

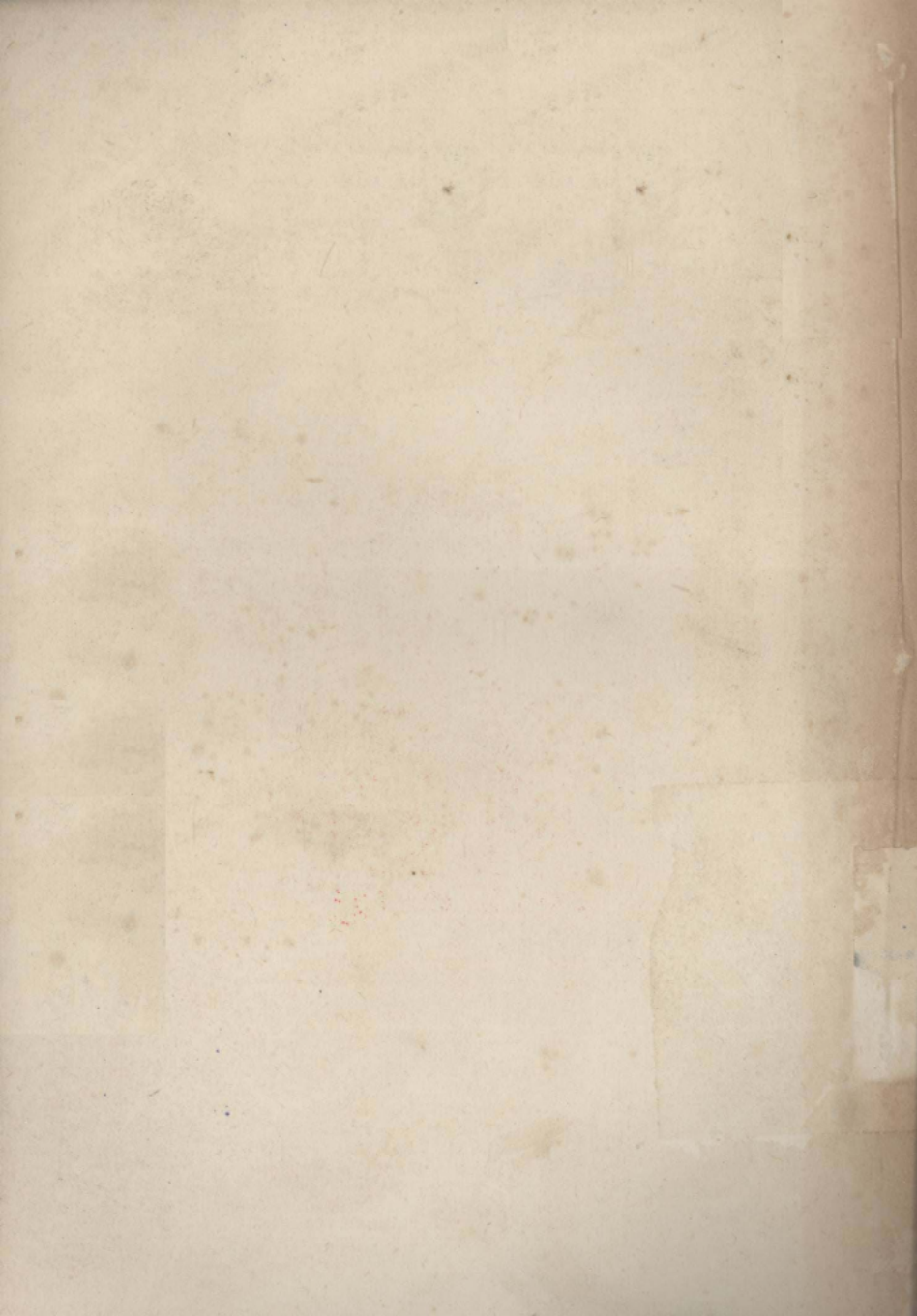
数学应用课题选编

第二集

(参考教材)

上海师范大学数学系编

一九七五年十二月



毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，
必须同生产劳动相结合。

一切比较完全的知识都是由两个阶段构成的：第一阶段是感性知识，第二阶段是理性知识，理性知识是感性知识的高级发展阶段。……最重要的，是善于将这些知识应用到生活和实际中去。

目 录

1. 关于多边形切削的讨论·····	1
2. 棘轮前角的计算·····	19
3. 曲率在三爪卡盘上的应用·····	23
4. 高压泵凸轮设计的一个问题·····	28
5. 关于弧面蜗轮滚刀的铲削凸轮问题·····	36
6. 悬挂式连续硫化机硫化管曲线的计算·····	42
7. 钻模两孔间最短距离的计算·····	50
8. 高速锤能量计算·····	65
9. 1104-2 铁帽表面积的计算 ·····	70
10. 柴油机活塞和汽缸之间容积的计算·····	80
11. 常微分方程在内燃机轴系扭振计算中的应用·····	96
12. 管壁温度计算中热量均流系数的确定 ·····	114
13. 减压器的静态与动态特性分析 ·····	128
14. 一类矩阵的特征值问题 ·····	145
15. 电力系统潮流计算中结点阻抗矩阵的分块计 算公式 ·····	162
16. 线性代数在煤气柜设计中的应用 ·····	168
17. 管道网络中压力平衡计算 ·····	185
18. 用分辨法预测合金的组织 ·····	205
19. 数理统计在 FeNiCoCu 合金化学成分选定上 的应用 ·····	213
后记 ·····	242

关于多边形切削的讨论

随着工农业的不断发展, 要求加工多边形零件的数量越来越多, 一般多边形零件的加工需要用刨床, 铣床等专用机床来完成. 然而工作效率跟不上生产上的需要. 上海炼油厂的工人老师傅遵照毛主席关于“自力更生”的教导, 发扬了敢想敢干的革命精神, 经过反复实践, 革新成功一种结构简单的多边形切削专用机床. 这种机床只要在普通的车床上添置一些简单的附件, 而工效却比铣床加工提高五至十倍, 为扩大车床的使用范围开辟了一条新的途径.

一、机床工作原理

1. 普通车床上工件与车刀相对运动的情况:

在普通车床上车刀被固定于刀架上, 工件则以一定的转速 n 按逆时针方向旋转. 如图 1, 如果刀尖保持在与工件中心相距 R 的位置上, 那么, 当工件旋转一周后, 我们可得到一个半径为 R 的圆. 在车床上工件旋转一周的过程中, 刀尖依次与工件上

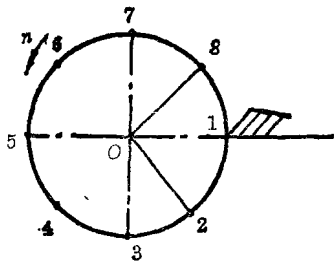


图 1

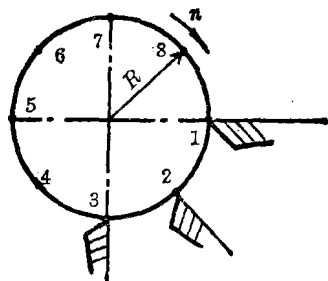


图 2

的 1, 2, 3, …… , 7, 8, 点相接触。如果我们让工件固定不动, 而将车刀以顺时针方向用同样大小的转速 n 绕工件旋转, 刀尖与工件中心距离不变, 如图 2 所示, 刀尖同样与工件的 1, 2, 3, …… , 7, 8, 等各点顺次相接触, 最后也是车出一个半径为 R 的圆。

以上两种情况都可说明普通车床的车刀与工件之间的相对运动轨迹是半径为 R 的圆。

2. 多边形切削专用机床的工作与车刀相对运动的情况:

多边形切削专用机床的工作情况如图 3 所示。刀盘夹紧在车头上, 和刀盘并列地装着工件, 工件的轴平行于刀盘的轴。利用三只齿轮的传动, 使刀盘与工件转动方向相同且转速比为 2:1。

毛主席教导我们: “对于物质的每一种运动形式, 必须注意它和其它各种运动形式的共同点, 但是尤其重要的, 成为我们认

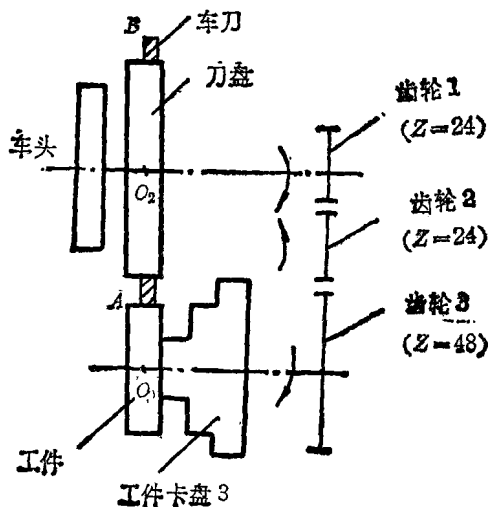


图 3

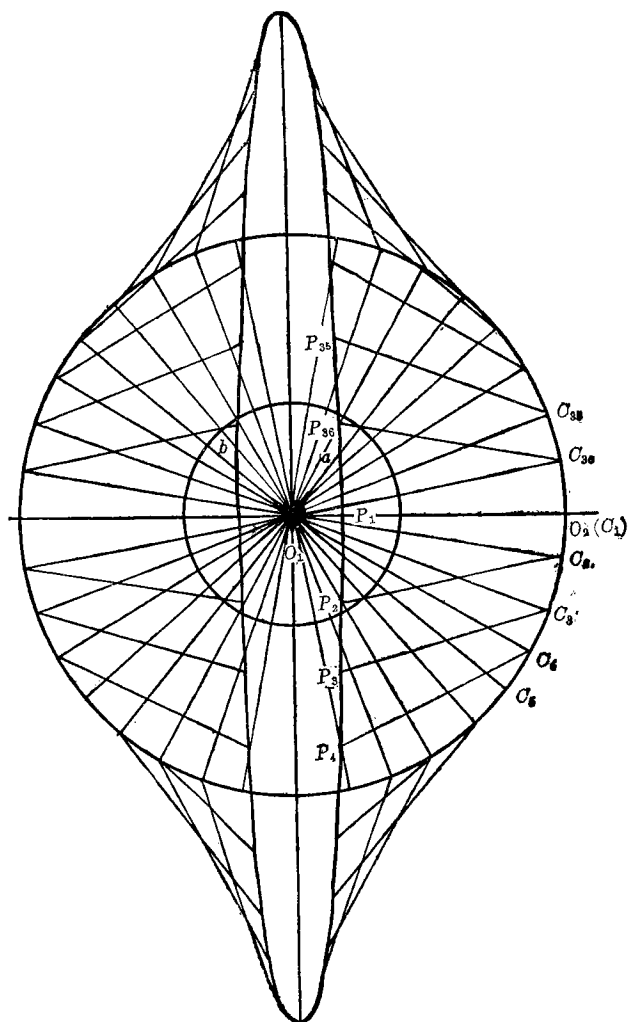


图 4

识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点，……”多边形切削机床与普通车床相比较，其共同点是工件都以一定转速按逆时针方向旋转。但是普通车床的车刀是固定不动的，而多边形切削机床的车刀则是以二倍或三倍于工件的转速与工件作同方向的旋转，这就是特殊性。

如果我们让车刀以二倍于工件的转速旋转，如图4中， O_1 表示工件旋转中心， O_2 为装夹车刀的刀盘中心。刀尖与刀盘中心距离为 R ，刀尖与工件中心距离为 l ，则中心距 $O_1O_2=l+R$ 。

现在我们把工件和刀盘之间的相对运动看做工件固定不动，则相当于整个刀盘以工件的转速绕工件中心按顺时针方向转动起来。这时刀盘中心 O_2 的相对运动轨迹应依次经过 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_{35}, C_{36}$ 等位置。由于车刀还以 O_2 为中心以二倍于工件的转速逆时针方向旋转。因此，当刀盘中心 O_2 初始位置在点 C_1 时，刀尖位于 P_1 点，那么当 O_2 按顺时针方向转过 10° 到达点 C_2 时，车刀按逆时针方向转动 20° ，则刀尖位置移到 P_2 上，依次类推，可以得出刀尖的位置在 $P_3, P_4, \dots, P_{36}$ 等点上，连接 $P_1, P_2, \dots, P_{35}, P_{36}, P_1$ 等点就得到车刀切削工件的轨迹。图4所示的是一个狭长的椭圆。

分析了专用机床的工件与车刀相对运动的情况，我们可以看到，刀盘上的任一点（除刀盘中心）既围绕工件中心公转，又围绕刀盘中心自转，所以车刀的刀尖是在作行星运动。从图4可以看出当刀盘半径比起，工件半径很大时，工件上所切出的椭圆的两段相对弧就很平直，是接近直线的。

当刀盘按照相反方向装夹上两把车刀时，工件就被切削成近似的正方形（图5）。我们只要调节刀盘与工件的速比，刀具间的夹角以及刀具的长短，就能切削出所需要的各种多边形零件。

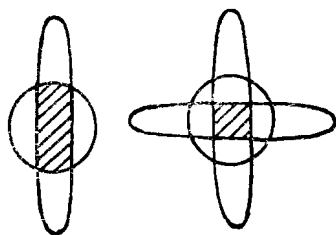


图 5

当工件转速: 刀盘转速 = $m:n$ 时 ($m:n$ 为既约分数)

$$Z(\text{装刀数}) = \frac{N(\text{多边形边数})}{n}$$

$$\phi(\text{刀具间夹角}) = \frac{n}{m} \times [180^\circ - \alpha(\text{多边形-内角})]$$

x (刀具间长度差)

$$= \frac{h_1(\text{多边形一组对边距离}) - h_2(\text{相邻的另一组对边距离})}{2}$$

如果让车刀以三倍于工件的转速旋转, 得出的车刀切削工件的轨迹就如图 6 所示, O_1 为工件中心; C_1 是刀盘中心。

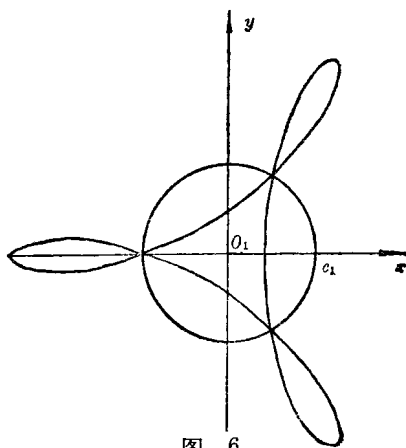


图 6

二、多边形切削中的数学原理

对于多边形切削有了前面的描述:从相对运动来看待,那末刀尖的运动轨迹——曲线,它的作图的方法就成为自然的了。但“理性认识依赖于感性认识,感性认识有待于发展到理性认识。”以上仅从“形”的一面感性认识了多边形切削,然而更深刻的认识多边形切削的原理,还需要从数学理论方面进一步来揭示。

既然从相对运动的观点,通过作图形象地显示了多边形切削的本质,那么多边形切削的数学方程的导出可以从作图着手。下面据多边形切削的实际情况来推导。

1. 多边形切削的数学方程:(如图7,于工件中心建立直角坐标系 xOy)。

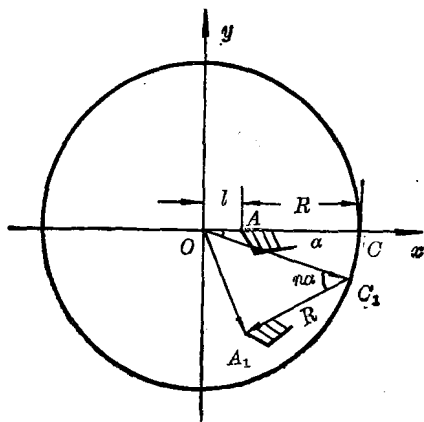


图 7

设工件中心为 O , 刀盘中心为 C , 刀尖 A 至工件中心距离为 l ($l > 0$), 刀盘半径为 R ($R > 0$, 即刀尖 A 至刀盘中心距。在实际加工中 R 要比 l 大得多), α 为刀盘中心从 C 转动到 C_1 时 $\widehat{CC_1}$ 所对的中心角, 刀尖 $A(x, y)$, 工件与刀盘转速比为 $1:n$ 。

则刀尖 A 在工件上的轨迹方程如下:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{OC_1} = (R+l) \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{i} - (R+l) \sin \alpha \cdot \mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{C_1A_1} = -R \cdot \cos(n-1)\alpha \cdot \mathbf{i} - R \sin(n-1)\alpha \cdot \mathbf{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$= [(R+l) \cos \alpha \mathbf{i} - (R+l) \sin \alpha \mathbf{j}]$$

$$+ [-R \cos(n-1)\alpha \mathbf{i} - R \sin(n-1)\alpha \mathbf{j}]$$

$$= [(R+l) \cos \alpha - R \cos(n-1)\alpha] \mathbf{i}$$

$$+ [-(R+l) \sin \alpha - R \sin(n-1)\alpha] \mathbf{j}$$

$$\therefore \text{有} \begin{cases} x = (R+l) \cos \alpha - R \cos(n-1)\alpha \\ y = -(R+l) \sin \alpha - R \sin(n-1)\alpha \end{cases} \quad (\text{A})$$

(A)式即多边形切削的数学方程.

(A)式表示的曲线到底是什么曲线呢? 从(A)式所对应的曲线形状, 启示我们: (A)象内摆线的方程.

2. 摆线:

(1) 内摆线: 一动圆($r_{\text{动}}$)内切于一定圆($r_{\text{定}}$)并且沿定圆作无滑动滚动(所谓纯滚动), 动圆上的一定点(在圆外、圆上、圆内)所产生的轨迹($r_{\text{动}} < r_{\text{定}}$).

应指出的摆线除定义上所具有的本质特征外, 还可有下列特点: ① $r_{\text{动}}$, $r_{\text{定}}$ 之比的不同, ② 产生轨迹点的位置不同, (圆外、圆上、圆内), ③ 动圆($r_{\text{动}}$)滚动方向的不同, 而使曲线的形状以及与之对应的方程形式均可不同.

根据如上定义与特点, 我们令内摆线满足如下条件:

$$\textcircled{1} \quad l + R + r_{\text{动}} = n \cdot r_{\text{定}}$$

$$\text{则 } r_{\text{动}} = \frac{R+l}{n-1}, \quad r_{\text{定}} = n \cdot r_{\text{动}} = n \cdot \frac{R+l}{n-1}$$

l , R , n 与前面讲多边形切削中所规定的意义一样. 这样规

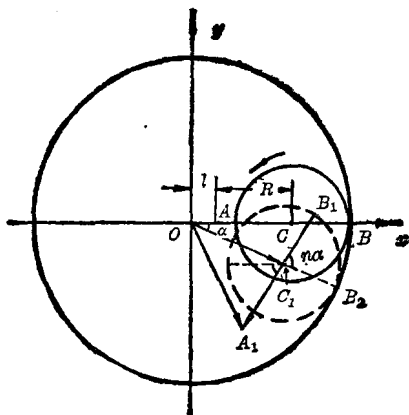


图 8

定后易知: $r_{\text{动}}:r_{\text{定}}=1:n$ = 工件转速:刀盘转速.

② 规定逆时针方向滚动, 动圆与定圆连心线同 x 正向夹角为 α . 如图 8.

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\text{又 } \therefore \widehat{B_1B_2} = \widehat{BB_2}$$

且

$$r_{\text{动}}:r_{\text{定}}=1:n$$

$$\therefore \angle B_1C_1B_2 = \angle OC_1A_1 = n\alpha$$

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$= [(R+l) \cdot \cos \alpha \mathbf{i} - (R+l) \sin \alpha \mathbf{j}]$$

$$+ [-R \cos(n-1)\alpha \mathbf{i} - R \sin(n-1)\alpha \mathbf{j}]$$

$$\therefore \begin{cases} x = (R+l) \cos \alpha - R \cos(n-1)\alpha \\ y = -(R+l) \sin \alpha - R \sin(n-1)\alpha \end{cases} \quad (\text{B})$$

从(B)亦可知(A)——多边形切削的数学方程为内摆线方程无疑. 实际上仔细分析多边形切削的作图也不难知道是内摆线.

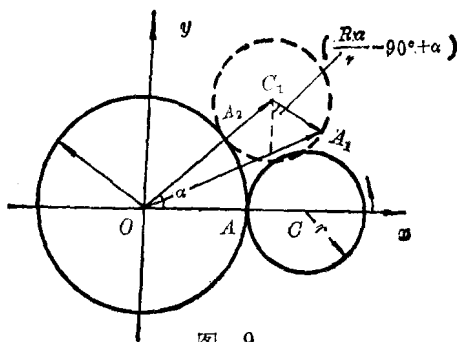


图 9

(2) 外摆线: 一动圆外切于一定圆并且沿定圆作无滑动滚动, 动圆上一定点产生的轨迹.

下面来导出外摆线的方程:

设定圆半径为 R , 动圆半径为 r , 产生轨迹的点到动圆圆心的距离为 k , $A(x, y)$ 如图 9.

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\text{又 } \therefore \widehat{A_2A} = \widehat{A_2A_1}$$

$$\therefore \angle OC_1A_1 = \frac{R \cdot \alpha}{r}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$= [(R+r)\cos\alpha\mathbf{i} + (R+r)\sin\alpha\mathbf{j}]$$

$$+ \left[k \sin\left(\frac{R \cdot \alpha}{r} - 90^\circ + \alpha\right) \mathbf{i} \right.$$

$$\left. - k \cos\left(\frac{R \cdot \alpha}{r} - 90^\circ + \alpha\right) \mathbf{j} \right]$$

$$\therefore \begin{cases} x = (R+r)\cos\alpha - k \cos\left(\frac{R+r}{r}\right) \cdot \alpha \\ y = (R+r)\sin\alpha - k \sin\left(\frac{R+r}{r}\right) \alpha \end{cases}$$

当 $k > r$, $k < r$ 时轨迹分别称为长、短幅外摆线.

(3) 迂回外摆线方程:

当产生外摆线的定圆总在动圆内部时称此外摆线为迂回外摆线, 如图 10.

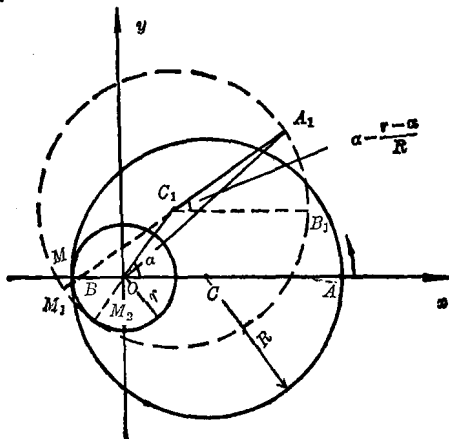


图 10

设动圆半径为 R , 定圆半径为 r , 且 $R > r$.

k 为产生轨迹点 $A(x, y)$ 到动圆圆心的距离.

$$\because \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\because \widehat{M_1M_2} = \widehat{MM_2} \quad \text{且} \quad r_{\text{动}} : r_{\text{定}} = R : r$$

$$\therefore \angle M_1C_1M_2 = \frac{r \cdot \alpha}{R}$$

$$\text{又} \because \angle C_1BO = \angle A_1C_1B_1 \quad \text{且} \quad \angle A_1C_1B_1 = \alpha - \frac{r \cdot \alpha}{R}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}$$

$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$= [(R-r)\cos\alpha\mathbf{i} + (R-r)\sin\alpha\mathbf{j}]$$

$$+ \left[k \cos\left(\alpha - \frac{r \cdot \alpha}{R}\right)\mathbf{i} + k \sin\left(\alpha - \frac{r \cdot \alpha}{R}\right)\mathbf{j} \right]$$

∴ 得迂回外摆线方程为:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha + k\cos\left(\frac{R-r}{R}\alpha\right) \\ y = (R-r)\sin\alpha + k\sin\left(\frac{R-r}{R}\alpha\right) \end{cases}$$

当 $k > R$, $k < R$ 时, 分别称为长、短幅迂回外摆线.

(4) 旋轮线和圆的渐开线是定圆和动圆半径分别趋于无穷大时而产生的介于外、内摆线之间的二种曲线.

旋轮线方程:

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= a\varphi\mathbf{i} + a\mathbf{j} - a\sin\varphi\mathbf{i} - a\cos\varphi\mathbf{j} \\ \therefore \begin{cases} x = a\varphi - a\sin\varphi \\ y = a - a\cos\varphi \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} a \text{ 为发生圆半径} \\ \varphi \text{ 的意义如图 11} \end{array} \right) \end{aligned}$$

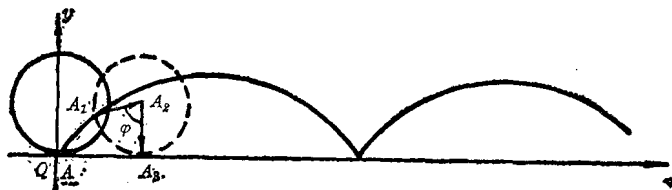


图 11

圆的渐开线方程:

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_1} \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= a\cos\varphi\mathbf{i} + a\sin\varphi\mathbf{j} + a\varphi\sin\varphi\mathbf{i} - a\varphi\cos\varphi\mathbf{j} \\ \begin{cases} x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi \\ y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} a \text{ 为发生圆半径} \\ \varphi \text{ 的意义如图 12} \end{array} \right) \end{aligned}$$

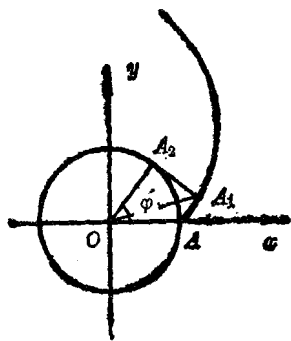


图 12

摆线在生产中具有广泛的应用，如螺杆压缩机，螺杆泵，汽车上三角转子发动机，齿轮等等。

旧教材把摆线看作是一种数学游戏，没有现实意义和脱离生产实际的，对于这种情况应加以彻底批判。数学来源于生产实际，摆线的讨论也只有联系了生产实际才具有广阔的前途。

3. 多边形切削中的误差讨论

(1) 误差

上海炼油厂在利用陈旧设备加以革新而用来生产多边形零件中，用了两种速比，即 1:2 和 1:3 (n 分别为 2 和 3)。

容易证明当 $n=2$ 时，多边形切削的数学方程(A)成为：

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha \\ y = -(2R + l) \sin \alpha \end{cases}$$

消去参数 α 有：
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{(2R + l)^2} = 1.$$

此时刀尖切削所走的是一条椭圆曲线。因 R 比 l 要大得多，故椭圆曲线极为狭长。

前面提到要切出一个正四边形时，需在刀盘上按相反方向装上两把同样长短的刀。刀盘与工件的转速比为 2:1 这样加工出来的工件只是近似四边形，它的边都是曲线，且是向外凸的，和直边相比它凸多少？就是误差多少。下面分几种情形来讨论：

(a) 工件和刀盘的转速比为 1:2，两把刀时，如图 13，易知求得点 $A(x_H, y_H)$ 的横坐标

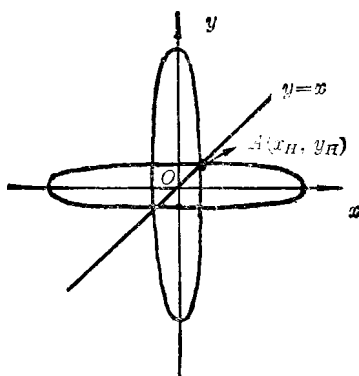


图 13

$$\begin{cases} \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{(2R+l)^2} = 1 \\ y = x. \end{cases}$$

解得:

$$x_H = \frac{l(2R+l)}{\sqrt{(2R+l)^2 + l^2}}$$

$$\therefore \Delta_H = l - x_H = l \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2R+l} \right)^2}} \right]$$

(b) 转速比为 1:2, n 把刀时, 可切得 $2n$ 边形, 如图 14.

$\widehat{AB}$ 为 $2n$ 边形之一边

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n \times 2} = \frac{\pi}{2n}$$

令

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = k.$$

则有

$$\begin{cases} \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{(2R+l)^2} = 1 \\ y = kx \end{cases}$$