涡旋运动理论

孔祥言编

中国科学技术大学近代力学系

一九八四年九月

目　　录

主 要 符 号 表

A	面积
a	小尺寸半径·任意矢量·加速度
B	速度矢量势
b	任意常数
C	摄氏温度·常数
c	常数
C_D	阻力系数
D	阻力
d	直径
E	动能、第二类全椭圆积分
e	坐标轴方向单位矢量
F	力
f	单位质量受的力
$\bar{f}(Z)$	表示对函数 f(Z)中除 Z 以外的各复变数取共轭值
G	特定函数
g	重力加速度
H	特定函数
h	特征距离、焓
I	单位质量受的冲力、复函数的虚部、Bessel 函数
i	虚数
J	通量、Bessel 函数
j	通量元
K	动量、第一类全椭圆积分

k　椭圆积分的模数、Bessel 函数的阶数

L　曲线、线段长度

l　曲线

M　马赫数

m　偶极子强度·质量·整数

N　整数

n　法向单位矢量·频率·整数

P　压力函数

p　压力

Q　流量·无量纲参数

q　强度·源汇强度·无量纲参数

R　特征半径·复数的实部·特定气体常数

r　柱坐标变量·场点至坐标原点的距离

r_*　源点与场点间距离

r_0, r_c　圆形涡环的半径

R_e　Reynolds数

S　熵·曲面面积

s　单位质量的熵·机翼展长

St　Strouhal 数

T　绝对温度

t　时间

U　力势·x 方向的特征速度

u　x方向速度·积分变量

V　体积·特征速度·比容

V_∞　流体与物体的相对速度

V	速度
W	复势函数
w	加速度
x	直角坐标变量
y	直角坐标变量
z	直角坐标变量・柱坐标变量
α	攻角・指数参数・角度
β	角度・指数参数
Γ	速度环量・涡旋强度
γ	比热比・环量元
δ	边界层厚度・小量
ε	小量
ζ	直角坐标变量
η	直角坐标变量
Θ	速度散量・复函数辐角
θ	柱坐标变量・任意角度
Λ	组合常数
λ	波长・角度・椭圆积分的模
μ	动力粘性系数
ν	运动粘性系数
ξ	直角坐标变量
Π	连乘号・压力函数
π	$=3.1416$

ρ	密度
Σ	求和号・曲面
σ	截面・指数参数
τ	周期・体积・特征时间
Φ	总的速度势
ϕ	势函数・角度
φ	势函数・角度
χ	复速度
Ψ	总的流函数
ψ	流函数
Ω	涡量
ω	角速度

绪　　论

对涡旋运动的研究，已有一百多年的历史。A．L．Cauchy在1915年和G．G．Stokes在1947年就已经提出了涡旋的概念以及把涡量解释为流体微团的转动角速度。流体的涡旋运动理论，出现于十九世纪后半期。该理论的创使人公认为是德国科学家H．von Helmloltz。他在1858年对涡旋的一些基本特性就有了系统的研究。当时他的研究成果发表在《涡旋运动流体动力学方程的积分》一文中。其后Lord Kelvin（即Sir W．Thomson）在1869年在《关于涡旋运动》的重要论文中对这个问题作了进一步的发展，对理想流体中涡旋的性质给出一些简明而严格的数学证明，进一步奠定了涡旋运动的理论基础。

Helmholtz的速度分解定理（Helmholtz第一定理）指出：流体微团的运动一般可以分解为三部分，即平移、转动和变形。对于转动部分，我们用矢量

$$\vec{\Omega}=2\omega=\nabla\times\vec{v}=\Omega_x\vec{i}+\vec{\Omega}_y\vec{j}+\vec{\Omega}_z\vec{k}$$

表示，$\vec{\Omega}$称为涡量（或旋度），ω是流体微团的转动角速度。这一定理对流体力学的发展有着深远的影响。第一，把流体运动的转动部分从一般运动中分离出来就使我们有可能把运动分成无旋运动和有旋运动，因而可以对它们分别加以研究。本课程专门用来研究有旋运动或涡转运动。第二，把流体运动的变形部分从一般运动中分离出来，就使我们有可能将流体变形速率与流体的应力联系起来，从而为人们对于粘性规律和作用的研究指明了方向。

自然界中出现的运动绝大部分都是有旋的。小至湍流流动中细小

的涡旋结构。大至宇宙中……气象上见到的台风和龙卷风到飞行器后面留下的尾涡，都是涡旋存在的例证。因此，研究涡旋运动具有重大的意义。

涡旋运动的研究对于造船、航空和航天事业的发展起了很大的作用。船用推进器的研制，船舶型的计算都离不开涡旋运动理论。该理论又是机翼理论、飞机螺旋桨和旋翼设计的理论基础。例如机翼理论中的升力线理论和升力面理论都是涡旋理论的具体应用。飞行器在大攻角下飞行，弹性上有分离涡出现，也需要应用涡旋理论去研究。

涡旋理论在气象学、大气动力学中占有重要的地位。海陆交界地区的季风，热带国家的贸易风均是大尺度涡旋的表现。地球上的气旋和反气旋，以及强烈的台风、飓风和龙卷风都是一定条件下形成的蕴藏着巨大能量的涡旋。

江河港湾的水利工程和海洋的开发也涉及许多涡旋运动问题。涡旋的产生会降低水轮机的功率这是不利的方面，应尽力避免。有时为了保护大型水坝坝基不受急流冲击，通常采用消能措施，人为地制造涡旋运动以消耗水流的动能。

涡旋运动、旋转流体动力学，对于研究星系和太阳系的形成以及对于行星大气动力学的研究都具有重要意义，因此对宇宙气体动力学的发展也有促进作用。

总之，涡旋运动理论是流体力学的一个重要分支。由于涡旋在自然界中存在的普遍性以及它在理论上和实用上的重要性，虽然已发展了一百多年，但今天仍然是正在被研究的重要课题。除湍流研究外，在航空领域、气象部门、环境工程、水利建设、天体物理学科以及某些工程应用方面，都有一些有关涡旋的问题有待进一步研

究解决。这包括涡旋的产生；它的运动和发展；大气涡旋与水面陆地以及工程建筑之间的相互作用。涡与涡之间的相互干扰；涡旋的稳定性；以及涡旋的扩散、涡能的耗散和涡旋的破碎机理等等。

第一章　涡旋运动的基本概念及其基本性质

§1·1 涡旋运动的基本概念

对于流动的流体，如果某个区域中流体质点的运动速度 $\vec{v}$ 的旋量不为零，即

$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{v}\neq 0\ ,$$

则称该区域中流体的运动是有旋运动，或涡旋运动；反之，是无旋运动。这里 $\vec{\Omega}$ 就定义为涡量，它是涡旋运动中最重要的物理量之一。因为速度 $\vec{v}$ 是空间位置 $\vec{r}$ 和时间 t 的函数，是个矢量场，所以 $\vec{\Omega}(\vec{r},\ t)$ 也是个矢量场，我们称它为涡量场。涡量场有一个重要性质，即涡量的散量为零

$$\nabla\cdot\vec{\Omega}\equiv\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})\equiv 0 \qquad (1\cdot1)$$

上式也称作涡量连续方程。

现将涡量 $\vec{\Omega}$ 的三个分量在直角坐标系和柱坐标系中的表达式给出如下：

在直角坐标系中

$$\begin{cases}\Omega_x=\dfrac{\partial v_z}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\\[2ex] \Omega_y=\dfrac{\partial v_x}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\\[2ex] \Omega_z=\dfrac{\partial v_y}{\partial x}-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\end{cases} \qquad (1\cdot2)$$

在柱坐标系中

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Omega_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\
\Omega_\theta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
\Omega_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}
\end{aligned}
\right.
\tag{1·3}
$$

为了说明涡量的物理意义。我们考虑流场中任意一点M领域流体的运动。为简单起见。只考虑二维情形（对于三维情形。原理是一样的）。我们有

$$
\Omega_z(M) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{1·4}
$$

现在不讨论点M领域流体的平移运动。因为这与我们要研究的问题无关。过点M取两条互相垂直的物质线元 $MB=\triangle x$ $MC=\triangle y$。经过时间$\triangle t$之后。这两条物质线改变了方向。处于MB′，MC′位置（略去二阶小量它们仍是直线）。一般说来。这两条线元转过的角度不完全相等。分别为θ_1和θ_2。我们讨论其平均角速度。或两线元组成的正方形对角线MA的转运角速度。由图1·1

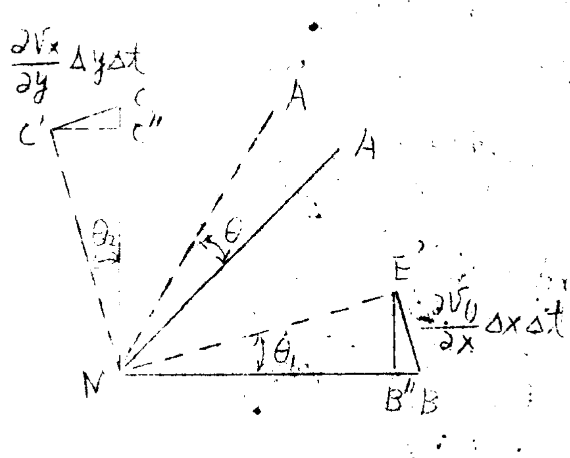


图1·1 点M领域流体的转动

可以看出，第一条线元转过角度为 $d\theta_1$ ，第二条线之转过角度为 $d\theta_2$ 。它们分别为

$$d\theta_1 \approx \frac{BB''}{MB} \approx \frac{-\frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x \Delta t}{\Delta x} = -\frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta t$$

$$d\theta_2 \approx \frac{CC''}{MC} \approx \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y \Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta t$$

所以对角线MA的转动角度度为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}(d\theta_1 + d\theta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \omega \qquad (1\cdot5)$$

将式（1·4）与（1·5）进行比较可知：流体微团的涡量是其转动角速度的两倍。即

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} \qquad (1.6)$$

因为旋度的定义为

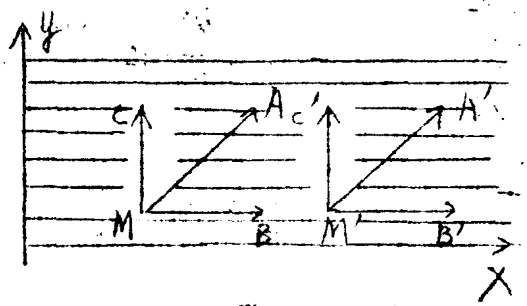
$$\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\oint_{\ell}\vec{v}\cdot d\vec{\ell} \qquad (1\cdot7)$$

其中S是包围点M的周线 ℓ 所张的曲面的面积。它与坐标系的选择无关。所以上述结果对于任意一对相互垂直的物质线元都是正确的

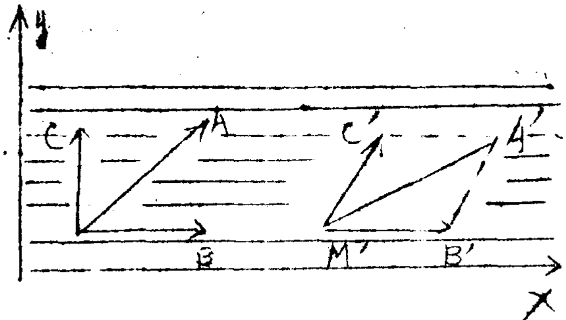
下面举一个具体例子，以便进一步简明涡旋运动和涡量的物理意义。

例1·1 试分析(1)均匀流，(2)平板间的Couette流是有旋流还是无旋流。如果是有旋流，试求出涡量。

解。(1)对于平行均匀流。v_x=常数。$v_y=v_z=0$经过时间Δt后。对角线M′A′与MA方向一致。显然是无旋运动。



(a) v_x=常数



(b) $v_x=Uy/h$

图1·2 平行均匀流与平行剪切流比较

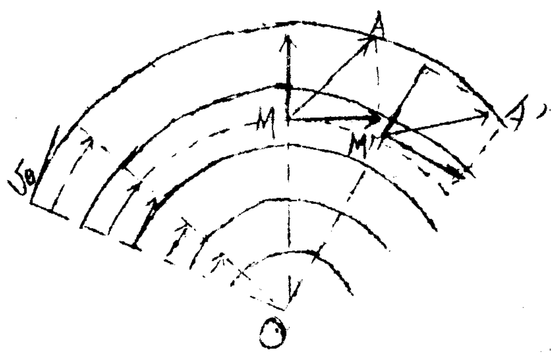
(2)对于单板间的Couette流动。$v_x=Uy/h$，$v_y=v_z=0$。其中U是上板移动速度。h是两板间距离。由于v_x是线性分布的。时间Δt以后。线元MB平移至M′B′。方向不变。而线元MC随着流动旋转。变成M′C′，如图1·2所示。所以它们的对角线MA转到M′A′方向。这说明流体微团在旋转。而根据公式(1·2)，涡量

$$\Omega_z=-\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{U}{h}=\text{常数}$$

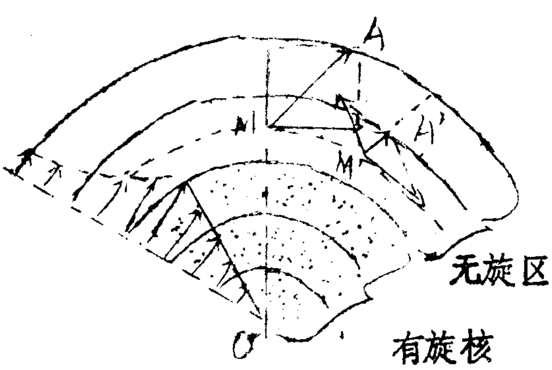
所以涡量是均匀分布的

例 1·2 设有两种流动：(1)流体象刚体那样以角速度 ω 绕 z 轴旋转；(2)流场中所有的流体质点均绕 z 轴旋转。但其周向速度 v_θ 与流体质点至 z 轴的距离 r 成反比；试讨论它们是有旋流还是无旋流。如果是有旋流，试求出涡量。

解：(1)因为象刚体那样旋转，所以经过的时间 Δt 以后。两个线元与原来一样。仍分别为周向和径向。于是线方向 MA′与 MA 不平行。如图 1·3 (a)所示。所以是有旋流动。



(a) 流体刚性旋转



(b) $v_\theta \backsimeq b/r$ 的流动

图 1·3 绕 z 轴旋转的两种流动比较

根据题设，有

$$v_\theta = r\omega \quad , \quad v_r = 0 \qquad v_z = 0$$

由公式（1·5）可得$\Omega_r = \Omega_\theta = 0$，以及

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = 2\omega$$

(2) 我们暂不管靠近转轴的核心区，而只研究$v_\theta = b/r$的区域（见图1·3(b)）。经过时间Δt以后，第一个线元与原先一样仍为周向，由于周向速度与r成反比，所以第二个线元由原来的径向变得向左倾斜，但结果对角线方向M′A′与MA平行，所以是无旋流动。

实际上，根据公式（1·3）可以算出

$$\Omega_r = \Omega_\theta = 0 \qquad \Omega_z = \frac{1}{r}\;\frac{\partial\left(r\cdot\frac{b}{r}\right)}{\partial r} = 0$$

所以第1种情形是有旋流动，第二种情形是无旋流动。

由以上两个例子可以看出：流动究竟是有旋还是无旋，不是根据流体微团的运动轨迹的形状来决定，而是根据流体微团本身是否旋转来决定。例1·1中两种情况都是平行流动，流体微团的运动轨迹都是直线，但第一种情形的平行均匀流动是无旋流动，而第二种情形的平行剪切流动是有旋流动。这说明流线或迹线是直线的流动可以是有旋的，也可以是无旋的。例1·2中也讨论和对比了两种情形，在这两种情形下，流体微团的运动轨迹都是圆，但对于第一种情形，周向速度v_θ与距离r成正比，运动是有旋的；对于第二种情形，周向速度v_θ与距离r成反比，运动是无旋的。实际上，根据下一节中讨论的环量，我们知道，周长和速度的乘积$2\pi r v_\theta$称为速度环量，现在v_θ与r成反比，所以$r v_\theta$等于常数，这表明，