大學叢書

高等算學分析

熊慶來著

商務印書館發行

B三二五〇

中華民國二十三年八月初版

（一二五一一）

大學叢書（教本）高等算學分析一冊

平裝每冊定價大洋貳元貳角

外埠酌加運費匯費

著作者 熊慶來

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者胡達聰）

大學叢書委員會

委　員

序

牛端 (Issac Newton) 與伯(來)尼慈 (G. W. Leibniz) 二氏於十七世紀發明微積分而後,傑出之算學天才如尤拉氏(L. Euler)達朗伯氏 (J. D'Alembert,) 拉格朗日氏 (J. Lagrange) 拉卜來斯氏 (P. S. Laplace) 勒讓德氏 (A. M. Legendre) 伏利野氏 (J Fourier) 等接踵而起,發揮光大,分析學遂蔚然成為算學重要之一分支.十九世紀以降,各國學者輩出,斯學進步,更見一日千里,貢獻宏富者,挪威有亞貝爾氏 (N. H. Abel); 法有歌西氏 (A. Cauchy), 額爾米特氏 (C. Hermite), 普蔭加烈氏 (H. Poincaré), 若爾當氏 (C. Jordan), 亞培爾氏 (Paul Appell) 等; 德有杲士氏 (Gauss), 扎葛比氏 (C. G. J. Jacobi), 狄里克來氏 (P. G. L. Dirichlet), 黎曼氏 (B. Riemann), 維世特阿斯氏(Karl Weierstrass) 等;英有莫爾剛氏 (A. De Morgan), 開烈氏 (A. Cayley) 等;當代之分析學家倘未論及也.

吾國學術落後,於算學分析非特無重要貢獻,卽稍涉高深之著述或翻譯亦不多覯,教學所資,端賴歐美原著,顧吾國學制與歐美迥異,欲求一適當之教本,殊非易事,近年國內大學競用辜爾薩氏所著之 Cours d' Analyse Mathématique 原本或赫德理克氏 (Hedrick) 英譯本,或吾友王君尙濟之中譯本.

辜氏爲巴黎大學名師,在分析學上之發明甚夥,其書取材豐富新穎,言理精確透澈,洵可奉爲圭臬.惜乎標準稍高,習者大都無相當根底,學理旣難於領會,設題更鮮能演解,是以用力卽勤,獲益亦少,論者每以爲病.不佞嘗受辜氏教益,且先後承乏國立東南大學與國立清華大學講席,試授辜氏書者凡數載,頗知困難所在,因取辜氏書爲藍本,而旁參他籍,纂爲是編,以作實變數之分析教本,斟酌取捨,務求適合吾國學子之程度與需要.於演證嚴守辜氏之精確,於條理則取法昂貝爾氏(G Humbert)與窪烈布散氏(De la Vallée-Poussin)之明晰.鵠的如此,固不敢遽言企及,然據歷年經驗,似於學子尙不無小補,用敢稍加整理,付諸手民.惟自顧譾陋,疵謬在所不免,尙冀海內碩學有以匡正之.

斯編付印先後承清華大學教員周君鴻經唐君培經及助教陳君省身校對印稿,甚爲感激,又承助理華君羅庚不憚煩瑣代編索引並繪圖員邵君繼輿代爲繪圖,均於此深致謝意.

民國二十一年六月二十日

熊慶來序於北平國立清華大學西院

例　言

1. 本書除以辜氏 Cours d'Analyse mathématique 爲根據外,其他尙參考下列各書:

   De la Vallée-Poussin. Cours d'Analyse infinitésimale

   G. Humbert, Cours d'Analyse.

   R. Baire, Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.

   J. A. Serret, Cours de Calcul differentiel et integral

   W. F. Osgood, Advanced Calculus.

   G. H. Hardy, Course of Pure Mathematics

   E. T. Whittaker & G. N. Watson, Course of Modern Analysis

   C. Jordan, Cours d'Analyse, Tom. I, II.

   E. Picard, Traité d'Analyse, Tom. I.

   H. Laurant, Traité d'Analyse

2. 辜氏書所有習題本書大半採入,惟因其過難,特增較易者以爲階梯.其他有興趣之題或試題之較新者亦酌量增入,且爲使讀者於各部分學理之致用均得練習計,設題務求變化.所增習題或係余向所集錄(間有數問爲余所擬試題)或採自下列諸書:

   P. Aubert et G. Papelier. Exercices d'Algebre d'Analyse et de Trigonomietrie

F. Frenet, Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitesimal

E. Fabry, Problemes d'Analyse mathématique.

G. Julia, Exercices d'Analyse.

J. Edwards, A Treatise on tne Integral Calculus.

Nouvells Annales.

3. 本書習題多附答案,俾讀者演解後,得核其結果之誤否.

4. 本書譯名與科學名詞審查會所規定者未盡符合,一因迫於付印,未暇查對;一因名詞審查會所定名詞亦間有未盡善者,例如 Explicit function 與 Implicit function, 余譯爲顯函數與隱函數,似覺較陽函數與陰函數之名爲佳.

大學叢書

高等算學分析

目　錄

高等算學分析

預　篇

I. 實　數

算學分析爲注重連續性之數學,探本窮源,吾等宜首述無理數以明實數系之連續性.

溯數之生,最初不過正整數(亦曰自然數)而已.於除而整數之用有時窮,吾人乃創分數;於減而正數之用有時窮,吾人乃創負數.然數之推廣若止於此,則其用猶有時而窮也.例有非完全平方之數焉;若 a 爲如是之一數,則任一數 x 之平方非較小於 a 即較大.然則 a 之平方根爲何?欲其有意義必更創新數乃可,斯無理數之所由生.無理數出,實數之系統乃備.

1. 有理數(Rational numbers).

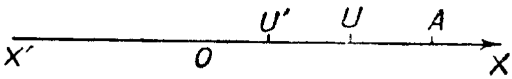
正負整數與分數及零統稱爲有理數,而成爲有理數系(system of rational numbers).其定義及馭算之法,吾等設讀者均已熟知,玆但述其重要特性如次:

1° 於相異之二有理數 a 與 b,其一數 a 當小於他數 b,而

吾等書如 $a<b$, 或 $b>a$. 若有三數 a, b, c 使 $a<b$ 及 $b<c$, 則有 $a<c$. 吾等因稱全體有理數系爲序列的 (ordered).

2° 於相異之二有理數 a 與 b 間 $(a<b)$, 吾等恆可插入他數 $>a$ 而 $<b$, 使相續之二插入數之差可小至人之所欲. 吾等因是稱有理數系爲密接的 (dense).

設一軸 $X'X$ 而於其上取一原點 O, 並定一正向如 OX, 則



第 1 圖

凡有理數 $\frac{p}{q}$ 皆可由軸上一點表之. 吾等可設 $q>0$. 試取 OU 爲單位而分之爲 q 等分; 若 OU' 爲如是之一分, 則視 ~~q~~ p 爲正或負, 而於 OX 上或 OX' 上取 OA 等於 $|p|$ 次 OU'; 所得 A 點即表有理數 $\frac{p}{q}$. 此數 $\frac{p}{q}$ 是爲 A 點之位標. 因有理數系爲密接的, 其表示點亦密佈軸上. 但軸上之點尚有不能由有理數定之者, 例如取 OP 等於邊爲 1 之正方形之對角線, 則所得點即不能以一有理數爲其位標也.

2. 有理數的分割; 無理數 (Sections of rational numbers; irrational numbers).

無理數定義論者頗不一致, 茲但就狄德頡德氏 (Dedekind) 之分割學說言之.

舉全體有理數分之爲 A 與 B 二部, 使二部皆有數, 並凡 A

部之數小於 B 部之數,是爲於有理數中作一分割(section),吾以 $(A|B)$ 表之.凡作一分割,必發生次述三種情況之一:

I. 於 A 部中有一數 a 大於同部其他各數.若然,則 A 部各數 $\leqq a$,而 B 部各數 $>a$.(因 a 屬於 A 也).反之,凡 $\leqq a$ 之有理數必屬於 A,否則將屬於 B 而 $>a$ 矣.是知 A 部由 $\leqq a$ 之有理數組成,而 B 部由其餘有理數,即 $>a$ 之數組成.吾等可注意 B 部中不能同時有一最小數.

II. A 部中無最大之數,但 B 部中有一最小之數 b.仿上論之.可知 B 部由 $\geqq b$ 之有理數組成,而 A 部則由 $<b$ 之有理數組成.

以上兩種情形顯然可以實現.

III. A 部既無最大數,而 B 部亦無最小數.請先證其可能.

命 r 爲非完全平方之一正有理數.試將負有理數與零及正有理數 x 之合於 $x^2<r$ 不等式者概置於 A 部;而將合於 $x^2>r$ 之正有理數 x 納於 B 部.此顯然成一分割.吾謂 A 部中無最大數,即言任與部中一數 x,吾等恆可得其中一數 $>x$ 也.只須證明吾等可定一正數 h,使

$$(x+h)^2<r. \tag{1}$$

書之如

$$h(2x+h)<r-x^2,$$

則見取 h 合於 $h<r$ 並合於 $h<\dfrac{r-x^2}{2x+r}$,條件(1)即滿足.

今更證 B 部亦無最小數,卽證 x 爲 B 部任何數,恆可定正數 h 使

$$(x-h)^2>r,$$

卽

$$2hx-h^2<x^2-r.$$

欲此不等式合,只須 $2hx<x^2-r$ 不等式合;是則取 $h<\frac{x^2-r}{2x}$ 即可.

結論之,III 種情形爲可能,按定義凡如此情形之一分割 $(A|B)$ 確定一無理數 α, 大於 A 部諸數,而小於 B 部諸數. A 稱爲關於 α 之下部(lower class),而 B 爲關於 α 之上部(upper class). 同一分割確定同一數,例如令平方小於 2 之數屬於 A 部,而令平方大於 2 之數屬於 B 部,則確定一無理數,吾人以 $\sqrt{2}$ 表之.

設二無理數 α 與 α', 由分割 $(A|B)$ 與 $(A'|B')$ 而定,若此兩分割不全同.則 α 與 α' 異.譬如 A' 有一數 r 不屬於 A, 則 r 將屬於 B, 而不屬於 B'. 凡 A 之數必 $<r$ 而 B' 之數則 $>r$, 可見 A 與 B' 無公有之數, A 包含於 A', 而 B' 包含於 B. 於是全體有理數可別分三等: 1°. 含於 A 因之含於 A' 者,此等數同小於 α 與 α'. 2°. 屬於 B 及 A' 者,此等數 $>\alpha$ 而 $<\alpha'$. 3°. 屬於 B' 因之亦屬於 B 者.是等數則同大於 α 與 α'.

吾等於此謂 $\alpha<\alpha'$. 反之,若 A 有一數 r 不屬於 A', 則爲 $\alpha'<\alpha$.

設無理數 α 由分割 $(A|B)$ 而定.吾等恆可於 A 中取一數 a 及 B 中取一數 b 使 $b-a$ 等於任與之一小分數 ε. 蓋命 a_1 爲 A 中之一數,則數行

$$a_1,\ a_1+\varepsilon\quad a_1+2\varepsilon,\quad a_1+3\varepsilon,\cdots\cdots$$

無限增進,必至入於 B 部.設首入之數爲 $b=a_1+n\varepsilon$, 則 $a=a_1+(n-1)\varepsilon$ 必屬於 A 部,而 $b-a=\varepsilon$.

a 稱爲 α 之弱差近值,而 b 爲其強差近值,其差不逾 ε.

3. 實數 (Real numbers).

全體有理數及無理數統稱爲實數.

設二實數 α 與 α' 欲 $\alpha'>\alpha$,必須而只須有一有理數 $r>\alpha$ 而 $<\alpha'$. 若 α 與 α' 均爲有理數,則理爲已知;若其均爲無理數,則由無理數不等之定義而明.

若 α 爲有理數,而 α' 爲無理數,則可證之,如次:設 α' 由分割 $(A|B)$ 而定,α 既小於 α'. 當屬於 A 部,但同部中必有 $>\alpha$ 之一數 r, 而 r 因屬於 A, 當 $<\alpha'$. 故條件爲必要.逆論之,設有一有理數 r, 使 $\alpha<r$ 並 $r<\alpha'$, 則 r 屬於 A 部,而 $<r$ 之有理數 α 亦必屬之,故條件亦爲充足.

若 α 爲無理數而 α' 爲有理數,則可仿上證之.

今設三實數 α, β, γ, 使 $\alpha<\beta$ 及 $\beta<\gamma$, 吾謂 $\alpha<\gamma$, 若 β 爲有理數,則準上理卽明.設爲無理數,則吾等恆可取二有理數 a 與 b, 使