全蘇函授工業學院 (13)

Г. С. Бараненков

巴拉""科夫

立體解析幾何解題方法參攷書

第二部份

莫斯科——1953年

西安航空學院——1956年

目　　　錄

空間解析幾何

第一章　空間坐標法、矢量代數初步

§1 坐标法

要確定點的位置，我們考慮直角坐標系OXYZ。點M對于各个軸的位置，被綫段 OA，OB，OC 所決定（圖 47），對應地等于點M到各坐標面的距離。

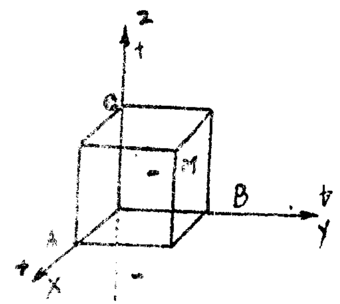

圖 47

如果量出了這些綫段是單位 (e) 的几倍，那麼這些綫段就可用數來表示。

用字母 x 表示綫段 OA 之長的數（即 $x=\frac{OA}{e}$），且稱之爲M的横坐標；用字母 y 表示綫段 OB 之長的數(即$y=\frac{OB}{e}$)，且稱之爲M的縱坐標；用字母 z 表示綫段 OC 長之數（即 $Z=\frac{OC}{e}$），且稱之爲 M 的竪坐標。

若綫段 OA 放在坐標原點的前面（沿着向讀者的方向），我們約定横坐標 x 爲正，若綫段 OA 放在坐標原點的后面，就是負的；若綫段 OB 放在原點右邊，稱縱坐標 y 爲正，若綫段 OB 放在坐標原點的左面，就是負的。最后，若 OC 放在上面，稱竪坐標 z 爲正，若 OC 向下，就是負的。

坐標平面 XOY，YOZ，和 XOZ 分空間成八部份（卦限），每个卦限都以其中點的坐標符號之一定組合作爲特徵。

在坐標平面上，所有的點，必有一坐標等于 O 。例如，在XOY 面上的點，竪坐標Z等于O。在坐標軸上的點，必有兩个坐標等于O。例如，在 OX 軸上

的點，它們的縱坐標 y 、和豎坐標 z ，都等于 O ；在原點的三个坐標 x 、 y 、 z 都等于 O 。

這樣一來，概括地說，每三个數祗能表示空間的一點，反之，空間的一點，，唯一地確定了三个數。

大學生在開始學習空間解析几何時的主要困難，在于需要訓練自己的眼睛，使能够在平面圖裏看出空間形狀。也就是發展自己的空間概念。在畫法几何中，已經有了把空間圖形畫在平面圖上，所不可缺少的一定法則。

今后，我們將遵照下列簡單實用的作法：OY軸畫成水平的，OZ 軸畫成垂直的，而OX軸實質上是同時垂直OY、OZ軸，畫成與OY軸成一只角(−135°)，當作已知坐標的點時，在OY、OZ軸上的尺度，是取成一樣的，而在OX軸上的尺度取得短$\frac{1}{2}$，亦即沿OX軸的量度都縮短了$\frac{1}{2}$。*

當作已知坐標的點時，也要記着空間的一切平行直綫，在平面圖形上仍保持着平行。這樣一來，XOY平面所有的垂綫，在圖形上保持平行于 OZ 軸；一切XOZ平面的垂綫，仍舊平行于OY軸，一切YOZ平面的垂綫，保持平行于OX軸。

設要求畫出已知坐標M（4，−3，−2）的點。爲此，給出確定的尺度（PQ），按照上面所述的關于在 OX 軸上的尺度，和關于坐標的符號，我們畫出 OA = 4，及OB = −3（圖 48）。

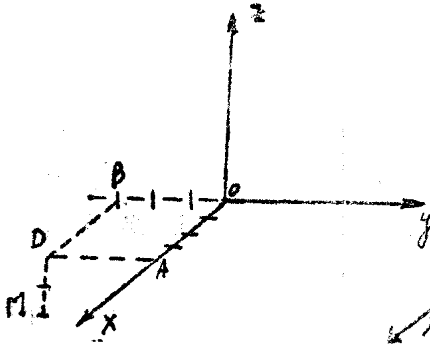

圖 48

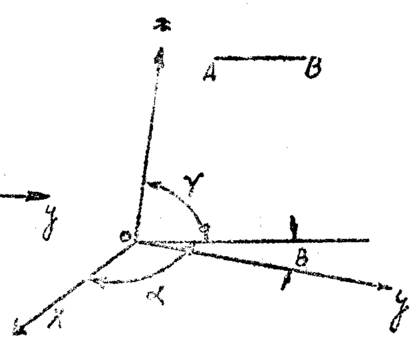

圖 49

*譯者註：畫平面時採用這樣的辦法，無非使得看起來較適宜于視覺的習慣而已。

過A，B引直綫平行于坐標軸，這些直綫相交于D。

自D引垂綫，垂直于XOY平面（這垂綫在圖形上平行于OZ軸）。在這垂綫上，向下（因爲$z=-2$）放兩个單位尺度，這垂綫的端點，就是所求點M。

實地的經驗告訴我們，只要作出折綫OADBM就可以了。

綫段AB（圖49）在空間確定了某个方向L。爲了要給出這个方向，只要把和AB平行之射綫L與坐標軸所成之角表示出就好了。我們同意將射綫與OX軸正向所成之角，以字母α表示；與OY軸正向所成之角，以字母β表示，與OZ軸正向所成之角，以字母γ表示。這三个角被關系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

所聯系。

若已給以角α_1，β_1，γ_1，及α_2，β_2，γ_2給出的二方向，二射綫L_1及L_2（或二綫段AB及CD），則它們的交角φ從下式計算：

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2。$$

因爲上述兩个公式，實際上只包含角α，β，γ的余弦——$\cos\alpha$，$\cos\beta$及$\cos\gamma$，那末可以說L的方向或綫段AB的方向被$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$所完全確定。$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$即稱爲此給定方向上的方向余弦。

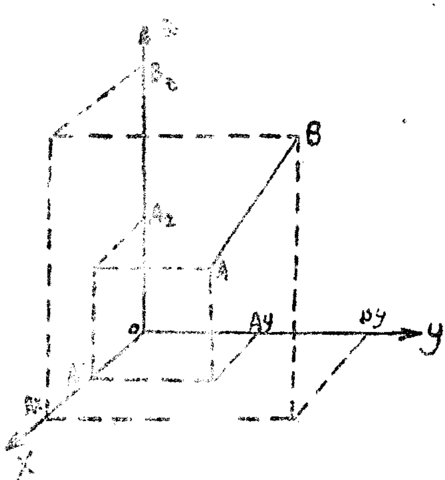

圖 50

若二綫段AB及CD所在之二直綫不相交（即所謂相左），則它們間之角，就是指的平行于此二直綫的相交二直綫間之角。

在解題時，進行下列考慮是比較方便的

設綫段AB（圖50）已知其

始點 A（x_1，y_1，z_1）及終點 B（x_2，$y_2 z_2$）。則此綫段在坐標軸上之射影從圖上容易看出可按下列公式，以 A 及 B 之坐標來表示：

$$пp_x AB = A_x B_x = x_2 - x_1$$

$$пp_y AB = A_y B_y = y_2 - y_1$$

$$пp_z AB = A_z B_z = z_2 - z_1$$

（亦即從終點坐標減去始點之坐標）

綫段之長度等于：

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

此綫段之方向余弦，亦即綫段（或經坐標原點與它們平行之射綫）與坐標軸正向所成角之余弦：

$$\cos\alpha = \frac{A_x B_x}{AB} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y B_y}{AB} = \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z B_z}{AB} = \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

我們研究下列問題的解法：

問題75. 確定兩綫段 AB 與 CD 間之角。它們的始點及終點之坐標爲：A（−4；5；1），B(2；7；−2)，C（5；−6；−4）及D（−4；6；4）。

以 α_1，β_1，γ_1 表示第一綫段 AB 與坐標軸正向所成之角，而以 α_2，β_2，γ_2 表示第二綫段 CD 與坐標軸正向所成之角，則有

$$пp_x AB = 2-(-4)=6$$

$$пp_y AB = 7-5 = 2$$

$$пp_z AB = -2-1 = -3$$

$$AB = \sqrt{6^2+2^2+(-3)^2} = 7$$

$$пp_x CD = -4-5 = -9$$

$$пp_y CD = 6-(-6) = 12$$

$$пp_z CD = 4-(-4) = 8$$

$$CD = \sqrt{(-9)^2+12^2+8^2} = 17$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{6}{7} \qquad \cos\alpha_2 = -\frac{9}{17}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{2}{7} \qquad \cos\beta_2 = \frac{12}{17}$$

$$\cos\gamma_1 = -\frac{3}{7} \qquad \cos\gamma_2 = \frac{8}{17}$$

且兩綫段間之角 φ 的余弦

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot(-9)+2\cdot 12+(-3)\cdot 8}{7\cdot 17} = -\frac{54}{119} = -0.453,$$

由此 $\varphi = 101°50'$ （查表）

§2 矢量代數初步

1. 有確定長度與方向的綫段稱之爲矢量。它們可分爲：

固着矢量，這種矢量的始點在空間有固定的位置（作用于完全彈性體上某一點的力可作爲這種矢量的例子）

滑動矢量，這種矢量位在一定的直綫上（作用于絕對剛體上的力可作爲這種矢量的例子）及

自由矢量，這種矢量的始點是不加區分的。

在解析几何中（若無特殊聲明）我們只考慮自由矢量，也就是這些可保持方向地移動的矢量。

按照定義兩个自由矢量被認爲是相等的：假如1）它們平行2）同一方向及3）它們的模（或矢量之長）相等。

在兩个矢量相等的定義的敍述里並沒有牽涉到這些矢量的附着點，附着于空間兩个不同點的兩个矢量假如它們滿足上述的三个條件時是被認爲相等的，對于平行移動空間矢量，這三个矢量相等的條件都不改變——這就是說，平行移動並不改變矢量。因此，若为了解題的方便，可以設所有矢量都是從一个始點引出的。

2. 在書本中用粗體字印刷的字母來表示矢量，在手抄時，書寫粗體字母是困難的，因此取 $\bar{a}$ 表示矢量，亦即用通常的字母上加一短綫來記它。有些時候

矢量是用兩个字母上面加一橫綫來表示，例如 $\overline{AB}$，在這个情况下，點A被認爲是矢量之始點（它的附着點）點B被認爲是矢量之終點。

矢量的長度，或即矢量之模或絕對値用表示矢量之同一字母來表示，但沒有上面那一短橫。有時候亦用此矢量加上直括號的形式來表示矢量之模。這樣一來，矢量 $\mathbf{a}$ 之長度可以 a 或 $|\mathbf{a}|$ 來表示而矢量 $\overline{AB}$ 之模則以 AB 或 $|\overline{AB}|$ 表示。

3.矢量几何地按照平形四邊形或多邊形規律相加，要想作出若干个矢量的和，就應從第一个矢量的終點作第二个矢量之始點，從第二个矢量的終點，作第三个矢量之始點等等。封閉這樣所得之折綫的矢量，即爲所求之和，這个矢量和的始點，與第一个矢量之始點重合，而終點則與最后一个矢量的終點相重。

矢量的和滿足：

1)交換律：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

2)結合律：

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

4.兩个矢量 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之差是指的另一个和 $\mathbf{b}$ 相加的和等于 $\mathbf{a}$ 的矢量 $\mathbf{c}$：

若 $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$ 則稱 $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$

實際計算矢量差的規律如下：

要減去矢量 $\mathbf{b}$，即相當于加上一个和它模相等而反向的矢量（$-\mathbf{b}$）

5.矢量和數量(數)的乘積，若有矢量 $\mathbf{a}$ 及數 m，則取位于和矢量 $\mathbf{a}$ 在同一直綫或和 $\mathbf{a}$ 平行的直綫上的新矢量 $\mathbf{b}$ 作爲乘積 $m\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}m$ 這新矢量的大小（模）等于 $|m||\mathbf{a}|$，若 $m>o$ 時，它的方向和 $\mathbf{a}$ 相同若 $m<o$ 時和 $\mathbf{a}$ 相反，在 $m=o$ 的情况下，乘積 $m\mathbf{a}$ 也等于零。

若兩个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 位于相平行的直綫上，則稱 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共綫，對于共綫的兩个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$。總有 $\mathbf{b}=m\mathbf{a}$。

若以同樣字母上肩加一小圈（$\mathbf{a}^{\circ}$）表示長度等于1而和矢量 $\mathbf{a}$ 有同一方向

的矢量，則從矢量和數量乘積的定義，即有：

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{a}^{\circ} \qquad (1)$$

（矢量 **a** 方向上的單位矢量 $\mathbf{a}^{\circ}$ 叫做它的定向矢）

若任給矢量 a，則以 **a** 的模 a 除 a 就得到了在這个方向的單位矢量 $\mathbf{a}^{\circ}$，亦卽

$$\mathbf{a}^{\circ} = \frac{\mathbf{a}}{a} \qquad (2)$$

6. 位于同一平面或平行于同一平面的平面上的矢量稱爲共平面矢量。

若我們有兩个不共綫的矢量 **a** 和 **b**，則每一个和矢量 **a** 和 **b** 共平面的矢量 **c**，都可以唯一的方式按矢量 **a** 和 **b** 分解，亦卽可以表示爲兩个分別和矢量 **a** 及 **b** 共綫的矢量之和。

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \qquad (3)$$

此處 m 及 n 爲某些數量。

若我們有三个不共平面的矢量 **a**，**b** 及 **c**，則每一矢量 **d** 可以唯一的方式按矢量 **a**，**b** 及 **c** 分解，亦卽它可以表示爲三个分別和這些矢量共綫的矢量之和：

$$\mathbf{d} = m\,\mathbf{a} + n\,\mathbf{b} + p\,\mathbf{c} \qquad (4)$$

此處 m，n 及 p 爲某些數量。

所述一个矢量按三个矢量的分解式（4）當空間是關于直角坐標系 OXYZ 的，且矢量 **a**，**b**，**c** 有 OX，OY，OZ 的方向並且長度爲 1 時（單位矢量——定向矢）是特別重要的情況，這樣的三个矢量稱爲基本單位矢量且以特殊字母 **i**（OX 軸的定向矢）**j**（Oy 軸的定向矢）及 **K**（OZ 軸的定向矢）表示，于是由（4）每个矢量 **M** 可表示爲

$$\mathbf{M} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \qquad (5)$$

此處乘數 X 稱爲矢量沿 OX 軸的坐標，且其值等于矢量 **M** 在 OX 軸方向的投影，亦卽 $X = M\cos\alpha$，類似地 Y 及 Z 爲矢量 M 沿 OY 軸及 OZ 軸的坐標，其值等于矢量 **M** 在 OY 及 OZ 軸方向的投影（$Y = M\cos\beta$，$Z = M\cos\gamma$，此處 α，β 及 γ 爲矢量 **M** 和 OX，OY 及 OZ 軸所成的角）矢量 $X\mathbf{i}$，$Y\mathbf{j}$，$Z\mathbf{k}$ 稱爲矢量 **M** 的

分量（对于坐標系OXYZ）

若矢量 $\overline{AB}$ 的始點和點 $A(x_1, y_1, z_1)$ 重合而其終點和點 $B(x_2, y_2, z_2)$ 重合，則矢量的坐標將等于：$X=x_2-x_1$，$Y=y_2-y_1$，$Z=z_2-z_1$，而矢量本身，在這情況下可寫成

$$\overline{AB}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k。\qquad (5')$$

我們通常簡寫 $\mathbf{M}\{X, Y, Z\}$ 來代替把矢量全部寫出成

$$\mathbf{M}=Xi+Yj+Zk \quad 之形式$$

7.在矢量的加法中，它們的同名坐標相加，例如，若已給兩个矢量：

$$\mathbf{M}_1=X_1i+y_1j+Z_1k$$

及

$$\mathbf{M}_2=X_2i+y_2j+Z_2k$$

則它們的和

$$\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2=(X_1+X_2)i+(y_1+y_2)j+(Z_1+Z_2)k \qquad (6)$$

在矢量減法中，它們的同名坐標相減：

$$\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2=(X_1-X_2)i+(y_1-y_2)j+(Z_1-Z_2)k \qquad (7)$$

在矢量和數量的乘積中，矢量的坐標被此數量相乘：

$$L\mathbf{M}=LXi+LYj+LZk \qquad (8)$$

8.等式(5)建立了矢量理論中几何和代數部分間的關系，矢量分析（在其中矢量的几何及代數的解說相互有着補充）有可能利用矢量的几何表示而于其上作出所有必需的代數計算。

在矢量代數中所採用的一些名詞是從拉丁字來的。

數量這个字來自拉丁字"Scalare"——"計量"（選擇量度單位之后，可以用尺度表示數量的值）矢量這个字來自"Veheve"——"拖拉"，單位矢量稱爲定向矢——來自"Orientation"——"方向"。

術語共綫來自兩个字："Com"——"共"及"Linea"——"綫"，術語共面來自兩个字："Com"——"共"及"planum"——"平面"。

"分量"來自"Componere"——"堆"

問題76，已知矢量 $\overline{AB}=\mathbf{b}$ 及 $\overline{AC}=\mathbf{C}$ 求和角BAC的平分綫共綫的矢

量 a。

若以矢量 b 及 c（圖51）作一平行四邊形，則這个平行四邊形的對角綫 b + c 一般說來，並不平分角 BAC，僅只在 b 及 c 的長度一樣的時候，亦即它們組成菱形的時候，對角綫才平分這只角。因此，為了要解決這个問題必須這樣來進行：找出在矢量 b 及 c 方向的單位矢量 b° 及 c°，于是這些單位矢量的和，作為菱形的對角綫將重合于角BAC的平分綫之方向，因而所求向量當然可以用這樣兩个單位矢量的和來表示：

按照公式（2），我們有

$$b^{\circ}=\frac{b}{|b|}\text{ 及 }c^{\circ}=\frac{c}{|c|}$$

因此和角$\widehat{BAC}$的平分綫共綫的所求矢量將等于：

$$a=\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$$

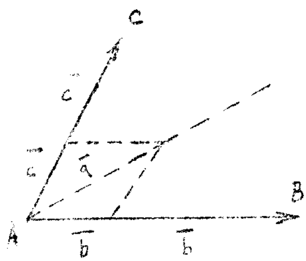

圖 51

附註：其他每个矢量

$$A=\lambda\left(\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}\right)$$

此處 λ 為不等于 0 的乘數，都是所提問題的答案。在解題中，可以取沿矢量 b 及 c 方向的非單位矢量，只有它們要有同樣的長是主要的。

問題77. 已給三角形 ABC，試證中點綫 DE 平行于底且等于其長的一半。

設有ΔABC（圖 52），我們設三角形的邊 AB 及 AC 為矢量且給予它們，以圖中的箭頭表示的方向，即 $\overline{AB}=c$ 及 $\overline{AC}=b$。此外再設一些必要的綫段為矢量，被取定了它們的方向。由問題的條件必須把 $\overline{DE}$ 用 c 表示出來。

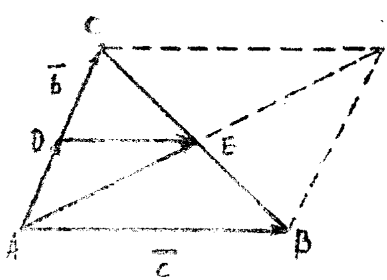

圖 52

因爲點E平分邊CB（由中點綫），于是矢量 $\overline{AE}$ 是以 **b** 及 **c** 爲邊的平行四邊形對角綫的一半，即

$$\overline{AE}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

從 ΔADE，矢量 $\overline{DE}$ 可以表示爲矢量 $\overline{AE}$ 和 $\overline{AD}$ 的差：

$$\overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}$$

或

$$\overline{DE}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})-\frac{1}{2}\mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$$

但由矢量相等的定義，這就是說，矢量 $\overline{DE}$ 平行于矢量 **c**，（三角形的底）而它的長度等于它的一半。

問題 78．矢量的始點和終點分別對應爲 A（2；−1；4）及 B（3；1；−2）求這矢量的坐標表示式（亦即求出這矢量按坐標軸的分解式）。

我們從（5）有

$$\overline{AB}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k},$$

亦即

$$\overline{AB}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

兩个矢量的數性積

1．兩个矢量長度的乘積和它們夾角余弦的乘積稱爲此二矢量的數性積：

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot B\cos(\widehat{AB}) \qquad (9)$$

數性積是數量。

2．若矢量 **A** 及 **B** 給成下列形式：

$$\mathbf{A}=X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k}$$

及

$$\mathbf{B}=X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k}$$

則數性積 **AB** 積于：

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \qquad (10)$$

3．當 **A**，**B** 之一为零，或當 A 和 B 相互垂直的時候，數性積 **AB** 等于零

（因爲在后一情況 $\cos(\widehat{AB})=0$）

于是，兩个矢量垂直的條件爲它們的數性積等于O。亦即：

若 $\mathbf{A}\mathbf{B}=0$ 或 $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$ （11）

則 **A** 垂直 **B**。

4.一矢量和其自身的數性積，（或矢量的數性平方）等于矢量的數値（模）平方，即

$$\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2=A^2 \tag{12}$$

由此，矢量之長

$$A=\sqrt{\mathbf{A}^2}=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2} \tag{13}$$

5.矢量 **A** 在另一矢量 **B** 上的投影等于數性積 **AB** 以矢量 **B** 的長除之。即

$$\text{пр}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}\mathbf{B}}{B}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{14}$$

6.數性積適合下列規律：

（a）交換律：

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{A}$$

及（б）分配律：

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$$

亦即數性積服從代數多項式的乘法規律。

7.兩个矢量 **A** 及 **B** 間的角 φ 依下列公式確定：

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{A}\mathbf{B}}{A\cdot B}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{15}$$

矢量 **A** 對各坐標軸之方向余弦可表之如下：

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{A}\mathbf{i}}{A}=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{A}\mathbf{j}}{A},\ \text{及}\ \cos\gamma=\frac{\mathbf{A}\mathbf{k}}{A} \tag{16}$$

問題79.試證平行四邊形對角綫的平方和等于其各邊的平方和

設平行四邊形的邊及對角綫有像圖 53 所示的方向。

從這裏有。

$\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{d}_2=\mathbf{a}-\mathbf{b}$

將上面各个等式平方，得。

$\mathbf{d}_1^2=\mathbf{a}^2+2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$

$\mathbf{d}_2^2=\mathbf{a}^2-2\,\mathbf{a}\,\mathbf{d}+\mathbf{b}^2$

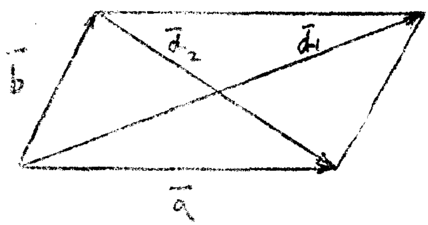

圖 53

相加，得

$\mathbf{d}_1{}^2+\mathbf{d}_2{}^2=2\,(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$

或由(12)

$$\mathrm{d}_1{}^2+\mathrm{d}_2{}^2=2\,(\mathrm{a}^2+\mathrm{d}^2)$$

這就是所要求的證明。

問題80.已給矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$。求和矢量 $\mathbf{A}$ 同一方向的單位矢量。

由公式(2)及(13)有

$$\mathbf{A}^\circ=\frac{\mathbf{A}}{\mathrm{A}}=\frac{\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

此數量 $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$ 等于矢量 $\mathbf{A}^\circ$（当然也是 $\mathbf{A}$）和坐標軸所成角的余弦即

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=-\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

每一單位矢量都可寫成

$$\mathbf{a}=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k},$$

此處 α，β，γ 是它和坐標軸所成的角。

問題 81 求矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{a}-4\,\mathbf{b}$ 之長，若已知 $a=2$，$b=1$ 及 $(\widehat{ab})=\frac{\pi}{3}$。

由公式(12)及(9)有：

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}^2=(\mathbf{a}-4\,\mathbf{b})(\mathbf{a}-4\,\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-8\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}+16\,\mathbf{b}^2=$$

$$=\mathbf{a}^2-8\,a\,b\cos(\widehat{ab})+16\,b^2$$

或

$$A^2 = 2^2 - 8\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 16\cdot 1^2 = 12$$

由此，

$$A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

問題82 已給兩个矢量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 及 $\mathbf{B} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$，此處 $a = 2$，$b = 1$ 及 $(\widehat{ab}) = \frac{2\pi}{3}$，求矢量 $\mathbf{A}$ 在矢量 $\mathbf{B}$ 方向上的投影及矢量 $\mathbf{B}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 方向上的投影。

由公式(14)有

$$\text{np}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \frac{\mathbf{AB}}{B} \text{ 及 } \text{np}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{AB}}{A}$$

我們來求 $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$，A 以及 B ·

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = (2\mathbf{a} - \mathbf{b})(4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 8\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\,\mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2$$

$$= 8\cdot 4 + 2(-1) - 3\cdot 1 = 27。$$

(因爲 $\mathbf{a}^2 = a^2 = 4$，$\mathbf{b}^2 = b^2 = 1$ 且 $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = ab\cos\frac{2\pi}{3} =$

$$2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1\ )$$

$$A = \sqrt{\mathbf{A}^2} = \sqrt{4\mathbf{a}^2 - 4\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{4\cdot 4 - 4(-1) + 1} = \sqrt{21}$$

$$B = \sqrt{\mathbf{B}^2} = \sqrt{16\mathbf{a}^2 + 24\mathbf{ab} + 9\mathbf{b}^2} = \sqrt{16\cdot 4 + 24(-1) + 9\cdot 1} = \sqrt{49} = 7$$

于是

$$\text{np}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7} \quad \text{且} \quad \text{np}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \frac{27}{\sqrt{21}} = \frac{9}{7}\sqrt{21}$$

問題83 在 XOY 平面上求一矢量 $\mathbf{P}$，已知 $\mathbf{P}$ 垂直于矢量 $\mathbf{Q}\{5, -3, 4\}$，且與 $\mathbf{Q}$ 具有同樣的長度 L 。

已給矢量 $\mathbf{Q} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$，且所求的矢量 $\mathbf{P} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$

要求確定矢量 $\mathbf{P}$ 的坐標，即 X 和 Y。

我們有兩个条件去確定它們:

(a)**P** 垂直 **Q** 即公式(11), $5X-3Y=0$

(6) $P=Q$ 即公式(13),

$$\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}\;;\;X^2+Y^2=50。$$

對于X和Y解上列兩个方程式得:

$$X=\pm\frac{15}{\sqrt{17}}\quad 及\quad Y=\pm\frac{25}{\sqrt{17}}$$

于是所求矢量: $$\mathbf{P}=\pm\left(\frac{15}{\sqrt{17}}\mathbf{i}+\frac{25}{\sqrt{17}}\mathbf{j}\right)$$

兩个矢量的矢性積:

1. 滿足下列條件的新的矢量 **C**, 叫做兩个矢量 **A** 和 **B** 的矢性積

(a)**C** 的長度等于 **A** 和 **B** 所構成的平行四邊形的面積。

(6)矢量 **C** 垂直于矢量 **A** 與 **B** 所在的平面。

(в)矢量 **C** 指向這樣的一邊, 使得從矢量 **A** 繞所得的矢量 **C** 沿最短途徑到 **B** 的轉向產生像從 OX 軸繞 OZ 轉到 OY 軸一樣的轉向。(亦即若從 **C** 的終點看去是逆時針的)

2. **A**, **B** 的矢性積記作 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。它的數量 (模) 等于平行四邊形的面積。

亦即 $$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=A\cdot B\sin(\widehat{\mathbf{AB}}) \tag{17}$$

3. 若矢量 **A** 和 **B** 的坐標已知, 則 **A**, **B** 的矢性積等于:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\end{vmatrix} \tag{18}$$

它的數量 (模) 用通常的方法計算, 展開行行式, 然后取矢性積的坐標的平方和的平方根。

4. 當乘數 **A** 或 **B** 中的一个爲 0, 或者當矢量 **A** 與 **B** 共綫 (重合) 矢性積等于 0。所以兩矢量平行, 共綫的條件是此二矢量的矢性積爲 0 。

矢量自身的矢性積等于0

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0 \tag{19}$$

5. 當乘數的次序改變，則矢性積改號：

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \tag{20}$$

即矢性積不滿足交換律。

6. 矢性積滿足分配律：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C} \tag{21}$$

問題84 已給二矢量 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=2\mathbf{i}+5\mathbf{k}$，確定矢性積 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 的數量。

按(18)有
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}=-5\mathbf{i}-17\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

由(13)有，
$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{(-5)^2+(-17)^2+2^2}=\sqrt{318}。$$

問題85 計算三角形的面積，其頂點位于 A(2；0；−1)，B(−3；2；2)，C(4；1；−2)。

矢量 $\overline{AB}$ 對應的邊 AB（參看問題78），將有：

$$\overline{AB}=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

且矢量 $\overline{AC}$ 爲：

$$\overline{AC}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

三角形的面積等于此二矢量所構成的平行四邊形面積的一半，而平行四邊形的面積等于此二矢量之矢性積的數量。這樣一來，若

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -5 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}-9\mathbf{k}$$

則

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{25+1+81}=\frac{1}{2}\sqrt{107}。$$