

控制系统现代频域法的计算机 辅助设计

(上)

南京航空学院

1984.3.

目 录

第一章 数学基础

§ 1 多项式

- 一 定义
- 二 多项式的运算
- 三 两个多项式的最大公因子、互质性
- 四 多项式方程
- 五 多项式与微分方程
- 六 微分方程与拉氏变换
- 七 多项式与单变量系统

§ 2 多项式矩阵及其性质

- 一 多项式矩阵的基本概念
- 二 多项式矩阵的初等变换及 Smith 形
- 三 系统阵的变换
- 四 多项式阵的公因子与互质阵
- 五 首一多项式阵及其系数阵
- 六 多项式阵与控制系统
- 七 系统的能控性、能观测性和能抗干扰性

§ 3 有理分式阵

- 一 有理分式阵与 Mcmillan 形
- 二 有理分式阵的分解
- 三 有理分式阵的逆阵
- 四 系统的传递函数阵

§ 4 多项式矩阵和有理分式矩阵代数运算的计算机算法

- 一、多项矩阵的加法和乘法
- 二、多项式矩阵的最大公因子和有理分式阵既约分解的计算
- 三、有理分式矩阵的求逆运算
- § 5 多变量系统的零点和极点
 - 一、传递函数阵的零点和极点
 - 二、解耦零点
 - 三、闭环系统的解耦零点

第二章 控制系统的频域设计

- § 1 控制系统稳定的Nyquist准则和逆Nyquist准则
 - 一、单变量系统的Nyquist准则和逆Nyquist准则
 - 二、多变量系统的Nyquist准则和逆Nyquist准则
 - 三、对角强阵与Gershgorin定理
 - 四、对角强阵与多变量系统的稳定性
 - 五、序列回差形式的Nyquist稳定判据
- § 2 控制系统设计的逆乃氏阵列法(INA法)
 - 一、概述
 - 二、对角优势阵的实现和予补偿控制器设计
 - 三、控制系统设计的INA法设计步骤和程序框图
- § 3 控制系统设计的序列回差法(SRD法)
 - 一、序列回差法的基本思想和回差、回比的基本关系
 - 二、闭环系统的性能分析与 $K_e(s)$ 的顺序设计
 - 三、矩阵 $K_e(s)$ 的设计
 - 四、计算实例与程序框图

§ 4 控制系统的特征轨迹设计法 (CL 法)

- 一 特征传递函数, 特征向量以及特征轨迹
- 二 闭环与开环传递函数矩阵的关系
- 三 系统性能与返回比矩阵的关系
- 四 控制器的形式
- 五 CL 法的设计步骤和程序框图
- 六 计算实例

§ 5 控制系统的并矢展开设计法 (DY 法)

- 一 并矢传递矩阵和并矢传递矩阵的系统
- 二 控制系统的并矢展开设计法
- 三 设计实例
- 四 一类具有并矢传递矩阵的系统
- 五 一阶、二阶型的多变量系统, K 阶型的多变量系统
- 六 近似并矢传递矩阵
- 七 利用并矢展开补偿特征轨迹

第三章 补偿器设计的代数方法

§ 1 补偿器设计问题与多项式矩阵方程

§ 2 单变量情形

§ 3 多项式矩阵方程

§ 4 多变量系统补偿器设计方法

第一章 数学基础

§ 1 多项式

一 定义

设 a_i ($i=0, 1, \dots, n$) 为实数域中的元, 当 s 为变数时, 则称

$$\begin{aligned} p(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\ &= \sum_{i=0}^n a_{n-i} s^i \end{aligned} \quad (1-1)$$

为变元 s 的多项式。如果式 (1-1) 中的 $a_0 \neq 0$, 则 $P(s)$ 又称为 n 次多项式。如果 $a_0 = 1$, 则 $P(s)$ 又称为首一多项式。

式 (1-1) 可以表示为

$$\begin{aligned} p(s) &= (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \begin{pmatrix} s^n \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (s^n, \dots, s, 1) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-2)$$

如果 $a_0 \neq 0$, 则上式还可以写成

$$\begin{aligned} p(s) &= a_0 (1, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n) \begin{pmatrix} s^n \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_0 (s^n, \dots, s, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_{n-1} \\ \bar{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中 $\bar{a}_i = a_i / a_0$ ($i=0, 1, \dots, n$)。以下仍将 $\bar{a}_i$ 记成 a_i 。向量 $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ 称为多项式 $p(S)$ 的系数向量, 向量 $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ 称为 $p(S)$ 化为首一多项式的系数向量。

三 多项式的运算

设有两个多项式

$$P(S), \quad h(S)$$

其中 $\partial h(S) < \partial P(S)$ (“ ∂ ”表示多项式的次数), $\partial P(S) = n$
 $\partial h(S) = m$, 且可以表示成

$$P(S) = a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n$$

$$h(S) = h_0 S^m + h_1 S^{m-1} + \dots + h_{m-1} S + h_m$$

如此, 则

$$P(S) \pm h(S) = a_0 S^n + \dots + (a_m \pm h_0) S^m + \dots + \\ (a_1 \pm h_1) S + (a_n \pm h_m)$$

将上式 写成系数向量的形式, 则有

$$P(S) \pm h(S) = \left\{ (a_0, \dots, a_m, \dots, a_n) \pm (0, \dots, h_0, \dots, h_m) \right\} \begin{Bmatrix} S^n \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{Bmatrix}$$

若 α 为任意实数, 则 $\alpha P(S)$ 的系数向量可表示成

$$\alpha P(S): \quad (\alpha a_n, \alpha a_{n-1}, \dots, \alpha a_1, \alpha a_0)$$

现在考虑多项式的乘积运算。首先, $SP(S)$ 的系数向量为

$$SP(S): \quad (0, a_n, \dots, a_1, a_0)$$

• 1-3 •

而 $s^2 p(s)$, $s^3 p(s)$, ... 的系数向量分别为:

$$s^2 p(s): \{0, 0, a_n, \dots, a_1, a_0\}$$

$$s^3 p(s): \{0, 0, 0, a_n, \dots, a_1, a_0\}$$

...

因此, 有

$$\begin{aligned} p(s)h(s) &= [a_n, \dots, a_0] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \\ s^n \end{bmatrix} h(s) \\ &= [a_n, \dots, a_0] \begin{bmatrix} h(s) \\ sh(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}h(s) \\ s^n h(s) \end{bmatrix} \\ &= [a_n, \dots, a_0] \begin{bmatrix} h_m & h_{m-1} & \dots & h_0 & 0 \\ & h_m & h_{m-1} & \dots & h_0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & h_m & h_{m-1} & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{m+n-1} \\ s^{m+n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-4)$$

或者

$$h(s)p(s) = [h_m, \dots, h_0] \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 \\ & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{m+n-1} \\ s^{m+n} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

关于多项式除法，有如下带余除法定理。

定理 1：任意两个多项式 $p(s)$ 和 $g(s)$ ，其中 $g(s) \neq 0$ ，一定有多项式 $q(s)$ 和 $r(s)$ 存在，使

$$p(s) = q(s)g(s) + r(s) \quad (1-6)$$

其中 $r(s)$ 或者恒等于零，或者它的次数小于 $g(s)$ 的次数，并且这样的 $q(s)$ 、 $r(s)$ 是唯一确定的

证明：若 $p(s) = 0$ ，则取 $q(s) \equiv r(s) \equiv 0$ 即可。以下假定 $p(s) \neq 0$ ，令 $p(s)$ 、 $g(s)$ 的次数分别为 n ， m ，如果 $p(s)$ 是零次多项式（即为常数），那么 $g(s)$ 不是零次多项式时，则取 $q(s) \equiv 0$ ， $r(s) = p(s)$ ，即有

$$p(s) = q(s)g(s) + r(s)$$

且 $r(s)$ 的次数小于 $g(s)$ 的次数，所以式 (1-6) 成立。当 $q(s)$ 是零次多项式时，取 $q(s) = p(s)/g(s)$ （常数）， $r(s) \equiv 0$ ，则

$$p(s) = g(s)q(s) + r(s)$$

也可看作式 (1-6) 成立。因此定理对 $p(s)$ 是零次多项式也是成立的。

用数学归纳法证明， $p(s)$ 是 n 次多项式时，式 (1-6) 也成立。设式 (1-6) 对 $p(s)$ 是小于 n 次的多项式都成立。首先当 $n < m$ ，显然取 $q(s) \equiv 0$ ， $r(s) = p(s)$ ，则式 (1-6) 成立。若 $n \geq m$ ，令 a ， b 分别是 $p(s)$ 、 $g(s)$ 的首项系数，显然 $b^{-1}as^{n-m}g(s)$ 和 $p(s)$ 有相同的首项，因而多项式

$$p_1(s) = p(s) - b^{-1} a s^{n-m} g(s)$$

的次数小于 n ，由归纳法假设，对 $p_1(s)$ ， $g(s)$ 有 $q_1(s)$ 和 $r_1(s)$ 存在，使

$$p_1(s) = q_1(s)g(s) + r_1(s)$$

其中 $r_1(s)$ 的次数小于 $g(s)$ 的次数，于是

$$p(s) = (q_1(s) + b^{-1} a s^{n-m})g(s) + r_1(s)$$

也即 $q(s) = q_1(s) + b^{-1} a s^{n-m}$ ， $r(s) = r_1(s)$ 存在，使

$$p(s) = q(s)g(s) + r(s)$$

即式 (1—6) 成立。由此定理得证。

唯一性证明从略

上述定理中，多项式 $p(s)$ 、 $g(s)$ 可以分别叫做被除式和除式，而多项式 $q(s)$ 和 $r(s)$ 可分别叫做商式和余式。如果 $r(s) = 0$ 则 $g(s)$ 可以整除 $f(s)$ ，且 $g(s)$ ， $q(s)$ 都是 $p(s)$ 的因子。当 $p(s)$ 可以写成一个纯量乘以 $g(s)$ ，即

$$p(s) = c g(s)$$

时，这样的多项式分解，称为平凡分解。

定理 2 对于任意 n 次多项式 $f(s)$ 除以 $(s-a)$ ，所得的余数为 $p(a)$ ，即存在一个 $n-1$ 次多项式 $q(s)$ ，使得

$$p(s) = (s-a)q(s) + p(a) \quad (1-7)$$

对一切 s 成立。

证明：利用上一个定理，存在 $q(s)$ ， $r(s)$ 使

$$p(s) = q(s)g(s) + r(s) = q(s)(s-a) + r(s)$$

因为 $r(s)$ 的次数小于 $(s-a)$ 的次数，故它的次数为零（即 $r(s)$ 为常数或零）则可表示为 c ，即有

$$p(s) = q(s)(s-a) + c$$

令 $s=a$ ，得 $p(a) = c$ ，于是

$$p(s) = q(s)(s-a) + p(a) \quad \text{证毕。}$$

三 两个多项式的最大公因子、互质性

设 $p(s)$ 是多项式， $r(s)$ 是另一个非零多项式，如果存在一个多项式 $p_1(s)$ 满足

$$p(s) = p_1(s)r(s)$$

则称 $p(s)$ 被 $r(s)$ 除尽，记作 $r(s) \mid p(s)$ 。而 $r(s)$ 称为 $p(s)$ 的一个因子。设 $p_1(s)$ ， $p_2(s)$ 是两个多项式，如果 $r(s)$ 满足

$$r(s) \mid p_1(s), \quad r(s) \mid p_2(s)$$

则称 $r(s)$ 为 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 的公因子。进一步，如果 $p_1(s)$ ， $p_2(s)$ 的任意一个公因子 $r_1(s)$ ，都满足

$$r_1(s) \mid r(s)$$

• 1—7 •

则称 $r(s)$ 为 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 的最大公因子。

关于最大公因式，有如下定理（存在定理）

定理1：设 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 是不会恒为零的两个多项式，则它们必有最大公因子 $d(s)$ ，且存在两个多项式 $x(s)$ ， $y(s)$ 满足

$$d(s) = x(s)p_1(s) + y(s)p_2(s),$$

$$\partial x(s) < \partial p_1(s)$$

$$\partial y(s) < \partial p_2(s)$$

(1—8)

证明：如果 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 中有一个为零，则另一个便是它们的最大公因子。否则，以 $p_2(s)$ 除 $p_1(s)$ ，再用余式除 $p_2(s)$ ，这样辗转相除，得如下等式组

$$p_1(s) = q_1(s)p_2(s) + d_1(s) \quad \partial d_1(s) < \partial p_2(s)$$

$$p_2(s) = q_2(s)d_1(s) + d_2(s) \quad \partial d_2(s) < \partial d_1(s)$$

$$d_1(s) = q_3(s)d_2(s) + d_3(s) \quad \partial d_3(s) < \partial d_2(s)$$

.....

.....

$$d_{n-2}(s) = q_{n-2}(s)d_{n-1}(s) + d_n(s) \quad \partial d_n(s) < \partial d_{n-1}(s)$$

$$d_{n-1}(s) = q_{n-1}(s)d_n(s)$$

显然，在上述辗转相除过程中，由于 $d_1(s)$ ， $d_2(s)$ ，.....的次数一次比一次低。因此除到某一步时，余式必为零，上面的等式组表示除到第 $n-1$ 步时余式为零。

从上面的等式组的最后一个等式知

$$d_n(s) | d_{n-1}(s)$$

再顺序往上推，知

$$d_n(s) | d_{n-2}$$

继续上推可得

$$d_n(s) | p_1(s), \quad d_n(s) | p_2(s)$$

所以 $d_n(s)$ 就是 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 的公因子。

再设 $h(s)$ 是 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 的一个任意公因子，从上面等式组的第一式往下看，由于 $h(s)$ 整除第一式的左边和右边的第一项，所以 $h(s)$ 也整除第一式右边的第二项，又因为 $h(s)$ 整除第二式的左边和右边第一项，故

$$h(s) | d_2(s)$$

依此类推，知

$$h(s) | d_n(s)$$

即 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 的任一公因子 $h(s)$ 能整除 $d_n(s)$ 。可见 $d_n(s)$ 就是 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 的最大公因子 $d(s)$ 。

上述证明中所用到的辗转相除法，可以用来实际计算最大公因子。因为由上面等式组第一式，有

$$d_1(s) = p_1(s) + (-q_1(s)p_2(s))$$

再代入等式组第二式，有

. 1-9 .

$$d_2(s) = (-q_2(s))p_1(s) + (q_1(s)q_2(s) + 1)p_2(s)$$

如此继续下去, 可得最大公因子 $d_n(s) = d(s)$, 且使 $d(s)$ 具有定理所指出的式 (1-8) 的形式, 相应地也找到了 $x(s)$ 和 $y(s)$.

例 设

$$p_1(s) = s^4 + 3s^3 - s^2 - 4s - 3$$

$$p_2(s) = 3s^3 + 10s^2 + 2s - 3$$

求 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 的最大公因子 $d(s)$, 并求 $x(s)$, $y(s)$ 使

$$d(s) = x(s)p_1(s) + y(s)p_2(s)$$

解: 按如下格式辗转相除

	$p_2(s)$	$p_1(s)$	
$q_2(s) = -\frac{27}{5}s + 9$	$3s^3 + 10s^2 + 2s - 3$ $3s^3 + 15s^2 + 18s$	$s^4 + 3s^3 - s^2 - 4s - 3$ $s^4 + \frac{10}{3}s^3 + \frac{2}{3}s^2 - s$	$\frac{1}{3}s - \frac{1}{9} = q_1(s)$
	$-5s^2 - 16s - 3$ $-5s^2 - 25s - 30$	$-\frac{1}{3}s^3 - \frac{5}{3}s^2 - 3s - 3$ $-\frac{1}{3}s^3 - \frac{10}{9}s^2 - \frac{2}{9}s + \frac{1}{3}$	
	$d_2(s) = 9s + 27$	$d_1(s) = -\frac{5}{9}s^2 - \frac{25}{9}s - \frac{10}{3}$ $-\frac{5}{9}s^2 - \frac{5}{3}s$	$-\frac{5}{81}s - \frac{10}{81} = q_3(s)$
		$-\frac{10}{9}s - \frac{10}{3}$ $-\frac{10}{9}s - \frac{10}{3}$	
		0	

利用前面等式组的形式，写出上面的过程为

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \left(\frac{1}{3}s - \frac{1}{9}\right)p_2(s) + \left(-\frac{5}{9}s^2 - \frac{25}{9}s - \frac{10}{3}\right) \\ p_2(s) &= \left(-\frac{27}{5}s + 9\right)\left(-\frac{5}{9}s^2 - \frac{25}{9}s - \frac{10}{3}\right) + (9s + 27) \\ &= \left(-\frac{27}{5}s + 9\right)\left(-\frac{5}{81}s - \frac{10}{81}\right)(9s + 27) + \\ &\quad (9s + 27) \end{aligned}$$

由此算出 $p_1(s)$ 与 $p_2(s)$ 的最大公因子是 $(9s + 27)$ ，化成首一式时，则为 $d(s) = s + 3$ 。同时

$$\begin{aligned} 9s + 27 &= p_2(s) - \left(-\frac{27}{5}s + 9\right)\left(-\frac{5}{9}s^2 - \frac{25}{9}s - \frac{10}{3}\right) \\ &= \left(\frac{27}{5}s - 9\right)p_1(s) + \\ &\quad \left(1 - \left(\frac{27}{5}s - 9\right)\left(\frac{1}{3}s - \frac{1}{9}\right)\right)p_2(s) \\ &= \left(\frac{27}{5}s - 9\right)p_1(s) + \\ &\quad \left(-\frac{9}{5}s^2 + \frac{18}{5}s\right)p_2(s) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{27}{5}s - 9, \quad y(s) = -\frac{9}{5}s^2 + \frac{18}{5}s \\ d(s) &= 9s + 27 = \left(\frac{27}{5}s - 9\right)p_1(s) + \left(-\frac{9}{5}s^2 + \frac{18}{5}s\right)p_2(s) \end{aligned}$$

如果两个多项式 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 除常数外没有公因子，也即如果它们的最大公因子为 1，则称 $p_1(s)$ 和 $p_2(s)$ 互质。关于两个多项式互质的充要条件有如下定理：

定理 2 两个多项式 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 互质的充分必要条件是存在两个多项式 $x(s)$ ($\partial x(s) < \partial p_1(s)$)， $y(s)$ ($\partial y(s) < \partial p_2(s)$) 使下式成立

$$x(s)p_1(s) + y(s)p_2(s) = 1 \quad (1-9)$$

证明 必要性由前述定理直接推得。现证充分性，设有多项式 $x(s)$ 、 $y(s)$ 使式 (1-9) 成立，又设 $d(s)$ 是 $p_1(s)$ 、 $p_2(s)$ 的最大公因子，则

$$d(s) | p_1(s), \quad d(s) | p_2(s)$$

因此

$$d(s) | 1$$

即

$$d(s) = 1 \quad \text{证毕。}$$

下面再看，如何根据两个多项式的系数来判断两个多项式的互质问题。不失一般性，设两个多项式 $p(s)$ 、 $c(s)$ 为

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$$c(s) = c_1 s^{m-1} + \cdots + c_{m-1} s + c_m$$

定理 (Sylvester) 3, 多项式 $p(s)$ 、 $c(s)$ 互质的充分必要条件为矩阵

$$M_{p,c} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 & & 0 \\ & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

秩为 $2n$ (或满秩), $M_{p,c}$ 称为 $p(s)$ 、 $c(s)$ 的结式矩阵。

证明 先反设 结式阵不满秩, 则存在一个非零向量 ($2n$ 维)

$$(\bar{x} \ \bar{y}) \triangleq (x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0, y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_0)$$

满足

$$(\bar{x} \ \bar{y}) M_{p,c} = 0$$

而记

$$x(s) = x_0 s^{n-1} + x_1 s^{n-2} + \cdots + x_{n-2} s + x_{n-1}$$

$$y(s) = y_0 s^{n-1} + y_1 s^{n-2} + \cdots + y_{n-2} s + y_{n-1}$$

则由乘法公式 (1-5), 有

$$x(s)p(s) + y(s)c(s) = 0 \quad (1-11)$$

由此，有

$$p(s) = -\frac{y(s)}{x(s)} c(s)$$

这里假定 $x(s)$ 与 $y(s)$ 互质，如果不然，则去掉公因子，式 (1—11) 仍然成立。这时，必有

$$x(s) | c(s)$$

因而

$$r(s) = \frac{p(s)}{y(s)} = \frac{-c(s)}{x(s)}$$

是一个多项式，且是 $p(s)$ ， $c(s)$ 的公因子。但是 $\partial y(s) < n$ ， $\partial p(s) = n$ ，故

$$\partial r(s) \geq 1$$

这说明 $p(s)$ 、 $c(s)$ 有非常数公因子，因此 $p(s)$ 、 $c(s)$ 不可能是互质的。

反之，设 M_p 满秩，则对于任意给定的向量

$$\{f, f_1, \dots, f_{2n-1}\} = \bar{f}$$

线性方程组

$$(\bar{x} \ \bar{y}) M_p = \bar{f}$$

有唯一解 $(\bar{x} \ \bar{y})$ ，记以 $\bar{f}$ 为系数向量的多向式为 $f(s)$ ，可得

$$x(s)p(s) + y(s)c(s) = f(s) \quad (1-12)$$