的。这个方程以及一个对 γ_1 的类似的方程一起,定义了如图3所示的应变量的新的定位。

我们要指出,(2.38)式的括弧中的表达式当网格的尺寸变得足够渐缓时将保持接近于1。

5. 线性代数方程组的解

方程组(2.22)用逐步超松弛法(SOR)解出。原型的MACYL编码对所有的边界和满格子利用了(2.21)中五点形式的离散拉普拉斯方程。利用了附加的线性方程使之满足边界条件,其中包括在虚构格子内的压力,同时也包括在垂直壁上和对称轴上的类似的方程。伟伯曾证明[21],当利用SOR法来解这个扩大的方程组时,其解可能发散,这一点我们用数值方法证明了。另一方面他还指出,方程组(2.22)至(2.27),或者例如像(2.32)那样的等价式子,为了使SOR法收敛须满足适当的条件(例如像[22]所给出的)。

在水下爆炸气泡的计算中, 给定时间的泊桑方程的压力解是利用此时间之前的解作为一个初步的猜测。当利用径向格子点 M 和垂向格子点 N 时, 我们发现所需的迭代次数对于均方根相对误差为 10^{-4} 时, 大概等于 $\max(M, N)$ 。

6. 边界条件的数值处理

a. 边界区域

解方程的定义域为四个固定边界, 轴、壁、底、顶和自由表面。自由表面是由一个顺序排列的无质量标记点所构成。开始时, 这些点子在已知位置输入, 然后在每个时间步长按当地速度移动。每点位置上的速度分量用内插法计算, 假定速度分量在格子速度的定义点之间作线性变化的话。计算时需要像图 1 中图解方式表示那样, 对空格子、表面格子和满格子加以区别。一个给定格子的式样用一面旗子表示, 它在本程序中是一个与格子相联系的符号整数。当点子移动后, 格子在每个时间步长重新插上旗子。

由海军研究局主办的研究中, Berger 和 Vander Vorst [23] 利用具有限制在有限差分的网格内的直线三角元的有限元法解出了泊桑方程 (2.8)。他们的这个研究发展了一个以便从标记点的位置形成一个对表面形成多边形近似的程序。这个多边形表面包括一个直线段如此连接起来的序列, 如图 4a 所示, 以便每个表面格子只包含一个这样的线段。在本编码中多边表面被利用来计算表面法线以及构成将在本节的后面叙述的不规则星形。另外, 也用来计算物态方程中的气泡的体积。应用这个多边形表面有两点理由。第一点也是最重要的一点, 它比标记点表面在计算上叙述和讨论起来更为有效, 因为多边形表面每个格子只有一个线段。第二点, 如果格子的编排变得非常不规则, 我们能应用多边形表面将点子分布在多边形上面, 以光滑质点表面。

b. 速度边界条件

为了使所述问题的有限差分法满足速度的边界条件, 我们根据通常的 MAC 研究方法在邻近刚体的和对称轴附近引进虚构的格子。决定这些虚构的格子点处的流动量时, 要使得有限差分方程以及有限差分形式的边界条件二者都是满足的。

为简化起见, 我们不采用特殊的表面附近向后的差分去计算动量方程 (2.14) 和 (2.15) 的迁移项 $\bar{C}$ 和阻尼

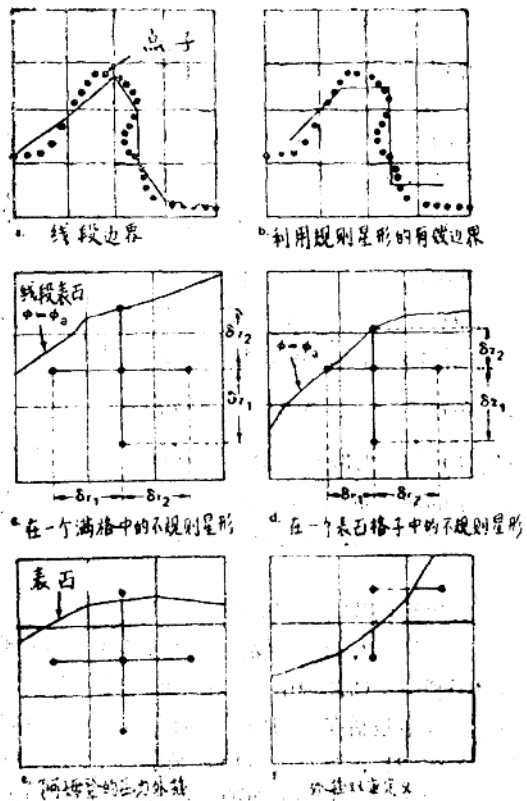


图 4 自由表面的边界条件

项 $\bar{\Lambda}$ ，而是用从一表面的一个法线方向线性外插将速度场横过计算的多边形表面开拓。原型的MAC法[3]和后来的SMAC法[7]以及MACYL法[5]的编码把这些速度放置在一个表面格子的空面上，使得离散的散度消失，犹如格子是完全满的。另一方面chan和Street[10]沿格子线引进外插法来计算这些速度。他们发现，对于水波问题线性外插比在表面格上设 $\bar{D}\bar{W}=0$ 所获得的结果更好。Shere和Vander Vorst [15]应用SMAC编码的变体来计算具有一个平面表面的大质量水，以高速度冲击一个垂向柱体时所产生的流动，获得了同样的结论，他们变化SMAC编码是为了使速度场可以用外插法加以开拓。在他们的那种情况下，当速度场用强化表面格子的零散度加以开拓时，非物理性的高速度发生在水质量与柱体冲击的时候，而计算不能再继续下去了。但是，当速度场用线性外插开拓时，最后的流动与实验相符。对于水下爆炸的问题，我们发现沿表面法线方向的外插比沿格子线的垂直方向或者水平方向外插所得的结果略微好些。

C. 压力边界条件

正如早先已经指出的那样，对于垂直方向和水平方向的刚体边界诺曼边界条件在方程组(2.22)至(2.27)是绝对地满足的。但是，狄里希里条件， $\Phi = \text{常数}$ ，在自由表面上必须仍然是满足的。SMAC和MACYL编码利用在全部空气表面格子的中心处固定 $\Phi_{i,j} = \Phi_a$ ，以及在气泡表面的中心处使 $\Phi_{i,j} = \Phi_b$ ，来完成这个条件。离散的泊桑方程(2.22)仅在满格子上实施，亦即，在对于四邻为表面或为满格子上实施。这就给出一个连接表面格子中心的有效计算的表面，如图4b所示。MACBUB编码对多角形表面近附的差分(2.8)利用不规则星形技术执行自由表面的边界条件。“规则星形”方程(2.22)应用于满格子以使四邻的中心位于流体中。在所有其它的情况下，一个表面线段切断格子或旁边的格子，以使一个或更多的四个邻近格子位于流体之外。像这样的两个例子示于图4。对于这些不规则格子，应用图4中建立的术语，我们把泊桑方程(2.9)以一阶来近似并作为不规则星形方程

$$(2.41) \quad \frac{1}{r_i} \left[(r_i + r_2') \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\delta r_2} - (r' + r_i) \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{r_i} \right] / \\ (\delta r_i + \delta r_2) + \left[\frac{\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}}{\delta z_2} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\delta z_1} \right] / \left[\frac{\delta z_1 + \delta z_2}{2} \right] \\ = R_{i,j}.$$

我们有

$$\delta r_i = \begin{cases} \Delta r_{i-1/2} & \text{如果}(r_{i-1}, z_i) \text{在流体内部} \\ = r_i - r_s & \text{其它处所} \end{cases}$$

式中 r_s 为 $z = z_i$ 时 r 在多角形边界上的值，对于 δr_2 , δz_1 和 δz_2 也有类似的情况。 $\Phi_{i+1,j}$, $\Phi_{i-1,j}$, $\Phi_{i,j-1}$ 和 $\Phi_{i,j+1}$ 中的任意一个量等于该处作用的表面压力。我们看到在一个规则星形的情形下(2.41)式变为(2.22)。在本文的计算中，利用同样的程序，既在满格子中也在部分满的格子中计算 $R_{i,j}$ 。这个程序对于部分满的格子是不正确的，并且发现可能在气泡的表面造成某些困难。一个更为正确的在部分满的格子内计算 $R_{i,j}$ 的方法已经由Vander Vorst和Rogers [24] 发展起来，但尚未在气泡计算中加以应用。

为一致起见，不规则星形程序也要求压力梯度 $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 的近似式(2.11)和(2.12)对

星形的不规则也加以改写。例如在图6.a中

$$(2.42) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2} = \frac{\phi_a - \phi_{i,j}}{\delta z_2}.$$

图 5 给出了应用和不应用不规则星形进行计算的一个比较。Amsden [8] 概括了一个对实施不规则星形方法的另一个程序, 它比Chan和Street 程序计算起来更为有效。他们对中心在流体中的所有的格子应用规则星形方程; 然而, 如图 4 e所示, 在每个SOR 扫描的开始, 中心恰好位于表面外的格子的压力由一个越过表面垂直方向的线性外插所分配。这些外插的压力用来作为下一步迭代的边界值。

在此以前, 我们已经单独地由两点理由拒绝这种开拓的程序。第一点, 更为复杂的水

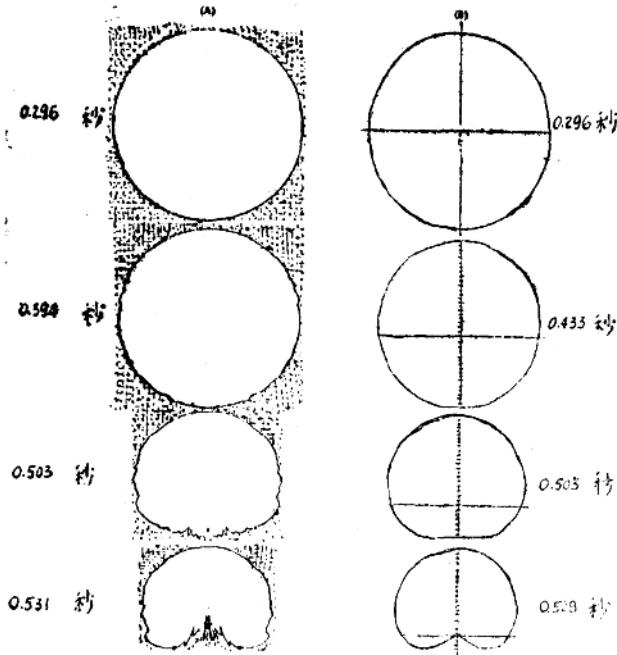


图 5 在80.8呎深处一个354磅TNT炸药的气泡剖面

(A) 应用规则星形和沿格子线外插 (B) 应用不规则星形和正规外插的剖面

下气泡的几何要求压力的外插可以在水平方向或者垂直方向进行。在某些这样的情况下, 如图 4 f所示, 一个外插的压力可能双重地加以决定, 比如从上面和从左右面。第二点, 一个类似于威伯 [21] 的分析预计到SOR迭代可能是发散的, 除非应用一个充分小的超松弛因子。关于这一点可以对不规则格子利用一个比规则格子更小的超松弛格子加以克服, 但是这将反过来对算法增加一定程度的复杂性。

III. MACBUB计算程序

为了对一问题进行求解,我们实际上需要考虑四种不同的计算程序:MACEDIT, MACIN, MACBUB和MACPLT。

MACEDIT是一个小程序,利用它把所有的FORTRAN尺度语句转变为其它三个程序,以便使一个特殊的问题与所需要的有限差分网格的大小相对应。

MACIN在一个磁带上产生零循环的初始数据。对这个程序的输入包含描述计算问题的初始状态所需要的全部参数,它们包括网格的大小,网格格子的尺寸,气泡位置,气泡半径,气泡的迁移率,气泡的膨胀率(或收缩率),自由表面位置,以及自由表面与内部标记点的数目和位置。

MACBUB是一个主程序;它对于MAC法的解可概括为下列O至12个步骤:

O. 读入运行参数:开始的循环;结尾的循环,光滑循环或不光滑循环,超松弛因子;最大的迭代次数;库朗数;打印频率;信息转储频率;SOR精度参数。在开始循环从磁带上读得初始数据。

1. 增量循环计数器。
2. 从点子求得多边形自由表面。
3. 如果此循环须加以光滑,将点子放到多边形表面上。
4. 对不规则星形格子计算压力系数(2.37)并对那些格子加上标签。
5. 由(2.16)和(2.17)计算辅助速度。
6. 计算不均匀的泊桑项R(2.23)。
7. 用SOR法在(2.22)和(2.37)上重复求取压力,直至所得的解在所需的相对误差范围内或者最大的迭代已经完成时为止。
8. 利用(2.18)和(2.19)从辅助速度求得新速度。
9. 用法向的外插法开拓速度。
10. 以当地的流体速度移动点子。
11. 信息转储到磁带上,或者按计算机的要求印出。
12. 如果循环不等于结束循环,再回到第一步,否则就停机。

MACPLT程序读出由MACBUB产生的磁带,并在一个静电给迹器上产生点子,等压线和矢量图线。

IV. 水下气泡的计算

1. 计 算

已经在许多文献中发表过用实验法、分析法和数值法确定因炸药引起的水下爆炸所产生的流体的流动问题。由海军研究局[25]编选的研究报告纲要代表至1950年为止的历史成

果。Snay和他的同事们曾经对许多试验以及一维和准二维的分析作出过贡献。

对于在不可压缩流动中的纯粹的径向流动，由一个水下爆炸产生的气泡的半径满足微分方程

$$(4.1) \quad r \ddot{r} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 - \frac{1}{\rho} [p(r) - p_{\infty}] = 0$$

(见 (Cole[29], 273页), 式中 $r(t)$ 为时间 t 时的气泡半径, $p(r)$ 为气泡内的压力, 而 p_{∞} 为无穷远处的压力。气泡内的压力 $p(r)$ 当爆炸产生的物态方程已知时能够算出。一个常用的等熵过程的物态方程为 $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, 式中 p_0 和 ρ_0 为某一初始时的压力和密度, γ 为一常数。在这种情况下, $p(r) = p_0 r_0 / r^{\gamma}$, 式中 r_0 为初始的气泡半径。给出 $\dot{r}(0)$ 和 $r(0)$ 的值后, 对 r 的方程可用数值法解出[30]。这样的解表示在图6中, 它对应于水深81呎处354磅TNT炸药产生的爆炸气泡的情况, 式中 p_{∞} 取为等于在爆炸深度处的静水压力。给定的函数 $p(r)$ 如上面提到的, 而 p_0 , r 和 $r(0) = r_0$ 如图6所示, $\dot{r}(0) = 0$ 。

对于包括重力和水表面影响的轴对称流动已经用MACBUB对水深81呎处354磅TNT炸药产生的爆炸气泡的情况进行过计算, 爆炸产生的物态方程具有 $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$ 的形式。计算从气泡的第一个极大值开始, 利用了由Snay [31] 所提供的 γ 值和初始条件。所用的参数为:

$\gamma = 1.25402$

第一个极大值的时间 = 0.296037秒

气泡半径 = 18.8943呎

气泡压力 = 2.08412磅/吋²

迁移速度 = 11.8231呎/秒

初始条件由Snay用一个近似分析法算得, 这时设气泡保持球状。一直到第一个极大值, 气泡几乎保持球状。作为MACBUB计算的第一步, 算出具有上述半径的、以给定的迁移速度向上移动的球的运动引起的在水中的格子点速度, 计算时利用了从位势理论得来的熟知的结果, 例如在文献 [25] 的136页给出。

第一个极小值附近的压力是这样的, 即水应被认为有少许的可压缩性。但是, 本计算是通过作为不可压缩的第一步极小值连续下来的, 并且在第一个极小值处能量没有像在 [5] 和 [6] 中那样被减去。

图7表示水深81呎处354磅TNT炸药爆炸按比例排列的一系列照片。图8和图9表示刚才讲到的由MACBUB计算得到的气泡剖面图和等压线。在图8和图9中的参考线的痉挛记号代表格子的分布。正如图8所示, 气泡在其第二次膨胀期间保持环状。当重力的影响足够大

时这个环状的持环状。当重力的影响足够大时这个环状的持久性由Pritchett([32], 423页)提到过。这个圆环形状看来就是本试验的另外一张照片中[27]从气泡顶部喷射出遗迹卷流的原因。图 8 中在第二次收缩期间, 一个第二次的圈状射流在气泡的下部形成。第二个极小值

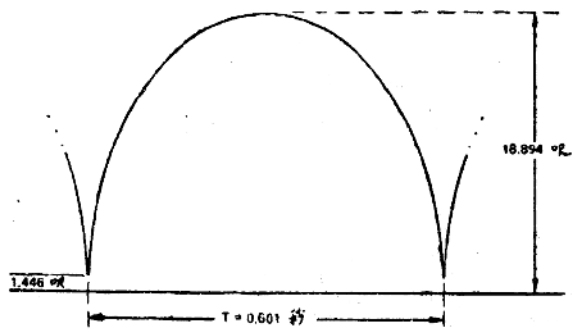


图 6 对81kg354磅TNT炸药的周期性球形非迁移解

来到之前, 这个第二次射流交迭在原来的射流上面, 形成一个单一的射流。同样的理由, 在第一个收缩期间料想会形成一个射流, 但是这个现象似乎难以用实验观察到。在本计算中, 气泡会继续脉动和迁移直至到达表面。我们停止对靠近第二个极小值附近的示范性计算, 只是因为气泡已经迁移到有限差分网格要充分解析气泡是过于粗糙的区域了。

因为几个条件的关系, 把计算与试验

结果作比较是困难的。第一, 与我们的计算相对应的比例试验的实验压力数据由于缺乏适当的仪器而未取得。压力数据对于某些全尺度试验是可以得到的, 但是没有拍到关于它们的照片。此外, 由于爆炸的产物和碎片, 气泡是不透明的, 所以气泡的剖面难以阐明。最后, 如图所示的实验是在按比例条件下完成的, 而对应的计算, 如图 8 和 9 则是对全尺度下爆炸的情况的。所以, 换算规律的正确性常常渗入到比较中去了。把图 7 中的实验剖面与图 8 中的计算作了一个比较, 说明符合程度约为10%。

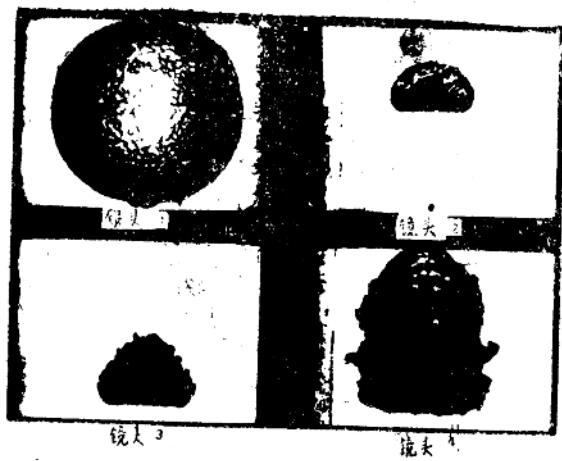


图 7 一个水下爆炸形成的气泡