

В.И. Попков
ЭЛ. Мышинский
О.И. Попков

ВИБРО- АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА В СУДОСТРОЕНИИ

КАЧЕСТВО
И НАДЕЖНОСТЬ

造船业中的振动噪声诊断 (质量和可靠性)

中国船舶工业总公司 第七研究院 第七一一研究所



В.И. Попков
Э.Л. Мышинский
О.И. Попков

**ВИБРО-
АКУСТИЧЕСКАЯ
ДИАГНОСТИКА
В
СУДОСТРОЕНИИ**

**КАЧЕСТВО
И НАДЕЖНОСТЬ**

造船业中的振动噪声诊断
(质量和可靠性)

中国船舶工业总公司 第七研究院 第七一一研究所

出版说明

《造船业中的振动噪声诊断(质量和可靠性)》第二版修改补充本,是1989年由前苏联列宁格勒造船出版社出版的,作者为符·依·保普柯夫(В·И·Попков),爱·列·梅辛斯基(Э·Л·Мяшинский)和奥·依·保普柯夫(О·И·Попков)。原版书由作者于一九九二年十二月访问本所时所赠。为使国内同行了解俄罗斯振动噪声控制技术之现状。

本书由上海船用柴油机研究所情报室翻译,内部出版,上海船用柴油机研究所副所长、总工程师李国瑞总审,张泉南总技校,李岳春责任编辑、张志耀出版编辑,其中第一章由王桐林译,于尧治、李岳春校;第二章由袁汇海译,孔昭懋校;第三章由李岳春译,金福民校;第四章由金福民译,李岳春校;第五章由高裕丰译,周辉辉校;第六、七、八章由周辉辉译,金福民校。封面设计孟咸昌。温立新、张志耀、董维森、周玲玲是本书出版的主要工作人员。

由于原版本有误,且出自多人之手,译编过程中虽经努力纠正,肯定还会有不尽人意之处,敬请读者指正。

上海船用柴油机研究所

一九九三年十月

内 容 提 要

《造船业中的振动噪声诊断(质量和可靠性)》一书主要论述了机械与结构的振动噪声诊断。研究了空间结构的振动、动态力、振动功率流和机械阻抗的实验研究方法及设备。叙述了振源的定位方法。分析了故障的类型、典型的磨损及其对机械振动的影响。给出了同微电子元器件制造振动噪声测量仪表的建议。

本书的对象为从事工业和运输振动噪声研究的专家、大学生、研究生和教师。

前 言

造船界中最重要的课题之一，就是与船舶噪声及振动作斗争。在提高机器和结构的可靠性与寿命，以及保证船员和乘客正常的居住条件时，必需解决这个课题。不掌握较高振动的振源、较高振动产生的原因以及沿着船舶结构的主要传布途径，就不可能制订出降低振动的有效手段，因此首先要求开发振动噪声的研究方法，并开发有关的振动噪声诊断仪表。本书作者在考虑了作用力的特点后，力求总结空间结构的振动、动态力、振动功率流和机械阻抗的频谱特性、时间特性和统计特性的各种研究方法，并指出，在确定振源位置、检测并诊断机器和结构在使用过程中的状态，确定振动加剧时共振现象的作用时，采用哪一种方法最为合理。本书中首次阐明了在技术状态不变条件下船用机器振动级的波动问题。如果不考虑这些波动，则在诊断机械使用过程中的技术状态时，可能产生很大的误差。引用的有关如何选择测量位置和检测周期的建议，允许在测量次数最少的情况下来确定，由于船用机械技术状态的恶化，振动有否变化以及振动的单调变化速度，是否出现个别的故障。书中研究了不同型式的诊断模型，按照这些模型可以评估在振动的谱分量与机械的结构参数之间的准决定关系以及随机关系时船用机器的技术状态。

书中十分重视用微电子电路构成的振动噪声测量仪表的实现方法。引用了最近开发的微电子部件(多通道转换器和模/数转换器的大规模集成电路，运算放大器)的资料，以及微机型号、光导纤维的集成电路模块、线性无线电遥测通道的微电路等资料，并且给出了在振动诊断和振动级检测系统中应用它们的建议。

作者向在准备和编写本书材料中给予帮助的同事们谨致谢意。

爱·列·梅辛斯基编写了第2、3章及第1.5、1.6节；符·依·保普柯夫编写了第4、5章及第1.1~1.4节；爱·列·梅辛斯基与符·依·保普柯夫合写了第1.7节；奥·依·保普柯夫编写了第6、7、8章。

请将评语及意见寄往下列地址：191065，列宁格勒，戈果理街，8号，“造船”出版社。

目 录

1	振源识别	(1)
1.1	频谱分析	(1)
1.2	幅值-时间分析	(4)
1.3	用互谱和机械阻抗法确诊振源	(7)
1.3.1	不相关振源的统计	(8)
1.3.2	相关振源的统计	(12)
1.4	调制特性和相关性方法	(16)
1.4.1	调制特性法	(16)
1.4.2	相关性方法	(19)
1.5	关于建立拟确定性准诊断模型试验规划方法的应用	(22)
1.6	机械结构参数与振级随机联系时识别度量方法的应用	(27)
1.7	根据振动统计特性确定机械技术状态	(31)
2	机械在使用过程中的振动变化	(39)
2.1	船用机械在使用过程中振动级变化的原因	(39)
2.2	技术状态恒定时机械振动级的波动	(42)
2.3	磨损对振动的影响及船用机械典型的故障	(44)
3	机械在使用过程中的振动检验	(49)
3.1	常规检验船舶机械振动测量位置和测量周期的选取	(49)
3.2	振动常规测量中机械状态的诊断	(54)
3.3	趋势检测法	(56)
3.4	建立趋势图并检验其适应性	(59)
3.4.1	鉴别趋势	(59)
3.4.2	置信区间	(60)
3.4.3	趋势适应性的检验	(61)
3.5	剩余寿命预测	(62)
3.5.1	线性趋势的预测	(62)

3.5.2	短时间预测的适应性·····	(65)
3.6	按照测量结果诊断机械振动状态的实例·····	(67)
3.7	船上机械的振动监视·····	(71)
4	结构动态特性的研究·····	(76)
4.1	提出任务·····	(76)
4.2	结构的机械组抗和导纳·····	(77)
4.3	在线性力的作用下, 结构机械阻抗的测量·····	(79)
4.4	测量力矩作用下结构的机械阻抗·····	(88)
4.5	频带内结构的机械阻抗·····	(89)
4.6	找出结构的共振元件、有效导纳·····	(92)
4.7	用冲击激励法测量结构的动态特性·····	(99)
4.8	研究结构及其元件的耗散特性 ·····	(101)
4.8.1	粘弹性材料复合模数的测量 ·····	(102)
4.8.2	测量机械结构元件内的损耗因子 ·····	(105)
4.8.3	混响法测量损耗因子 ·····	(105)
4.8.4	按照共振宽度来测量损耗因子 ·····	(108)
4.8.5	有关测量机械结构元件标准样品损耗因子的建议 ·····	(108)
4.8.6	测量复杂空间机械结构的耗散因子 ·····	(109)
4.8.7	正交投影法 ·····	(111)
4.8.8	虚力法 ·····	(111)
4.9	确定空间结构的隔振特性 ·····	(112)
5	根据动态力和振动功率流的信息识别振源 ·····	(115)
5.1	机械对连接结构动态作用力的测量 ·····	(115)
5.1.1	用压电传感器测量作用力 ·····	(115)
5.1.2	用特种螺栓测力 ·····	(119)
5.1.3	用嵌入减振器橡胶块中的压电元件测力 ·····	(120)
5.1.4	用振动传感器测力 ·····	(120)
5.2	用互易法确定振源中的动态力 ·····	(122)

5.3	振动功率流的确定	(124)
5.3.1	测量振动功率的直接方法	(125)
5.3.2	测量振动功率的间接方法	(129)
5.3.3	根据机械和基础结构(在减振系统之前和之后) 振动信息确定振动功率	(133)
5.3.4	根据有效机械阻抗的信息确定振动功率	(135)
5.3.5	确定沿管道传播的振动功率	(137)
5.4	用能量法和动态力法确定振源的位置	(141)
5.4.1	建立机械的数学模型	(144)
6	多路转换器	(148)
6.1	多路转换器的结构	(148)
6.1.1	单级多路转换器结构	(148)
6.1.2	多级多路转换器结构	(151)
6.1.3	不选用通道短路的多路转换器结构	(152)
6.1.4	矩阵结构多路转换器	(153)
6.1.5	准同步查询用的多路转换器	(153)
6.2	集成电路多路转换器	(155)
6.2.1	双极型结构多路转换器	(155)
6.2.2	场效应金属-电介质-半导体(MIS)结构多路转换器...	(156)
6.3	声学振动信号传输用高精度多路转换器	(164)
6.4	多路转换器的抗干扰性	(167)
7	声学振动信号输入和预处理用微型器件	(170)
7.1	声学振动信号采样用集成放大器	(170)
7.2	应用模/数转换器(A/D)采集、处理声学振动信号...	(177)
7.2.1	积分型(斜率型)集成A/D转换器.....	(177)
7.2.2	反馈电路带D/A转换器的集成A/D转换器	(180)
7.2.3	差动转换式集成A/D转换器.....	(181)
7.2.4	声学振动信号处理用的A/D和D/A转换器	

	附加误差的基本原因	(182)
7.2.5	微型 A/D 和 D/A 转换器	(183)
7.3	振动信号谱分析和统计处理用的超小型装置	(187)
7.3.1	声学振动信号谱分析仪	(187)
7.3.2	振动过程统计特性集成测量装置	(191)
7.3.3	相关器	(193)
7.4	应用微机来采样、处理声学振动信号	(197)
8	自主式和光导纤维式声学振动信号采样、处理装置 ...	(212)
8.1	带存储器的自主式集成装置	(212)
8.2	利用光导纤维信号传送线的声学振动信号采样装置 ...	(220)
	参考文献	(235)

1 振源识别

1.1 频谱分析

频谱分析是机械状态监测振动与噪声源识别最为采用的方法。对各种机械进行的振动频率值的识别以及工作过程研究已出版了许多著作[6、7、10、16、24、28、44和53]。书中所述根据频谱分析方法提供的大量信息特征可以确定具体机械的主要部件是否正常。

采用综合测量能完成这样的研究，其结构示意图示于图1.1。信息的三维频谱处理可用模拟设备(见图1.1a)，也可用数字设备(见图1.1b)完成。在图1.1a所示的装置图中，采用了多通道同步频谱分析仪和多通道磁带记录设备。

为了有效地采集和处理有关机械状态的信息，必需采用计算机和专门的数字装置。由于采用通用计算机或借助于专用的小型或微型计算机来处理信息，结果将能顺利地得到：

传感器瞬态电压值的分布；按点的平均频谱；每个监视点上频谱和频谱成份的最大值；在机械上沿测点的振动幅值分布；机械在各种工况下振动特性变化的规律，各个部件因受各种物理过程(轴承中的机械扰动力和叶轮机械的流体动力等)引起的振动水平增加的规律性能够查明该机械的振源；轮流起动各个单独机械时(如果可能的话)得到的装置振动频谱，比较这种情况与全部机械运转时的振动频谱，就能够识别机械各个频率对应的振源；随机过程的相关和回归特性。

诊断机械振动增大原因的正确算法应建立在以工作过程特点和零件状态与振动频谱之间的相互联系的基础之上。在计算机存储器内能保存的信号(按最大的信息参数)是机械技术状况的标准样本。这些信号经与实际情况相比较，就能够查明机械振动增大的原因并能确定其部件的状况。

在图1.1所示的综合测量系统中，规定了计算机的联系。

振源识别可借助于数字信号处理装置按立体振动分析的结果来实现。这种处理装置的结果示意图示明于图1.1b，它包括从前置放大器来的模拟信号经多通道模/数转换器向总线输入信息。信息的处理在具有相应的数学上可靠的计算机上实现。为分析所必需的信息(样品、模型、有关许

用值的数据资料等)均可保存在存储器内, 其容量可以扩充。操纵台有显示器并可使操作人员能应用对话来控制运行中的计算机运行。

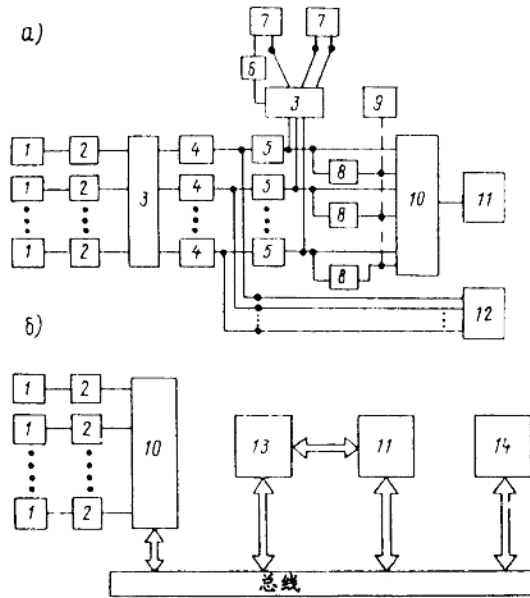


图 1.1 采用模拟(a)和数字(b)装置处理三维振动特性谱的结构示意图

- | | | |
|---------|--------------|-------------|
| 1—传感器 | 6—移相器 | 11—计算机 |
| 2—前置放大器 | 7—谱的相关测量器 | 12—多通道磁带记录器 |
| 3—转换器 | 8—均方根检波器 | 13—存储器 |
| 4—测量放大器 | 9—包络分析器 | 14—操纵台 |
| 5—分析器 | 10—多通道模/数转换器 | |

图 1.2 为研究和检测机械振动噪声特性用的 B/K 公司(丹麦)仪器装置结构示意图。在这个装置里为进行双通道同步分析, 应用了 2020 型外差从动滤波器(见图 1.2a)它由 1024 及 1027 型信号发生器控制。两个 2020 型滤波器可以用一个 5716 型双通道(由 1047 型信号发生器控制)(见图 1.26)或者 5888 型(由 1050 型信号发生器控制)来代替。通常分析带宽是 3.16; 10; 31.6 和 100Hz。同步分析通道的通道数可以增加。为减小分析带宽可利用调频式 7003 型磁带记录器(转换率为 10)转换或者用

7502 型数字式自动记录器(转换率为 $2 \times 10^5 \sim 5 \times 10^3$) 转换。分析带宽按转换率的百分比减少。

频谱分析在机械运行的状态工况下进行(跟踪频谱分析)可提高其有效性。这时与转频有关的主要振源可被分析出。

在完成跟踪频谱分析时,可利用 1901 型频率倍乘器来取代控制信号发生器(见图 1.2)。用频率倍乘器来控制调谐的 2020(或 3348、2031、2033 型实时分析器)型跟踪滤波器,使之对应于所研究机械转数传感器转数信号的变化。图 1.2 所示装置的信号处理速度和能力由于通过 B/K 公司的模拟仪器接口与总线及计算机组合明显地增大。这样的结合能够利用模拟仪器对进入计算机的信息进行数据整理和压缩。这类利用微机技术的组合装置详见第 6 和第 7 章。

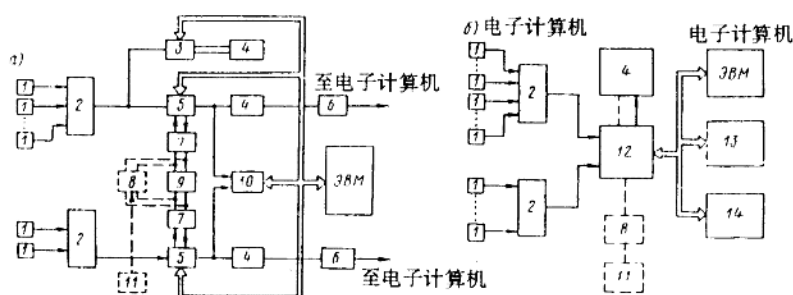


图 1.2 测量机械振动噪声特性用的 B/K 公司仪器装置结构示意图

1—2651, 2626, 2635 型电荷放大器

2—5619, 2811 型多路转换器

3—2031, 2033 型实时分析仪

4—2307, 2308 型电平记录器

5—2606, 2607, 2610, 2636 型测量放大器

6—2421 型数字编码装置

7—2020 型从动滤波器

8—1901 型跟踪频率倍乘器

9—1027 型可调信号发生器

10—55370 型模拟相关函数分析器(获萨公司)

11—MM0012 型转速传感器

12—2032 / 34 型双通道分析器

13—2313 型图表记录仪

14—7400 型数字记录器。

1.2 幅值-时间分析

对于绝大多数的运动件来说,刚性的连续接触和明显的工作周期性是一系列船舶机械的特点。这些机械振动是脉冲的连续作用,其脉冲特征是振幅相当大,持续作用期短(与机械工作周期比较),而高频丰富。对机械周期性振动信号用幅值-时间关系进行分析最为有效。

信号参数信息的预处理合理地可借助于模拟技术设备实现,而信息后处理则可借助于计算机来完成。当对计算机存储容量和计算机速度要求降低时,为处理测量信息,可利用小型和微型计算机。

按机械周期信号处理过程功能描述的综合测量信息系统(ИИС)示于图 1.3 上。测量信息系统的测量部分与研究对象的联系通过振动噪声传感器来实现。

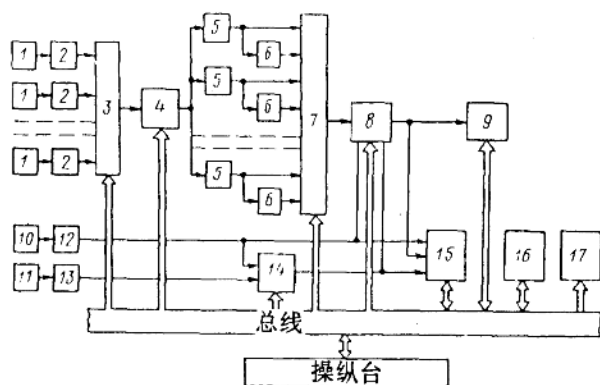


图 1.3 周期作用机械振动噪声诊断系统的结构示意图

- | | |
|-----------------|--------------|
| 1—传感器 | 9—电压/数码转换器 |
| 2—前置电压放大器或电荷放大器 | 10—周期触发传感器 |
| 3—转换器 | 11—频率传感器 |
| 4—测量放大器 | 12,13—归一化转换器 |
| 5—带通滤波器 | 14—频率倍乘器 |
| 6—均方根值检波器 | 15—相位/数码转换器 |
| 7—转换器 | 16—信息处理装置 |
| 8—同步测量器 | 17—信息输出装置 |

为了便于信号后处理必需将信号分类和归一化处理，为此通常利用电荷放大器。信号从电荷放大器的出口进入测量转换器 $KM1$ 的入口，组成信号的幅值分布。这时由操纵台(БУ)的出口沿总线进入相应的地址码， $KM1$ 把输入信号接通到各自的出口。

机械周期性振动信号的特点是其宽的动态范围与测量信息系统(ИИС)测量部份相对窄的动态范围必需一致。为此目的，可把信号从测量转换器 $KM1$ 的出口传送到测量放大器(ИУ)的入口。这时测量放大器的放大系数按操纵台的程序变化，测量放大器则使信号按振级归一化。归一化的信号从测量放大器的出口输出，再进入进一步处理的带通滤波器入口。振动信号滤出的分量从滤波器出口进入相应的均方根检波器(СКД)入口。带通滤波器及检波器两者与测量转换器 $KM2$ 连接，选取测量转换器 $KM2$ 是为了以后对所需从操纵台出口沿总线进入与相应地址码信号的处理用。以后信号的处理与其对时间的选择有关，它可借助于同步测量器(СИ)在给定的选通脉冲时间间隔内把信号接通到同步测量器的出口来实现。

在机械周期内整个一系列运动件的碰撞时间与轴转角之间具有固定的关系。为了确保选通脉冲参数与信号相位参数测量结果不依赖于机械高速工况，相位选择与相位信号参数的测量以对象工作周期相对初始转角度数来实现。为此采用了周期初始角传感器(ВНИ)和转速频率传感器(ДИВ)信号来测定机械工作周期初始时间并按转角实现周期的量化。

周期初始角传感器和转速频率传感器两者信号的归一化用归一化转换器来实现，它把上述传感器的信号转变成固定幅值和长度的矩形脉冲。从转速传感器之后转换器出口的脉冲跟踪频率通常不能确保所要求的分辨力，因此在周波量化时必需对它放大。

为此，信号从归一化转换器出口到频率倍乘器入口，频率倍乘器(УЧ)则按程序给定的系数倍乘输入频率。脉冲从频率倍乘器出口——相位标记——进入同步测量器的入口，同步测量器则在振动脉冲参数测量工况下在给定时间间隔内把输入信号在规定时间内送到出口。相对于周期初始的选通脉冲前、后沿位置以机械轴转角度数表示，由电码提供并沿总线从操纵台出口输出。信号从同步测量器出口进入电压/数码转换器(ПНК)

以及相位/ 数码转换器(ПФК)的入口。

在脉冲振动参数测量时, 除了确定幅值以外, 同时还要确定以曲轴转角度数表示的相位参数以及周期初始与脉冲产生瞬时两者之间的时间间隔。

把相位参数转换成数码籍助于相位/ 数码转换器来实现。电压/ 数码转换器和相位/ 数码转换器给出测量结果数码到总线, 然后进入信号处理器(БО)进行进一步信号处理并按给定程序计算出对象的结构参数值。

同步储存数据能提高信噪比。在模拟—数字振动脉冲检波时, 由于把信号转换成其通过振动脉冲包络线沿总线进入处理器的数码块。这时输入处理器数据库的每个数码与先前数码块的数码叠加, 然后把叠加的结果储存并依次轮流输入数据库等等。

在输入处理器及数据库的给定数处理终止以后, 振动脉冲平均包络线已分离出(采用叠加输入数据库数的结果分离)并且转移到子程序以实现对象包络线信息参数的估算(积分、微分及其它运算)。然后估算得到的振动信号信息参数用来确定机械的结构参数。为提高诊断的可靠性通常采用信号信息参数的综合。给每个信息参数添加上确定的加权系数, 并从下列回归方程式中得到机械的结构参数值:

$$X = C_0 + \sum_{i=1}^m C_i Y_i,$$

式中, C_0 —常数; C_i —回归方程系数与带有 i 信息标志的对象结构参数有关; Y_i — i 信息标志值。

回归方程求解结果送到总线并进一步送到信息输出装置(БОИ)去, 例如到数字指示器或数字打印装置去。当这一诊断对象结构参数测量过程一完工就转入下个结构参数测量等等。

测量信息系统(ИИС)所研究的结构基本上由各单个结构和功能完整的器件组成, 而器件之间的信息(测量的和指令的)交换按全部器件的母线即总线进行。上述结构的特点可确保在信号处理时其高度的适应性, 因为不仅功能器件的参数允许改变而且供给信号相应的程序结构也允许改变。除了程序方法以外, 测量信息系统功能的能力可以用增加系统的器件量来拓宽。

1.3 用互谱和机械阻抗法确诊振源

在许多机械中, 尤其是在由几个机械组成的装置中, 常有产生同一频率振动的一些振源。在这种情况下, 可藉助于互谱法和机械阻抗法在激励机械或装置的总振动内, 测定振源的位置并确定振源的相对作用。

在检测点内机械或装置的振动 $\dot{q}^n(t)$ 是机械工作部件内扰动结果的叠加(见 5.4 节):

$$\dot{q}^n(t) = \sum_k Q(t) \Pi^{kn}(t) + \sum_p h(t) H^{pn}(t),$$

式中, $\Pi(t)$ ——由扰动特性源到结构的传递函数; $h(t)$ ——由部件到激励源内的振动过程函数; $H(t)$ ——系统的脉冲响应函数。

如果考虑运动副相互配合元件的阻抗关系, 激励运动源也可以是力。这时, $\dot{q}^n(t)$ 方程如下:

$$\dot{q}^n(t) = \sum_{k=1}^m Q(t) \Pi^{kn}(t),$$

式中, m ——振源数。

对所研究的频率, 检测点内振动能量谱的表达式则为:

$$s(\dot{q}_i^n, \dot{q}_i^n) = \sum_{u=1}^m \sum_{r=1}^6 s({}^u Q_r, {}^u Q_r) |{}^u M_{ri}^n|^2 + \\ + \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq p}}^m \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^m \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^6 \sum_{j=1}^6 s({}^u Q_r, {}^p Q_j) {}^u M_{ri}^n {}^p M_{ji}^{*n}, \quad (1.1)$$

式中, 字母 u, k, p 表示工作部件内的力作用点; r, j, i 则为力和振源的矢量方向。

方程(1.1)包含两个总和。当振源统计不相关时, 第一个总和可估算在检测点内每个振源引起的那一部分振动。那时, $S({}^u Q_r, {}^u Q_j)$ 和方程的第二个总和均等于零。当振源统计不相关时, $\dot{q}^n$ 是每个单独源诱导振动能量叠加的结果。当振源统计相关时, 方程的第二个总和能够估算机械或装置对振动的影响。

引起总振动每一部份振源均可根据振源中的动力互谱和机械结构的复

合机械导纳(或阻抗)实验测量的数据结果来确定。这些数据的测量方法详见第4和第5章。

1.3.1 不相关振源的统计。在强迫振动的检测点内, 每一不相关振源统计可以按下式确定:

$$C_j^k(\omega) = \frac{s({}^k Q_j, {}^k Q_j) |{}^k M_{ji}^n(\omega)|^2}{s(\dot{q}_i^n, \dot{q}_i^n)} \quad (1.2)$$

在机械工作时应该测量第 K 源上力的互谱和检测点上速度的互谱, 而在不工作的机械上则应测量由 K 工作部件到检测点的传递导纳。在实践中, 有时机械(或装置)内振源彼此距离很大时, 则可以采用个别工作部件区内的结构振动来确定这个部件的振动力, 即:

$$\dot{q}_j^k(\omega) = {}^k Q_j(\omega) {}^k M_{jj}^k(\omega); \quad s({}^k Q_j, {}^k Q_j) = \frac{s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_j^k)}{|{}^k M_{jj}^k(\omega)|^2}$$

当机械像一个统一的整体不振动时, 在频域内这个假定基本上是正确的。在带有减振装置的机械内, 这个假定可以接受的频率范围是在减振器上机械的固有频率值 f_0 以上。如果机械的减振正确实现满足条件 $f_0 < f_{H.B}$ ($f_{H.B}$ ——在机械内低频扰动力的频率), 那么上述假定可适用于所有研究的频率范围。方程(1.2)则改变为:

$$C_j^k(\omega) = \frac{s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_j^k) |{}^k M_{ji}^n(\omega)|^2}{s(\dot{q}_i^n, \dot{q}_i^n) |{}^k M_{jj}^k(\omega)|^2}$$

传递导纳和点导纳的比值在统计不相关振源时是机械结构的脉冲暂态函数, 可以通过振动的互谱来表达:

$$\frac{|{}^k M_{ji}^n(\omega)|^2}{|{}^k M_{jj}^k(\omega)|^2} = \frac{|s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_i^n)|^2}{|s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_j^k)|^2}$$

考虑到方程(1.2), 特征式如下:

$$C_j^k(\omega) = \frac{|s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_i^n)|^2}{s(\dot{q}_i^n, \dot{q}_i^n) s(\dot{q}_j^k, \dot{q}_j^k)} \quad (1.3)$$