控制系统现代频域法的计算机辅助设计

（上）

南京航空学院

1984.3.

目　录

第一章　数学基础

§1　多项式

一、定义

设a_i（$i=0, 1, \cdots, n$）为实数域中的元，当S为变数时，则称

$$p(s)=a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} s^i \qquad (1-1)$$

为变元S的多项式。如果式（1—1）中的$a_0 \neq 0$，则P(S)又称为n次多项式。如果$a_0=1$，则P(S)又称为首一多项式。

式（1—1）可以表示为

$$p(S)=\left[a_0, a_1, \cdots, a_{n-i} \cdots, a_{n-1}, a_n\right]\begin{bmatrix} S^n \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\left[S^n, \cdots S, 1\right]\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (1-2)$$

如果$a_0 \neq 0$，则上式还可以写成

$$p(S)=a_0\left(1, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n\right)\begin{bmatrix} S^n \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=a_0\left[S^n \cdots, S, 1\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_{n-1} \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \qquad (1-3)$$

式中 $\bar{a}_i = a_i / a_0$ （$i=0, 1, \cdots, n$ ）。以下仍将 $\bar{a}_i$ 记成 a_i 。向量〔a_0 , a_1 , $\cdots a_n$ 〕称为多项式 $p(S)$ 的系数向量，向量〔a_1 , $\cdots$, a_{n-1} a_n 〕称为 $p(S)$ 化为首一多项式的系数向量。

二 多项式的运算

设有两个多项式

$$P(S),\quad h(S)$$

其中 $\partial h(S) < \partial P(S)$ （“∂”表示多项式的次数），$\partial P(S) = n$ $\partial h(S) = m$，且可以表示成

$$P(S) = a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots + a_{n-1} S + a_n$$

$$h(S) = h_0 S^m + h_1 S^{m-1} + \cdots + h_{m-1} + h_m$$

如此，则

$$P(S) \pm h(S) = a_0 S^n + \cdots + (a_m \pm h_0) S^m + \cdots + (a_1 \pm h_1) S + (a_n \pm h_m)$$

将上式 写成系数向量的形式，则有

$$P(S) \pm h(S) = \left\{ (a_0, \cdots, a_m, \cdots a_n) \pm (0, \cdots, h_0, \cdots h_m) \right\} \begin{Bmatrix} S^n \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{Bmatrix}$$

若 α 为任意实数，则 $\alpha P(S)$ 的系数向量可表示成

$$\alpha P(S): \quad (\alpha a_n, \alpha a_{n-1}, \cdots, \alpha a_1, \alpha a_0)$$

现在考虑多项式的乘积运算。首先，$SP(S)$ 的系数向量为

$$SP(S): \quad (0, a_n, \cdots, a_1, a_0)$$

而 $s^2\,p(s)$、$s^3\,p(s)$，…的系数向量分别为：

$$s^2\,p(s):\ [0,\ 0,\ a_n,\ \cdots,\ a_1,\ a_0\ ]$$

$$s^3\,p(s):\ [0,\ 0,\ 0,\ a_n,\ \cdots,\ a_1,\ a_0\ ]$$

…

因此，有

$$p(s)h(s)=[a_n,\ \cdots,\ a_0\ ]\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\\ s^n\end{bmatrix}h(s)$$

$$=[a_n,\ \cdots,\ a_0\ ]\begin{bmatrix}h(s)\\ sh(s)\\ \vdots\\ s^{n-1}h(s)\\ s^n h(s)\end{bmatrix}$$

$$=[a_n,\ \cdots,\ a_0\ ]\begin{bmatrix}h_m & h_{m-1} & \cdots & h_0 & & & 0\\ & h_m & h_{m-1} & \cdots & h_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & h_m & h_{m-1} & & h_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \\ s^{m+n-1}\\ s^{m+n}\end{bmatrix}$$

$$(1-4)$$

或者

$$h(s)\,p(s)=[h_m,\ \cdots,\ h_0\ ]\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots, & a_0 & & & 0\\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n+m-1}\\ s^{n+m}\end{bmatrix}$$

$$(1-5)$$

关于多项式的除法，有如下带余除法定理。

定理1：任意两个多项式p(s)和g(s)，其中$g(s)\neq 0$，一定有多项式q(s)和r(s)存在，使

$$p(s)=q(s)g(s)+r(s) \qquad (1-6)$$

其中r(s)或者恒等于零，或者它的次数小于g(s)的次数，并且这样的q(s)、r(s)是唯一确定的

证明：若$p(s)=0$，则取$q(s)=r(s)=0$即可。以下假定$p(s)\neq 0$，令p(s)、g(s)的次数分别为n，m，如果p(s)是零次多项式（即为常数），那么g(s)不是零次多项式时，则取$q(s)\equiv 0$，$r(s)=p(s)$，即有

$$p(s)=q(s)g(s)+r(s)$$

且r(s)的次数小于g(s)的次数，所以式（1—6）成立。当q(s)是零次多项式时，取$q(s)=p(s)/g(s)$（常数），$r(s)\equiv 0$，则

$$p(s)=g(s)q(s)+r(s)$$

也可看作式（1—6）成立。因此定理对p(s)是零次多项式也是成立的。

用数学归纳法证明，p(s)是n次多项式时，式（1—6）也成立。设式（1—6）对p(s)是小于n次的多项式都成立。首先当$n<m$，显然取$q(s)\equiv 0$，$r(s)=p(s)$，则式（1—6）成立。若$n\geq m$，令a，b分别是p(s)、g(s)的首项系数，显然$b^{-1}as^{n-m}g(s)$和p(s)有相同的首项，因而多项式

$$p_1(s)=p(s)-b^{-1}as^{n-m}g(s)$$

的次数小于n，由归纳法假设，对$p_1(s)$，$g(s)$有$q_1(s)$和$r_1(s)$存在，使

$$p_1(s)=q_1(s)g(s)+r_1(s)$$

其中$r_1(s)$的次数小于$g(s)$的次数，于是

$$p(s)=(q_1(s)+b^{-1}as^{n-m})g(s)+r_1(s)$$

也即$q(s)=q_1(s)+b^{-1}as^{n-m}$，$r(s)=r_1(s)$存在，使

$$p(s)=q(s)g(s)+r(s)$$

即式（1—6）成立。由此定理得证。

唯一性证明从略

上述定理中，多项式$p(s)$、$g(s)$可以分别叫做被除式和除式，而多项式$q(s)$和$r(s)$可分别叫做商式和余式。如果$r(s)=0$则$g(s)$可以整除$f(s)$，且$g(s)$，$q(s)$都是$p(s)$的因子。当$p(s)$可以写成一个纯量乘以$g(s)$，即

$$p(s)=cg(s)$$

时，这样的多项式分解，称为平凡分解。

定理2　对于任意n次多项式$f(s)$除以（$s-a$），所得的余数为$p(a)$，即存在一个n—1次多项式$q(s)$，使得

$$p(s)=(s-a)q(s)+p(a) \qquad (1—7)$$

对一切S成立

证明：利用上一个定理，存在$q(s)$，$r(s)$使

$$p(s)=q(s)g(s)+r(s)=q(s)(s-a)+r(s)$$

因为$r(s)$的次数小于$(s-a)$的次数，故它的次数为零（即$r(s)$为常数或零）则可表示为C，即有

$$p(s)=q(s)(s-a)+c$$

令$s=a$，得$p(a)=c$，于是

$$p(s)=q(s)(s-a)+p(a)$$ 证毕。

三 两个多项式的最大公因子、互质性

设$p(s)$是多项式，$r(s)$是另一个非零多项式，如果存在一个多项式$p_1(s)$满足

$$p(s)=p_1(s)r(s)$$

则称$p(s)$被$r(s)$除尽，记作$r(s)\mid p(s)$。而$r(s)$称为$p(s)$的一个因子。设$p_1(s)$，$p_2(s)$是两个多项式，如果$r(s)$满足

$$r(s)\mid p_1(s), \qquad r(s)\mid p_2(s)$$

则称$r(s)$为$p_1(s)$和$p_2(s)$的公因子。进一步，如果$p_1(s)$ $p_2(s)$的任意一个公因子$r_1(s)$，都满足

$$r_1(s)\mid r(s)$$

则称$r(s)$为$p_1(s)$和$p_2(s)$的最大公因子。

关于最大公因式，有如下是理（存在定理）

定理1：设$p_1(s)$和$p_2(s)$是不全恒为零的两个多项式，则它们必有最大公因子$d(s)$，且存在两个多项式$x(s)$，$y(s)$满足

$$
\begin{aligned}
d(s) &= x(s)p_1(s) + y(s)p_2(s), \\
&\qquad\qquad \partial x(s) < \partial p_1(s) \\
&\qquad\qquad \partial y(s) < \partial p_2(s)
\end{aligned}
\tag{1—8}
$$

证明：如果$p_1(s)$、$p_2(s)$中有一个为零，则另一个便是它们的最大公因子。否则，以$p_2(s)$除$p_1(s)$，再用余式除$p_2(s)$，这样展转相除，得如下等式组

$$
\begin{array}{ll}
p_1(s) = q_1(s)p_2(s) + d_1(s) & \partial d_1(s) < \partial p_2(s) \\
p_2(s) = q_2(s)d_1(s) + d_2(s) & \partial d_2(s) < \partial d_1(s) \\
d_1(s) = q_3(s)d_2(s) + d_3(s) & \partial d_3(s) < \partial d_2(s) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
d_{n-2}(s) = q_{n-2}\, d_{n-1}(s) + d_n(s) & \partial d_n(s) < \partial d_{n-1}(s) \\
d_{n-1}(s) = q_{n-1}\, d_n(s) &
\end{array}
$$

显然，在上述辗转相除过程中，由于$d_1(s)$，$d_2(s)$，……的次数一次比一次低。因此除到某一步时，余式必为零。上面的等式组表示除到第$n-1$步时余式为零。

从上面的等式组的最后一个等式知

$$d_n(s)|d_{n-1}(s)$$

再顺序往上推，知

$$d_n(s)|d_{n-2}$$

继续上推可得

$$d_n(s)|p_1(s) \quad , \qquad d_n(s)|p_2(s)$$

所以$d_n(s)$就是$p_1(s)$和$p_2(s)$的公因子。

再设 $h(s)$是$p_1(s)$和$p_2(s)$的一个任意公因子，从上面等式组的第一式往下看，由于$h(s)$整除第一式的左边和右边的第一项，所以$h(s)$也整除第一式右边的第二项，又因为$h(s)$整除第二式的左边和右边第一项，故

$$h(s)|d_2(s)$$

依此类推，知

$$h(s)|d_n(s)$$

即$p_1(s)$、$p_2(s)$的任一公因子$h(s)$能整除$d_n(s)$。可见$d_n(s)$就是$p_1(s)$、$p_2(s)$的最大公因子$d(s)$。

上述证明中所用到的辗转相除法，可以用来实际计算最大公因子。因为由上面等式组第一式，有

$$d_1(s)=p_1(s)+(-q_1(s)p_2(s))$$

再代入等式组第二式，有

$$d_2(s)=(-q_2(s))p_1(s)+(q_1(s)q_2(s)+1)p_2(s)$$

如此继续下去，可得最大公因子$d_m(s)=d(s)$，且使$d(s)$具有定理所指出的式（1—8）的形式，相应地也找到了$x(s)$和$y(s)$。

例　设

$$p_1(s)=s^4+3s^3-s^2-4s-3$$

$$p_2(s)=3s^3+10s^2+2s-3$$

求$p_1(s)$、$p_2(s)$的最大公因子$d(s)$，并求$x(s)$，$y(s)$使

$$d(s)=x(s)p_1(s)+y(s)p_2(s)$$

解：按如下格式辗转相除

	$p_2(s)$	$p_1(s)$	
$q_2(s)=-\frac{27}{5}s+9$	$3s^3+10s^2+2s-3$	$s^4+3s^3-s^2-4s-3$	$\frac{1}{3}s-\frac{1}{9}=q_1(s)$
	$3s^3+15s^2+18s$	$s^4+\frac{10}{3}s^3+\frac{2}{3}s^2-s$	
	$-5s^2-16s-3$	$-\frac{1}{3}s^3-\frac{5}{3}s^2-3s-3$	
	$-5s^2-25s-30$	$-\frac{1}{3}s^3-\frac{10}{9}s^2-\frac{2}{9}s+\frac{1}{3}$	
	$d_2(s)=9s+27$	$d_1(s)=-\frac{5}{9}s^2-\frac{25}{9}s-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{81}s-\frac{10}{81}=q$
		$-\frac{5}{9}s^2-\frac{5}{3}s$	
		$-\frac{10}{9}s-\frac{10}{3}$	
		$-\frac{10}{9}s-\frac{10}{3}$	
		0	

利用前面等式组的形式，写出上面的过程为

$$p_1(s)=(\frac{1}{3}s-\frac{1}{9})p_2(s)+(-\frac{5}{9}s^2-\frac{25}{9}s-\frac{10}{3})$$

$$p_2(s)=(-\frac{27}{5}s+9)(-\frac{5}{9}s^2-\frac{25}{9}s-\frac{10}{3})+(9s+27)$$

$$=(-\frac{27}{5}s+9)(-\frac{5}{81}s-\frac{10}{81})(9s+27)+$$

$$(9s+27)$$

由此算出 $p_1(s)$ 与 $p_2(s)$ 的最大公因子是 $(9s+27)$。化成首一式时，则为 $d(s)=s+3$。同时

$$9s+27=p_2(s)-(-\frac{27}{5}s+9)(-\frac{5}{9}s^2-$$

$$\frac{25}{9}s-\frac{10}{3})$$

$$=(\frac{27}{5}s-9)p_1(s)+$$

$$\{1-(\frac{27}{5}s-9)(\frac{1}{3}s-\frac{1}{9})\}p_2(s)$$

$$=(\frac{27}{5}s-9)p_1(s)+$$

$$(-\frac{9}{5}s^2+\frac{18}{5}s)p_2(s)$$

于是

$$x(s)=\frac{27}{5}s-9\quad,\qquad y(s)=-\frac{9}{5}s^2+\frac{18}{5}s$$

$$d(s)=9s+27=(\frac{27}{5}s-9)p_1(s)+(-\frac{9}{5}s^2+\frac{18}{5}s)p_2(s)$$

如果两个多项式$p_1(s)$、$p_2(s)$除常数外没有公因子，也即如果它们的最大公因子为1，则称$p_1(s)$和$p_2(s)$互质。关于两个多项式互质的充要条件有如下定理：

定理2　两个多项式$p_1(s)$、$p_2(s)$互质的充分必要条件是存在两个多项式$x(s)$（$\partial x(s)<\partial p_1(s)$），$y(s)$（$\partial y(s)<\partial p_2(s)$）使下式成立

$$x(s)p_1(s)+y(s)p_2(s)=1 \qquad (1-9)$$

证明　必要性由前述定理直接推得。现证充分性，设有多项式$x(s)$，$y(s)$使式（1—9）成立，又设$d(s)$是$p_1(s)$、$p_2(s)$的最大公因子，则

$$d(s)\mid p_1(s) \quad , \qquad d(s)\mid p_2(s)$$

因此

$$d(s)\mid 1$$

即

$$d(s)=1$$

证毕。

下面再看，如何根据两个多项式的系数来判断两个多项式的互质问题不失一般性，设两个多项式$p(s)$，$c(s)$为

$$p(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

$$c(s)=c_1s^{n-1}+\cdots+c_{n-1}s+c_n$$

定理（Sylvester）3，多项式p(s)、c(s)互质的充分必要条件为矩阵

$$M_{pc}=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1}, & \cdots, & a_1 & 1 & & & 0 \\ & a_n & a_{n-1}, & \cdots\cdots & a_1 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots\cdots & a_1 & 1 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 & & & 0 \\ & c_n & c_{n-1} & \cdots\cdots & c_1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1-10)$$

秩为2n（或满秩），M_{pc}称为p(s)，c(s)的结式矩阵。

证明 先反设 结式阵不满秩，则存在一个非零向量（2n维）

$$(\bar{x}\ \ \bar{y}) \triangleq (x_{n-1},\ x_{n-2},\ \cdots,\ x_0,\ y_{n-1},\ y_{n-2},\ \cdots,\ y_0)$$

满足

$$(\bar{x}\ \ \bar{y})M_{pc}=0$$

而记

$$x(s)=x_0 s^{n-1}+x_1 s^{n-2}+\cdots+x_{n-2}s+x_{n-1}$$

$$y(s)=y_0 s^{n-1}+y_1 s^{n-2}+\cdots+y_{n-2}s+y_{n-1}$$

则由乘法公式（1—5），有

$$x(s)p(s)+y(s)c(s)=0 \qquad (1-11)$$

由此，有

$$p(s)=-\frac{y(s)}{x(s)}c(s)$$

这里假定$x(s)$与$y(s)$互质，如果不然，则去掉公因子，式（1—11）仍然成立。这时，必有

$$x(s)|c(s)$$

因而

$$r(s)=\frac{p(s)}{y(s)}=\frac{-c(s)}{x(s)}$$

是一个多项式，且是$p(s)$，$c(s)$的公因子。但是$\partial y(s)<n$，$\partial p(s)=n$，故

$$\partial r(s)\geq 1$$

这说明$p(s)$、$c(s)$有非常数公因子，因此$p(s)$、$c(s)$不可能是互质的。

反之，设M_{pc}满秩，则对于任意给定的向量

$$(f_0\ f_1\ \cdots\cdots\ f_{2n-1})=\overline{f}$$

线性方程组

$$(\overline{x}\ \overline{y})M_{pc}=\overline{f}$$

有唯一解$(\overline{x}\ \overline{y})$，记以$\overline{f}$为系数向量的多向式为$f(s)$，可得

$$x(s)p(s)+y(s)c(s)=f(s) \qquad (1—12)$$