参83003

概率论及随机过程在海军的应用

熊渠生　汤庆森

中国人民解放军海军学院训练部

一九八三年二月

说　　明

本书原系为一九八二年教员概率集训班编写的两份讲稿：《随机事件与概率》、《简单随机过程》根据训练部领导的指示，在原讲稿基础上略加修改，合为一本书出版，供教员学习研究参考。由于时间仓促，水平有限，错误之处在所难免，希望提出宝贵意见

编　　者

一九八三年二月

目　　录

前　言

概率论是一门从数量侧面研究随机现象（偶然现象）规律性的数学学科。

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象。一类称之为确定性现象。它是指某些事情在一定的条件下必然会发生或不发生。例如，重物在高处总是垂直地落到地面；在标准大气压下，水加热到100℃时必然会沸腾；某军舰以定速V从甲港驶往乙港（距离为S），经过时间$t = S/V$后，则必然到达乙港，等等。这些现象属于确定性现象。研究确定性现象所应用的数学工具是几何，线性代数和微积分学等。

但是，在自然现象和社会现象中，也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象，通常叫做随机现象（或偶然现象）。它是指某些事情，在基本条件不变情况下所进行的试验，有多种可能发生的结果，每次试验中有时发生这种结果，有时发生那种结果，无论发生怎样的结果都是随机变化的，无法事先确切地预见，即呈现出不确定性。例如，在一定条件下，用同一门舰炮射击某个目标，可能命中，也可能不命中，这是一种随机现象。导弹艇突击群对敌驱逐舰编队进行攻击，当突击群到达攻击出发阵位雷达开机时，可能发现预定目标，也可能未发现预定目标；而当发现预定目标后对其齐射一定数量的导弹时，所齐射的导弹可能全部工作正常，也可能有的发生故障；未发生故障的导弹，有的被敌编队抗击掉，有的可能命中了预定目标；而命中的导弹可能是一枚，也可能是数枚。在上述各种行动中，每一种结果的发生都是随机变化的，事先不能确切知道的。

从孤立地表面地看随机现象，好似纯受偶然因素支配，杂乱无章，毫无规律性。但事实上，在一定条件下大量的同类随机现象却有完全确定的明显的规律性。例如，在射击中，在同样条件下，当射击次数不大时，弹着散布没有什么显著的规律性；当射击次数增多时，分布就开始呈现一些规律性，射击次数越多，规律性越清楚，即服从椭园形的正态分布。这说明个别随机现象虽然是无规律的，但大量性质相同的随机现象总是有统计规律性的。概率论就是在本质上对大量随机现象的研究，揭露出随机现象在数量上的统计规律性的。

概率论是随着自然科学技术的迫切需要而发展起来的，其理论日臻完善，内容丰富，广泛用于各个科学技术领域，工农业生产和军事上。本材料所介绍的内容，仅限于概率论的部分基本内容以及在军事上的某些应用，为今后同志们进一步学习概率论，进一步解决有关军事问题打下初步基础。

第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件及其概率

为了研究随机现象的规律性，我们首先要弄清随机现象的各种表现，或者说弄清随机现象可能出现的各种结果，为此要引入随机事件的概念。但是，在概率论中，随机现象与随机试验又是紧密相联的，经常是通过研究随机试验来研究随机现象的。为了叙述方面，我们先介绍什么是随机试验，尔后再说明随机事件的基本概念。

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验

通常，我们把对自然现象进行的观察或进行的各种科学试验，统称为试验。如果一个试验在相同条件下可以重复进行，每次试验前能事先明确所有可能结果，但究竟出现哪一个可能结果是不可能预言的，在概率论中我们就称该试验为随机试验，简称试验。

例如，在同样高度，同样外力作用下，投掷一枚均匀的硬币的试验，可以重复多次进行；它的可能结果是"正面朝上"，或"正面朝下"，这两种结果在试验前，我们是知道的；但一次试验中会出现那种结果，在试验之前是不可能预先确定的。又例如，在一定条件下，每次对目标齐射四发炮弹；或连续射击，直到摧毁目标为止，等等。我们将这类试验都看作随机试验。

2. 随机事件

随机事件是概率论中的一个基本概念，概率论是从这个基本概念开始研究和发展起来的，正好象"数"和"形"是数学的基本概念，数学就是从"数""形"这种基本概念开始研究和发展起来的一样。

在一定条件下的试验，可能发生或已经发生的一切结果，称为随机事件，简称事件。通常以大写字母A，B，C等表示。

例如，同样高度，同样外力作用下投掷一枚硬币，出现"正面朝上"或"正面朝下"都称为一个事件。前半句话讲的是在一定条件下进行的投掷硬币的试验；后半句话讲的是这个试验可能出现的结果。如果试验已经做了，出现了"正面朝上"，这也叫做事件。

又如，对敌驱逐舰齐射四枚导弹，可能"命中一发"、"命中2发"、"命中3发"、"命中4发"和"全不命中"，这五种可能结果都称之为事件。

我们从红、黄、绿、兰、白五色粉笔中，"任取一支是红色的"，"任取一支是白色的"，"任取二支是黄色、绿色的"，"任取三支是红、黄、兰三色的"，……等等，所有这些结果都可作为事件来讨论。

总之，凡是所要研究的问题，所要观察的随机现象的各种结果，在概率论中，都可作为

事件。其次，是要明确事件这个基本概念是与其随机试验的所有可能结果联系在一起的。

在试验中，它的每一个可能发生的结果都是一个随机事件，如果它们是最简单的随机事件，即不能再分拆的事件，我们称这些简单的随机事件为基本事件。例如，投掷一枚骰子，可能出现的每一个A_k（$k=1$，……，6）就是基本事件，从0～9十个数字里任抽一个数，每个B_i（$i=0$，1，……，9）也是基本事件。

一次试验中，除基本事件以外，其它的随机事件一般称为复合事件，它是由简单事件复合而成的随机事件。例如，投掷一枚骰子，"出现大于3的数"就是一复合事件，它是由A_4，A_5，A_6三个基本事件所组成，当且仅当这三个基本事件中有一个发生，则"出现大于3的数"这一复合事件就发生。同样"出现不大于3的数"也是一复合件。又如，在前面的抽数试验中，"抽到偶数"也是一复合事件，它是由B_2，B_4，B_6，B_8这四个基本事件所组成，当且仅当这四个基本事件中有一个发生，则"抽到偶数"这一复合事件就发生。

概率论中的事件可以是数量性质的，即试验结果可直接由测量或计数而得。例如弹着点偏离目标中心的误差，命中目标的弹数，合格品的件数等等。但是也可以是属性性质的，例如"发现敌机"，"没发现敌机"，"重伤敌舰"，"轻伤敌舰"，天气的风、雨、云、晴，某种东西的颜色等等。还有些事件可以是兼有数量性质和属性性质的，如同时考虑是否发现敌机和发现架数时，说"发现了敌机三架"；在导弹攻击中同时考虑命中弹数和受毁伤的程度时，而说驱逐舰"命中2发为重伤"，"命中3发为被击毁"，都属于具有数量和属性两重性质的事件。

在试验中必定会发生的事件叫必然事件（U）。例如，从一合白色粉笔中任取一支必然是白色的，是必然事件。又如一枚导弹命中敌舰弹药库发生爆炸，该敌舰被击毁是一个必然事件，以及在标准大气压下，纯水加热到100℃，必定会沸腾，这也是必然事件。

在试验中肯定不会发生的事件叫不可能事件（V）。例如，从一合白色粉笔中任取一支为红色的是一个不可能事件。又如在一个标准大气压下，纯水加热到100℃时会结冰，为不可能事件。对敌舰齐射二条鱼雷时"命中三条"为不可能事件。

必然事件和不可能事件实质上是确定性现象的结果，它不具有偶然性。但是把它们看作是随机事件的两种特例，即当作一种特殊的随机事件，对于我们讨论问题是很方便的。例如，在从0～9十个数字里任抽一个数和对目标齐射四枚导弹的试验中，"抽到的数小于10"，"命中数小于五"为必然事件，"抽到的数大于9"，"命中弹数为五"为不可能事件。

在随机现象中，某个试验的结果到底是什么？在试验前我们无法确切地推测到，于是我们改而问到：进行试验得到某一个具体结果的可能性有多大呢？这是可以回答的。首先，经验告诉我们，一般来说不同事件在同一试验中发生的可能性是有差异的，如对敌机发射三枚导弹，"命中3发"这一事件发生的可能性显然要比"至少命中2发"这一事件发生的可能性要小。但两者发生的可能性究竟差多少？需要有数量概念才能明确回答。另一方面，对事件可能性的大小给予客观的定量描述，是要通过大量重复试验才能获得的，因为个别的或少量的试验是体现不出事件的可能性的某种规律性的。为了对事件发生的可能性的大小作定量的描述，下面引入事件的频率和概率的概念。

二、事件频率和事件概率

1. 事件频率

设事件A在n次试验中发生了m次（称为频数），则比值$\frac{m}{n}$叫做事件A的频率，记作W（A）；即

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

显然，任何事件的频率是介于0和1之间的一个数，即

$$0 \leqslant W(A) \leqslant 1$$

如果A为必然事件，则在任何试验序列中，有m = n，所以必然事件的频率恒等于1，即W（U）= 1。如果事件A是不可能事件，则有m = 0，所以不可能事件的频率W(V)=0。

由频率的定义可知，某事件的频率不是一个固定不变的值，它是随着试验次数n的变化而取不同的值，时高时低，很不稳定。下面是投掷硬币试验结果。表中n表示投掷次数，m表示正面向上的次数，$W=\frac{m}{n}$表示正面向上的频率。

试验序号	n = 5		n = 50		n = 500	
	m	W	m	W	m	W
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

由上表看出，当投掷的次数较少时，正面向上的频率是很不稳定的。n = 5时，W在0.2～1.0之间摆动，但随着投掷次数增多，频率开始趋向稳定，波动区间进一步缩小，n = 50时，W变化范围在0.36～0.62之间；当n = 500时，W变化范围更进一步缩小，为0.488～0.524，频率也呈现出很明显的稳定性了。我们可以说，当投掷的次数充分大时，正面向上的频率在0.5这个数值左右作极微小的波动，也就是说当投掷成千上万次时频率几乎稳定在0.5附近，如下表所示。

试验者	n	m	W
Demorgan（德摩根）	2048	1061	0.5181
Buffon（蒲丰）	4040	2048	0.5069
	12000	6019	0.5016
Pearson（皮尔逊）	24000	12012	0.5005

由此得出：当试验次数充分大时，随机事件A的频率在一个确定的数值附近摆动，这种特性叫频率的稳定性。它揭示了隐藏在随机现象中的规律性，即统计规律性，能反映事件A发生可能性的大小。

2. 事件的概率

频率的重要意义在于：一方面它能一定程度地反映事件A发生的可能性的大小，另一方面它比较容易掌握。用频率来刻划事件A发生可能性的大小是直观的，但有缺点，因为它有随机波动性，不过当n很大时，W（A）趋近于一个确定的数量。这个确定的数量就是事件的概率。

定义　在不变条件下，重复作n次试验，记m是n次试验中事件A发生的次数。当试验的次数n很大时，如果频率$\frac{m}{n}$稳定地在某一数值p的附近摆动；而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈小，则称数值p为事件A的概率，记作

$$P(A)=p$$

当试验次数充分大时，事件A的频率W（A）正是在它的概率P（A）的附近摆动，这说明概率P（A）是频率W（A）的稳定值。例如投掷硬币的试验，0.5为"正面向上"的概率，它是频率的稳定值。通常，当试验次数充分大时，我们亦可以把事件A的频率W(A)当作概率P（A）的近似值。例如，在同一条件下，某射手对一目标重复射击，其命中目标次数、频率如下表所示。

试验序号	1	2	3	4	5	6
射击次数n	10	20	50	100	200	500
命中目标次数m	8	19	44	92	182	455
频率$W=\frac{m}{n}$	0.8	0.95	0.88	0.92	0.91	0.901

试验说明，当射击次数越多时，所得频率就越准确。因此，可以认为某射手命中目标的概率为0.9是比较适宜的。

因为必然事件的频率总等于1，所以说必然事件的概率等于1，即P（U）＝1；又因为不可能事件的频率总等于零，所以不可能事件的概率等于零，即P（V）＝0。这样，任何事件A的概率满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

需要着重指出的是，事件的概率反映了大量随机现象中的某种客观属性，这种客观属性与我们认识主体无关。离开了大量次数的试验，就个别或少数试验来谈事件的概率是没有现实意义的，因为个别现象不是发生就是不发生，不能反映事件本身固有的概率。例如，投掷一枚

硬币，就投掷一次或连续投掷几次而言，完全有可能出现“正面向上”，但决不能因此而得出“正面向上”的概率为1。也正如某一次导弹打靶试验，决不能因为3发3中而得出命中概率为1的情况一样。因为这些试验的次数是少数的或很有限的，只能说在该条件下的试验这个事件发生的频率为1，或者说出现率为1。我们说某种导弹的命中概率为0.7，是指在同样条件下进行多次射击中，平均每100发有70发命中目标，有30发不命中目标，但就某次射击的结果而言，只能是命中或不命中，而不可能是七分命中目标，三分不命中目标。

事件概率反映的虽是大量随机现象的客观属性，但是它能预见个别随机事件发生的可能性，对每一次具体试验有指导意义。例如，投掷硬币的试验中，“正面向上”或“正面向下”的概率是0.5。0.5的概率告诉我们，在同样条件下，在一次投掷中，“正面向上”或“正面向下”的可能性是相等的。导弹命中目标的概率为0.7，说明按照指定的同样条件或更好的条件下进行射击，每次命中目标的可能性有70%，如果齐射的导弹数量较大时，则命中目标的可能性70%就有较大的把握了。如果有另一种射击诸元时其命中概率为0.5，显然我们应该用命中概率为0.7时的射击诸元进行齐射。讲概率一定要注意它的可能性而不能将其绝对化，如鱼雷的命中概率为0.33，就统计而言，0.33这个值是可信的，但决不能断言齐射三条鱼雷肯定命中一条。因为在实际发射时，有时随机因素的影响是很大的，也可能是预想不到的，从一次攻击效果来看，可能命中一条，或2条，或3条，或全不命中，每一种结果都可能发生。因此，我们在进行兵力计算时，只要可能，就应配备有一定突击威力的预备兵力。

第二节　古典概型

本节介绍概率的直接计算方法。

一、古典概型

进行大量的试验和观测，用事件频率来估计事件概率，这是决定事件概率的统计方法。上面介绍的概率的定义，它既是概念，同时又是计算事件概率的统计近似方法。但是在一些特殊情况下，对有些最简单随机现象的事件的概率可以通过直接计算来求得。这种最简单随机现象问题本身具有某种“对称性”，由于这种“对称性”的存在，它能使随机现象的各种结果出现的可能性可以认为是相同的或几乎相同的。例如投掷硬币的试验，由于硬币的匀称性，或者对称性，使得出现“正面向上”或“正面向下”的可能性相等，而投掷一枚硬币这种最简单的随机现象只有两种结果，其概率都为0.50。再如，投掷一颗正六面体的骰子，由于其对称性，每一面（字）向上的可能性是相同的，而这种随机现象有6种可能结果，故每一面向上的概率为$1/6$。

例1　从外形、大小、重量完全一样的4发信号弹（红色2发、绿色2发）中，任取2发，问2发全是红色的概率是多少？

解　为了直观分析的方便，我们给4发信号弹编上号码：1，2，3，4，（1，2为红色，3，4为绿色）。因为取法是“任意”的，即“随机”的，取2发时有下列结果：

"1，2"；"1，3"；"1，4"；"2，3"；"2，4"；"3，4"。共有6种结果。每一种结果发生的可能性是相同的，都有1/6的机会，而且它们互相排斥，即试验时只能发生其中一种结果，而不能同时发生两种结果，除此之外，再不会发生其它结果了，这6种结果包含了全部。

我们所要求的是2发为全红，显然只可能有"1，2"这一种结果。因此，"2发为全红"发生的频率会稳定在 $\frac{1}{6}$，于是它的概率是1/6。

如果问2发全是绿色的概率是多少呢？"全绿"的只有"3，4"一种结果，故它的概率也是1/6。

例2　外形完全一样的敌某型轰炸机5架（2架装小型核弹，3架装普通炸弹），通过我某防空区域时受到攻击，若射击命中每一架的机会是相等的，求任意射击三个目标时，命中两架装核弹，一架装普通炸弹的概率。

解　我们给五架敌机编上号码分别是：1，2，3，4，5。1，2号装核弹，3，4，5号装炸弹。因为是任意射击三个目标，那么命中目标的可能结果是：

"1，2，3"；"1，2，4"；"1，2，5"；"1，3，4"；"1，3，5"；"1，4，5"；"2，3，4"；"2，3，5"；"2，4，5"；"3，4，5"。共有10种结果。每一种结果发生的可能性是相同的，都有 $\frac{1}{10}$ 的机会。而且它们是互相排斥的，即射击时只能发生其中一种结果，而不能同时发生任意两种结果。除了这十种结果外，再不可能有其它结果了。

在上列十种结果中，含有1，2号码的有三种，即"1，2，3"，"1，2，4"和"1，2，5"。只要这三个事件中任一个发生，则"命中2架装核弹，1架装普通炸弹"的事件就发生。因此，"命中二架装核弹，一架装普通炸弹"这一事件发生的频率会稳定在 $\frac{3}{10}$ 左右，于是它的概率是3/10。

从上述例子中我们得到了一种简单而又直接的概率计算方法。对这类最简单又常见的随机现象进行归纳，可以得出一般规律。

定义　称一个事件组 A_1，A_2，……，A_n，为一个等可能完备事件组，如果它具有下列三条性质：

（1）A_1，A_2，……，A_n，发生的机会相同。也就是说在试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一基本事件发生的可能性在客观上是完全相等的，则称此为等可能性。

（2）在任一次试验中，A_1，A_2，……，A_n，至少有一个发生。也就是说在试验时，若干个基本事件中至少有一个发生，而不能有其它别的结果发生，这若干个基本事件的个数是有限的，由它们构成了事件的全体，则称此为完全性。

（3）在一次试验中，A_1，A_2，……，A_n，至多有一个发生。也就是说试验时，若干个基本事件中任何两个事件都不可能同时发生，即它们是互相排斥的，则称此为互不相容性。

我们把同时具备上述三种性质的事件组称为等可能完备事件组（群），也叫等概基本事件组。

满足以上三个条件的随机现象的数学模型，称为古典概型。今后，提到古典概型时必须

与三个条件联系起来，不具备这些条件的，不叫古典概型。例如前面讲到的某射手射击一目标时，它有两种结果，“命中目标”和“不命中目标”，两事件的概率是不相同的，统计表中，“命中目标”的概率为0.9，“未命中目标”的概率0.1。因此这一随机现象的模型就不属于古典概型。

如果从0，1，2，……，0，十个数字中任意抽取一个数字，设A_k是抽到数字k（k = 0，1，2，……，9）这一事件，它们具有等可能性，且互不相容，则十个事件A_0，A_1，……，A_9构成一个等可能完备事件组。它符合上述三条件，这一随机现象的数学模型属于古典概型。

古典概率的计算：

若A_1，A_2，……，A_n是一个等概基本事件组，而事件B由其中的某m个基本事件构成，则事件B的概率为

$$P(B)=\frac{m}{n} \tag{2.1}$$

用上式可直接计算事件B发生的概率，这是由大量试验证明了的，但只有当随机现象可以归结为古典概型时，才能应用上式。计算时不是一一列出所有结果，而是用排列组合方法求出n和m的值。

用古典定义来讨论例1，计算就较方便，不必把所有结果一一列出。4发信号弹任取2发共有$C_4^2=\frac{4\times3}{1\times2}=6$种不同取法，每一种取法就是一个基本事件，且它们出现的可能性相同（等可能性），所以等概基本事件组共有n = 6个事件。试验时，只能发生其中一种，而不能再有别的结果（完全性）。在这6种结果中，不能同时出现两种(互不相容性)，而取得两发均为红色信号弹的共有$m=C_2^2=1$种取法。由（2，1）可得

$$P（2发红色）=\frac{1}{6}$$

例3 箱内装有5发穿甲弹与3发爆破弹。若从中任取2发，试求：（1）取出的两发都是穿甲弹的概率；（2）两发中有1发是穿甲弹的概率；（3）第一发取出后放回箱中，第二次再取一发，取出的两发都是穿甲弹的概率。

解 此抽弹试验属于古典概型。

（1）我们认为两种弹的外形、大小、重量都是一样的。从8发弹中任取2发，共有不同取法$n=C_8^2$种，并组成等概基本事件组。取出的两发都是穿甲弹，应该是在5发穿甲弹中取2发，共有取法$m=C_5^2$种。根据（2，1）式，取出两发都是穿甲弹的概率

$$P（2穿）=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{\frac{5\times4}{1\times2}}{\frac{8\times7}{1\times2}}=\frac{20}{56}=0.357$$

（2）从8发弹中任取2发，共有取法$n=C_8^2$种。考虑取出的2发弹中有1发是穿甲弹，同时另一发是爆破弹，这就是在5发穿甲弹中取1发，应有C_5^1种，在3发爆破弹中取

1发，共有C_3^1种。因此，“2发中有1发是穿甲弹”共含有$m=C_5^1C_3^1$个个基本事件。由古典概率的计算方法得：

$$P（2发中有1发穿甲弹）=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{5\times3}{\frac{8\times7}{1\times2}}=\frac{15}{28}=0.535$$

（3）此种抽取为返回抽样，从8发弹中抽一发，有$C_8^1=8$种取法，然后放入箱中再第二次抽取，也是从8发弹中抽一发，有8种取法，故总的基本事件数$n=8^2$。

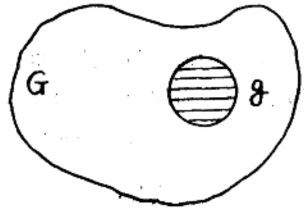
取出2发都是穿甲弹的情况，应是从5发穿甲弹中取一发，有5种取法，放回后再取第二发，也是从5发中取一发，有5种取法，那么有利于取出两发穿甲弹的基本事件数$m=5^2$。所以

$$P（2穿）=\frac{25}{64}=0.391$$

二、几何概型

当试验中的各种可能结果具有等可能性，其基本事件虽然不是有限多个，而是无限多个，但可用某种几何量（如长度、面积、体积、时间等）来表示时，则该随机现象的数学模型属于几何概型，即用几何方法来确定事件的概率。

设在平面上有某一区域G，其中包含一局部区域g，在区域G内任意投掷一点，求这点落在g内的概率。问题可以这样来分析，投掷点落在G内任何一点处都是等可能的，并且落在区域G内任何部分的概率只与这部分的面积成正比，而与其位置和形状无关。显然，试验的基本事件数为无限个，而且具有等可能性（即均匀分布）。于是在区域G内任意投掷一点落在区域g内的概率可用下式计算：



$$P（g）=\frac{g的面积}{G的面积}$$

一般地，几何概型的概率计算公式为

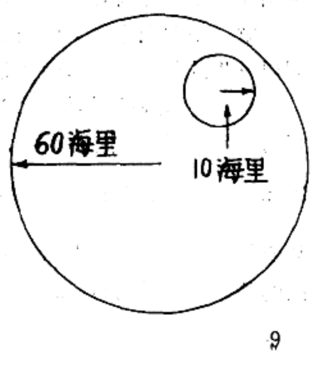
$$P(g)=\frac{L(g)}{L(G)} \tag{2.2}$$

式中：$L(G)$——构成整体G的几何量；

$L(g)$——构成g的几何量；

$P(g)$——点落在g区域内的概率。

例1　飞机雷达开机能发现半径为10海里的水面状态潜艇，假定潜艇均匀地在半径为60海里的园内。飞机雷达不能连续开机，否则潜艇能潜水避开发现，因此飞机飞临可能有潜艇的活动区域突然开机搜索。如飞临潜艇活动区的散布是均匀的，试求发现目标的概率。



解　依题意知，潜艇在半径为60海里的园内是均匀分布

的，即位于园内任一点是等可能的，而雷达搜索范围又在潜艇活动区域内，故求发现目标的概率可用几何概型计算。

潜艇活动区的面积：$\pi R^2=60^2\pi$（平方海里）。

雷达搜索面积：$\pi r^2=10^2\pi$（平方海里）。

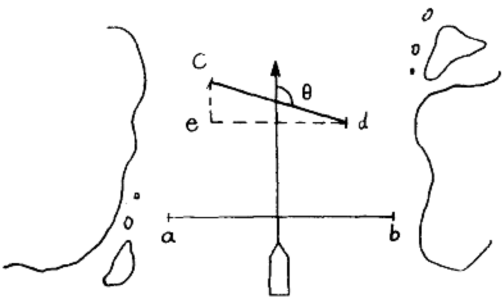
所以

$$P(\pi r^2)=\frac{10^2\pi}{60^2\pi}=\frac{100}{3600}=\frac{1}{36}$$

下面我们来讨论水面舰艇穿过水雷障碍（一线一列雷线）时的概率和在障碍中碰雷的概率问题。

例 2　设某海峡的航道宽为ab，在航道内布设了雷线长为cd的水雷障碍。若敌舰船与水雷线的遭遇角为θ。求敌舰船通过水雷障碍的概率（$P_{通}$）。

解　敌舰船在宽度为ab的航道中航行时，其航线的选择是服从均匀分布的。也就是说，敌舰船通过ab上各点是等可能的。因此构成整体的几何量为航道的宽度ab。

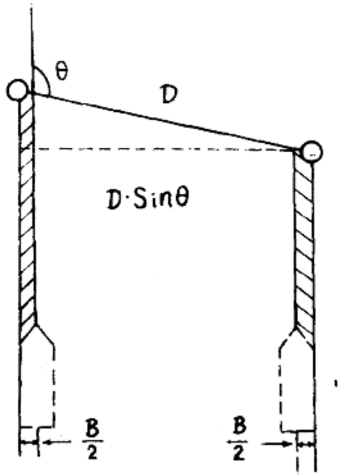


因舰船的航线与雷线不垂直，应将雷线长cd转换成垂直于航线的投影ed，即$ed=cd\cdot\sin\theta$，为构成雷线障碍的长度。根据（2.2）式

$$P_{通}=\frac{cd\cdot\sin\theta}{ab}=\frac{L\cdot\sin\theta}{S}$$

式中：L——雷线长；

　　　S——航道宽。



例 3　条件如例 2，若雷线中布设的是触发水雷，水雷间隔为D米，敌舰船宽为B米。求敌舰船通过水雷障碍时的碰雷概率（$P_{碰}$）。

解　根据题意，本题是在敌舰船通过水雷障碍已发生的条件下，求舰船碰撞水雷的概率。

雷线中布放的是触发水雷，只有当敌舰船直接与水雷相碰时，才能使水雷爆炸而毁伤舰船。由图知，构成敌舰船直接碰雷的几何量是$\frac{B}{2}+\frac{B}{2}$，敌舰船通过D中任一点都是等可能的，考虑到敌航线与D不正交，因此构成敌舰船通过二雷间的整体几何量为$D\sin\theta$。由(2.2)式

$$P_{碰} = \frac{\frac{B}{2} + \frac{D}{2}}{D \cdot \sin\theta} = \frac{B}{D \cdot \sin\theta}$$

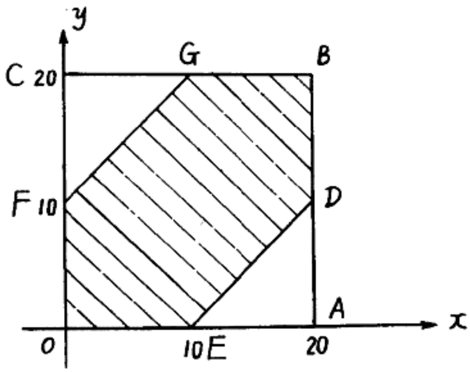
当 $\theta = 90°$ 时，$P_{碰} = \frac{B}{D}$

例 4　甲、乙两舰约定在时间1900至1920内到达某海区汇合，先到达的舰等待10分钟后方可离开海区自行去执行任务。求甲、乙两舰相遇的概率。

解　这是个两人约会问题，改了原题意，在军事上还是有用的。

设甲、乙两舰到达某约定海区的时间分别为 x，y。

他们在时间19点的（0，20）分钟内任一时刻到达约定海区是等可能的，因而 x，y 能取（0，20）内的一切可能值，即



$$0 \leqslant x \leqslant 20, \quad 0 \leqslant y \leqslant 20$$

两舰相遇的充分必要条件是

$$|x - y| \leqslant 10$$

即先去的舰应等待10分钟，而后去的舰必须在先到达者10分钟内赶到，两舰才能相遇。

我们把 x，y 表为平面上一点的直角座标，这样构成整体的几何量可用边长为20的正方形内的点表示，即ABCD面积 $= 20^2$，有利于两舰相遇的几何量可用正方形内介于二直线

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = -10 \end{cases}$$

间阴影区域内的点表示，即多边形BDEOFG的面积 $= 20^2 - 10^2$。

因此，两舰相遇的概率 $P_{相遇}$ 为阴影部分面积与正方形面积之比

$$P_{相遇} = \frac{20^2 - 10^2}{20^2} = \frac{300}{400} = 0.75$$

约会问题的一般公式为：

$$P = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}$$

式中：T ——约会的时间间隔；

　　t ——先到达者的等待时间（$t < T$）。

决定事件的概率，我们介绍了统计方法，概率的直接计算法，但它们难于实现（特别是军事上的试验等等），或有其局限性（非等可能性等等），因此必须用间接计算方法来决定事件的概率，即根据事件之间的相互关系，由已知一些事件的概率来定义、来计算与这些事件有关的其它一些事件的概率。这是概率论的基本内容之一，因为整个概率论基本上就是由这种用间接方法的系统构成的。在间接计算方法中，离不开概率论中的两个最基本的定理——概率加法定理和概率乘法定理，这是下一节所要介绍的内容。

第三节　事件的和与积　　概率加法定理

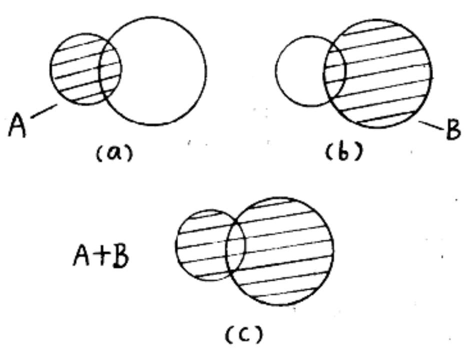
在研究随机现象时，为了确定各事件的概率以及各概率之间的关系，其基本点首先要搞清楚事件之间的相互关系。

一、事件的和

两射手向同一目标射击，那末“命中目标”这一事件，就意味着两射手“至少有一个命中目标”。如果记“甲射手命中目标”为事件A，记“乙射手命中目标”为事件B，“命中目标”记为事件C，则“C发生”意味着“A与B至少有一个发生”。

如果事件A与B中至少有一事件发生都会导致事件C发生，则称事件C为事件A与B的**和，记作**

$$C = A + B$$



左图为事件和的示意图。(a)图中的小圆表示甲命中目标，为事件A；(b)图中大圆表示乙命中目标，为事件B；(c)图中斜线圆表示命中目标事件A+B。

例如，从红、黄、白三种颜色的球中，任取一个，显然不能同时抽到既是红球，又是黄球；或者既是白球又是红球。设：“抽到红球”的事件为A，“抽到黄球”的事件为B，若C = A + B为“抽到有色球”事件。它表示A，B中至少有一个发生，则C就发生。

类似地，可以把事件和推广到有限多个事件的和的情况中去。

如果事件A_1，A_2，……，A_n中至少有一事件发生都会导致事件A发生，则称事件A为事件A_1，A_2，……，A_n的和，记作

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$