

# 材料滞弹性性质的研究论文集

A SYMPOSIUM ON THE STUDY OF ANELASTIC BEHAVIOUR OF MATERIALS

高级工程师 沈覲陶著

Senior Engineer Shen Jin-tao

- \* 动力位移放大系数
- \* 应力松弛
- \* 蠕变
- \* 梁在长期荷载下的挠度增长

2003 武汉

## 前 言

本论文集由四篇专论组成，以滞弹性理论贯穿始终，各篇既互有联系，又各独立成章。在各自的研究领域内均有所创新，有所发展。其中“应力松弛”一篇已收入1991年9月南京混凝土工程国际会议论文集第一卷（P. 340-345）。

作者1951年毕业于上海大同大学土木工程系，曾参加治淮，长期从事铁路新线建设土木建设工程。近四十年的工程实践，对工程中常见而迄今又尚未能解决的宏观现象进行了认真的探索：为什么在动力荷载下结构构件的动力位移比静力位移大？为什么振动结构在达到共振状态时，振幅不会无限增大而达到一个一定的有限值？为什么在长期荷载下结构挠度将会随时间而增长？为什么予应力钢筋（丝）予应力随时间而松弛？为什么在恒定荷载下结构构件会有蠕变？这些宏观现象的微观机制是什么？是否能进行定量预测？迄今为止，国内外对这些宏观现象的探讨，一般均以试验为基础，对宏观现象作唯象描述（Phenomenological Discription）。这就意味着是基于宏观的观察而不是建立在根本的物理基础上。虽也有少数研究者从微观机理进行探索，但大都停留在定性分析阶段，无法对工程实际作定量预测。

为了能在基本的物理学基础上对这些宏观现象进行统一解释并作出定量预测，作者自六十年代开始即专心研究，利用工余时间，断断续续，虽有中断，间断，但从不稍懈，终于从C. Zener的金属滞弹性理论中得到启发。利用C. Zener所导得的应力函数与内耗之间的关系；作者导得了耗损系数B及非弹性组尼系数 $\gamma$ 的计算方法。并以此为基础推广应用于除金属以外之建筑材料领域（混凝土，木材，砖等）。首次在这一领域内不但判明了微观机理，并且作出了定量分析。因此这一研究成果无论在理论上或在实践应用上，均具有奠基性，突破性的进展。为国内外首创。

作者从工程实际中的宏观现象出发，研究总结成为理论，并再以此理论应用于指导工程实践。事实表明，理论非常接近于实验数据，从而得到了实验的检验与证实，因此该理论是符合客观自然规律的。这在认识上是一个飞跃。

作者希望藉此论文集的出版，能更广泛地达到学术交流的目的，实践是检验真理的唯一标准，作者希望国内外有更多的实验数据进行验证，并衷心地希望阅读本书的读者提出宝贵意见。作者预先对为本论文集提供实验数据的单位和个人，以及为本论文集的出版提供协助的机构致以诚挚的谢意。

沈觀陶  
1999年10月于武汉



## 目 录

1. 材料的滞弹性性质和以频率作为参数的位移动力放大系数的研究
2. 材料的滞弹性性质对钢筋（丝）应力松弛影响的研究
3. 材料的滞弹性性质对在常温及高温条件下结构中蠕变影响的研究
4. 材料的滞弹性性质对钢筋混凝土梁在长期荷载下挠度增长 的影响
5. 附录 I 关于B值的计算方法



# 材料的滞弹性性质和以频率作为参数的位移动力放大系数的研究

高级工程师

沈觀陶

提要：依据对滞弹性的物理理解以及某些滞弹性现象的微观机制（包括内耗，弹性蠕变，应力弛豫，动力弹性模量随频率或温度而变化等），用标准线性固体的机械模型，从应力应变之间存在线性关系的假定出发，应用玻耳兹曼叠加原理，C. Zener<sup>[1]</sup>导得了内耗（ $\tan \delta$ ）与应力函数  $f(t)$  之间的关系。本文从间接测量内耗的方法，相邻二次振幅比值的自然对数（对数减缩量  $\text{Log. dec.}$ ）与内耗之间的关系（当  $\tan \delta$  很小时）。作者导得了耗损系数  $B$  及非弹性阻尼系数  $\gamma$  的计算方法。应用  $B$  及  $\gamma$  本文给出了一个自由度强迫振动体系中以频率作为参数的位移动力放大系数  $\beta$  的计算公式。计算结果表明，理论与实测质料数据相符。

## 一。材料的滞弹性性质

C. Zener 在“金属的弹性与滞弹性”<sup>[1]</sup>一书中阐述了固体的滞弹性 (Anelasticity) 性质。研究了关于微观结构变化动力学的一些很明确的问题。例如金属在小应力下也会显示出与完全弹性的偏离。即在不超比例极限的微小变形时，材料内部发生某种不可逆过程，消耗和散失一部分所获的能量。自由振动时，振幅将逐渐衰减，最后振动终止。强迫振动时，当达到共振状态，振幅不会趋向无限大而是具有有限值<sup>[3]</sup>。结构任意构件的振幅随时间迅速减小，这不仅是由于外部阻力的影响，而且主要是由于内部阻力的影响。经典的弹性理论实质上是虎克定律应用到基元区域上所导致的所有结论的发展。根据经典的弹性理论，应力和应变是单值关联的。只要力是以准静态方式施加的，即假若力改变得相当慢而不致产生振动，则外力和形变也是单值关联的。但在实际固体中存在着与弹性理论不符的其他效应，如内耗，应力弛豫，以及模量随测量频率的变化。所有这些效应都是应力与应变不是单值关系的不同表现。在范性形变以前的区域内，固体的应力与应变不是单值关系的性质称为“滞弹性”。经典弹性理论是忽略实际固体的原子结构效应的宏观理论，所以它的结论有一定的局限性。但是可以满意地解释那些在可以忽略它们的原子结构效应时的材料弹性力学的规律。

材料消耗振动能量的性质可以能量耗散系数  $B$  来表示<sup>[10]</sup>。

$$B = \Delta E / E$$

式中  $E$  为体系的总能量， $\Delta E$  为耗散能量。由于在振幅不大时  $\Delta E$  和  $E$  都与振动振幅的平方成正比。因此可以写出：

$$A_1^2 = E \tag{1}$$

$$A_2^2 = E - \Delta E = E (1-B) \tag{2}$$

我们知道对数减缩量的定义是相邻二次振幅比值的自然对数。所以

$$\ln(A_1^2 / A_2^2) = \ln(1 / 1-B) \quad 3$$

$$\Lambda = \ln(A_1 / A_2) = 1/2 \ln(1 / 1-B) \quad 4$$

即振幅的对数减缩量是能量对数减缩量的一半。由 (1), (2) 式可得

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2}$$

若它比1要小得多时, 就有

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2} \approx \frac{2(A_1 - A_2)}{A_2} \approx 2 \ln(A_1 / A_2) \approx 2\Lambda^{[12]}$$

因此, 对于衰减对数递减量较小的材料, 即 B 值较小时, 在比例极限内有

$$B \approx 2\Lambda$$

将 B 减小到  $2\pi$  倍就给出材料的非弹性阻尼系数  $\gamma$  (内摩擦, 内耗)。在内耗很小的情况下<sup>[1]</sup>

$$\gamma = \tan \delta = \Lambda / \pi = \frac{\ln(1 / 1-B)}{2\pi} \quad 5$$

$\gamma$  与 B 成正比。显然上面的关系式当内耗很大时就不再成立, 因为材料本身的内部阻尼将使振动发生过阻尼 (overdamping) 而产生非周期运动。

## 二. 耗散系数 B 值的计算

C. Zener 用标准线性固体的机械模型, 从应力应变之间存在线性关系的假定出发, 应用玻耳兹曼叠加原理 (Boltzmann's Principle of Superposition), 导得了内耗与应力函数间的下列关系:

$$\gamma = \tan \delta \approx - \frac{\pi}{2} \frac{(d \ln f)}{d \ln t} \quad t=T/8 \quad 6$$

根据上式的涵义, 将式中  $\frac{(d \ln f)}{d \ln t} \quad t=T/8$  项采用与本文相应的形式, 可得

$$\gamma = \tan \delta = - \frac{\pi \log(1-B)}{2 \log(T/8)} \quad 7$$

令 (5),(7) 式相等, 并进行对数变换, 得耗散系数  $B$  与周期  $T$  的关系式:

$$\log \left[ \frac{\ln(1/1-B)}{2\pi} \right] = - \frac{\pi \log(1-B) + 10}{2 \log(T/8) + 10}$$

$$\left\{ - \frac{\log(1-B) + 10}{\log \left[ \frac{\ln(1/1-B)}{2\pi} \right] 2} - 10 \right\}$$

$$T = 8 \times 10 \quad 8$$

式中  $T$  为结构振动周期。该式为求耗散系数  $B$  的基本公式。表 1 计算了频率在  $2.44E+06-0.0026$  范围内的  $B$  值。对于不同材料之  $B$  值可乘以换算系数。

$$B_x = \frac{(E C_x \rho_x)}{E_x C \rho} \quad B = R_x B \quad 9$$

式中  $B_x$  为所求材料的耗散系数。 $E_x, \rho_x, C_x$  分别代表所求材料的弹性模量, 密度及比热。 $E, \rho, C$  为结构钢材料相应之弹性模量, 密度及比热。不同材料的耗散系数与其  $E, \rho, C$  物理属性有关。几种常用建筑材料的换算系数  $R_x$  列表 2。

表1

| B               | T               | f(1/T)          |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1.000000000E-05 | 4.094560000E-07 | 2.442263450E+06 |
| 5.000000000E-05 | 9.628530000E-07 | 1.038580330E+06 |
| 1.000000000E-04 | 1.502530000E-06 | 6.655423400E+05 |
| 5.000000000E-04 | 5.433220000E-06 | 1.840529600E+05 |
| 1.000000000E-03 | 1.093460000E-05 | 9.145295000E+04 |
| 5.000000000E-03 | 9.378710000E-05 | 1.066245000E+04 |
| 1.000000000E-02 | 3.301050000E-04 | 3.029340000E+03 |
| 2.000000000E-02 | 1.581140000E-03 | 6.324600000E+02 |
| 3.000000000E-02 | 4.797210000E-03 | 2.084600000E+02 |
| 4.000000000E-02 | 1.179900000E-02 | 8.475000000E+01 |
| 5.000000000E-02 | 2.563740000E-02 | 3.901000000E+01 |
| 6.000000000E-02 | 5.128170000E-02 | 1.950000000E+01 |
| 7.000000000E-02 | 9.665260000E-02 | 1.035000000E+01 |
| 8.000000000E-02 | 1.741620000E-01 | 5.740000000E+00 |
| 9.000000000E-02 | 3.029920000E-01 | 3.300000000E+00 |
| 1.000000000E-01 | 5.124630000E-01 | 1.950000000E+00 |
| 1.100000000E-01 | 8.469760000E-01 | 1.180000000E+00 |
| 1.133956585E-01 | 1.000000000E+00 | 1.000000000E+00 |
| 1.200000000E-01 | 1.373250000E+00 | 7.282000000E-01 |
| 1.300000000E-01 | 2.190920000E+00 | 4.560000000E-01 |
| 1.400000000E-01 | 3.447950000E+00 | 2.900000000E-01 |
| 1.500000000E-01 | 5.363130000E+00 | 1.870000000E-01 |
| 1.600000000E-01 | 8.258820000E+00 | 1.210000000E-01 |
| 1.700000000E-01 | 1.260848000E+01 | 7.900000000E-02 |
| 1.800000000E-01 | 1.910590000E+01 | 5.200000000E-02 |
| 1.900000000E-01 | 2.876582000E+01 | 3.500000000E-02 |
| 2.000000000E-01 | 4.307032000E+01 | 2.300000000E-02 |
| 2.553376950E-01 | 3.754121196E+02 | 2.660000000E-03 |
|                 |                 |                 |



表 2

| 材料名称 | E (Kg/cm <sup>2</sup> ) | C     | r (Kg/cm <sup>3</sup> ) | R <sub>x</sub> |
|------|-------------------------|-------|-------------------------|----------------|
| 结构钢  | 2.10E+06                | 0.107 | 0.00785                 | 1              |
| 混凝土  | 1.55E+05-3.65E+05       | 0.2   | 0.0025                  | 8.065-3.525    |
| 砖    | 3.00E+05                | 0.19  | 0.0018                  | 2.8502         |
| 木材   | 1.00E+05                | 0.3   | 0.0006                  | 4.5003         |

计算时应按实际使用材料的  $E_x, r_x, C_x$  值代入公式 (9) 以求得  $B_x$ 。将所求得的  $B_x$  值代入公式 (5)，即可求得非弹性阻尼系数  $\gamma$ 。

三。一个自由度体系强迫振动的动力响应

考虑非弹性阻尼因素时一个自由度体系强迫振动的动力平衡微分方程。今以简支梁为例 (图1)。梁上有传递某种以角速度  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  rad./s 沿圆周旋转的质量作用。 $\alpha$  为角位移。

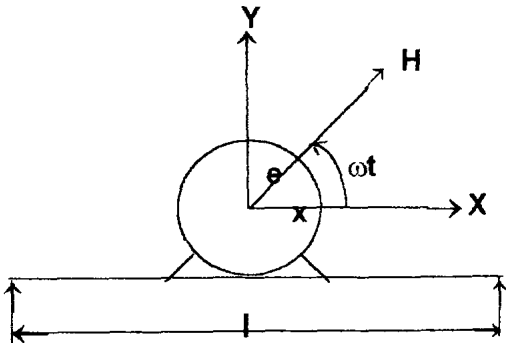


Fig. 1

$$X = e \cos \omega t$$

.

$$\dot{X} = -e \omega \sin \omega t$$

离心力

$$H = \frac{mV^2}{e} = \frac{m e^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{e} = m e \omega^2 \sin^2 \omega t$$

$$H_{\max} = m e \omega^2$$

梁上的周期性作用力  $H \sin \omega t$ 。我们将恢复力用  $Q$  表示,  $Q=Cy$ , 惯性力  $F=m\ddot{y}$ , 非弹性阻尼力  $R=\gamma Q$ 。则该梁的动力平衡微分方程可写成下式

$$F + Q + R = H \sin \omega t$$

$$m \ddot{y} + Q + \gamma Q = H \sin \omega t$$

$$m \ddot{y} + (1 + \gamma) Q = H \sin \omega t$$

$$\ddot{y} + (1 + \gamma) \frac{C}{m} y = \frac{H}{m} \sin \omega t$$

$$\ddot{y} + k^2 y = \frac{H}{m} \sin \omega t$$

10

式中

$$k = \sqrt{(1 + \gamma) \frac{C}{m}} = \sqrt{1 + \gamma} \phi = \sqrt{1 + \gamma} 2 \pi f$$

$f$  为固有频率

$$f = \frac{\phi}{2 \pi}$$

方程 (10) 的齐次解为

$$y_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

设特解为

$$y_2 = A \sin \omega t$$

$$\dot{y}_2 = \omega A \cos \omega t$$

$$\ddot{y}_2 = -\omega^2 A \sin \omega t$$

代入 (10) 式, 求得

$$A = \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2}$$

因此

$$y_2 = \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

方程 (10) 的全部解为

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad 11$$

现在我们研究该方程解的第二部分, 强迫振动的振幅

$$\begin{aligned} A &= \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{H}{m} \frac{1}{(1+\gamma) 4 \pi^2 f^2 - \omega^2} \sin \omega t \\ &= \frac{H}{m 4 \pi^2 f^2} \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{4 \pi^2 \omega_1^2}{4 \pi^2 f^2}]} \sin \omega t \\ &= \frac{H}{m \frac{C}{m}} \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} \sin \omega t \\ &= \frac{H}{C} \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} \sin \omega t \\ &= \frac{H y}{Q} \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} \sin \omega t \\ &= \frac{H y}{H \sin \omega t} \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} y = \beta y \quad 12$$

式中  $\omega_1$  为强迫振动频率,  $\beta$  为以频率作为参数的位移动力放大系数。 $y$  为对应于静力荷载为  $P$  时的静力挠度。

$$\beta = \frac{1}{[(1+\gamma) - \frac{\omega_1^2}{f^2}]} \quad 13$$

当  $\omega_1 = f$ , 即发生共振时, 振幅达到最大的有限值。

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \quad 14$$

在稳态强迫振动状态下 Minoru Wakabayashi<sup>[8]</sup> 给出的动力位移放大系数  $D_d$  的计算公式为

$$D_d = \left| \frac{V}{V_{st}} \right| = [(1 - \beta_1^2)^2 + 4\xi^2 \beta_1^2]^{-1/2} \quad A$$

当  $\omega_1 / f = 1$ , 即式中  $\beta_1 = 1$  时产生共振

$$D_d = \frac{1}{2\xi}$$

相当于 (14) 式中之  $1/\gamma$ , 即

$$\gamma = 2\xi$$

由文献[8], 图2-5, pp. 40, 在  $\beta=1$  时, 动力位移放大系数值与本文计算值是一致的。当  $\gamma = 2\xi = 0$  时 (13) 式与 (A) 完全类同<sup>[9]</sup>。但 (A) 式中的阻尼比  $\xi$  值无法由计算直接确定。其运动方程中的粘滞阻尼力  $F_d$  一项是假设由阻尼系数  $c$  和变形速度的乘积得到, 即众所周知的 W. Thomson 和 Voight 假设<sup>[10]</sup>。

确定方程 (11) 中的常数值  $C_1, C_2$

$$t = 0, \quad y(t) = 0, \quad C_1 = 0$$

$$t = 0, \quad \dot{y}(t) = 0,$$

$$-C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \omega \cos \omega t = 0$$

$$C_2 = -\frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k}$$

代入方程 (11), 可得

$$\begin{aligned} y &= -\frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt + \frac{H}{m} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t \\ &= \beta y \sin \omega t - \beta y \frac{\omega}{k} \sin kt = \beta y \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right) \end{aligned}$$

要使振幅有极大值, 必须使括号内的  $\sin \omega t = 1$ , 第二项等于零, 即

$$y_{\max} = \beta y$$

在特殊情况下, 当  $kt$  与  $\omega t$  位相差  $\pi$ , 且当

$$kt = 3\pi/2, \quad \omega t = \pi/2, \quad \text{时}$$

$$y_{\max} = \beta y \left( 1 + \frac{\omega}{\sqrt{1 + \gamma \phi}} \right)$$

用非弹性阻尼系数  $\gamma$  和频率比  $\omega_1^2/f^2$  作为参数的动力放大系数  $\beta$  列于表3

表 3

| T            | B           | $\gamma$ | $\frac{\omega^2}{f^2}$ |       |       |       |        |        |    |
|--------------|-------------|----------|------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|----|
|              |             |          | $\beta$                | 0     | 0.2   | 0.4   | 0.6    | 6.25   | 25 |
| 1.372931E-04 | 0.006263487 | 0.001    | 0.999                  | 1.248 | 1.664 | 2.494 | -0.191 | -0.042 |    |
| .054405152   | 0.060898632 | 0.01     | 0.990                  | 1.235 | 1.639 | 2.439 | -0.191 | -0.042 |    |
| 4.375782909  | 0.145364    | 0.025    | 0.976                  | 1.121 | 1.6   | 2.353 | -0.191 | -0.042 |    |
| 648.4030066  | 0.269597308 | 0.05     | 0.952                  | 1.117 | 1.539 | 2.222 | -0.192 | -0.042 |    |
| 1522024.823  | 0.466511908 | 0.1      | 0.909                  | 1.111 | 1.429 | 2     | -0.194 | -0.042 |    |
| 1.41136E+12  | 0.715390456 | 0.2      | 0.833                  | 1     | 1.25  | 1.666 | -0.198 | -0.042 |    |
| 1.16891E+26  | 0.918997408 | 0.4      | 0.714                  | 0.833 | 1     | 1.25  | -0.206 | -0.042 |    |
| 1.30433E+50  | 0.976945889 | 0.6      | 0.625                  | 0.714 | 0.833 | 1     | -0.215 | -0.043 |    |

由表3可知:

- 1. 当非弹性阻尼系数在 0.01-0.2 范围内, 如控制  $\omega^2/f^2 \leq 0.2$ , 则动力位移放大系数  $\beta$  可控制在 1-1.235。
- 2. 当  $\gamma$  为固定值时, 可控制  $1+\gamma-(\omega_1^2/f^2) \leq 0.7$ . 即  $\beta$  不大于1.5。
- 3. 所求得之  $\beta$  值应与 (15) 式比较, 取其较大值。



4. 在隔振工程应用上，应增大隔振系数。根据表3，可知所选择的隔振阻尼材料其阻尼特性（Damper's Stiffness）应能使  $\omega_1^2 / f^2 > 1$ 。在中等阻尼状态下，实用上一般选择  $\omega_1^2 / f^2 = 2.5-5$  [4]。

四. 理论计算与实测数据比较

关于结构构件动力位移放大系数的测定，有文献记录的完整数据很少。现利用 Merlin L. James 等1964年发表的“Dynamic Properties of Reinforced and Prestressed Concrete Strsctural Components” [2]—文中实测的数据（原文图4）与应用本文公式所得计算值相对照，理论值与实测数据是一致的。计算结果列于表4。计算单位按原文。

表 4 (1)

| 梁号  | 扰力   | 固有<br>频率 | $E_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> ) | $\rho_x$ (Kg/cm <sup>2</sup> ) | $C_x$ | $R_x$       |
|-----|------|----------|-----------------------------|--------------------------------|-------|-------------|
|     | lb.  | f        |                             |                                |       |             |
| #6  | 4    | 34       | 2.529348875E+05             | 2.306692853E-03                | 0.2   | 4.560126496 |
|     | 5.7  | 33.8     | 2.499679350E+05             | “                              | “     | 4.614252153 |
|     | 7.5  | 32       | 2.240530491E+05             | “                              | “     | 5.147955301 |
|     | 8.5  | 31.5     | 2.171060918E+05             | “                              | “     | 5.312679495 |
|     | 10   | 31       | 2.102685354E+05             | “                              | “     | 5.485438321 |
|     | 15.5 | 30.5     | 2.035403798E+05             | “                              | “     | 5.666762942 |
| #5  | 1    | 39.1     | 3.533223731E+05             | 2.436444326E-03                | 0.2   | 3.448110772 |
| #21 | 2    | 40.1     | 3.551339495E+05             | 2.328318099E-03                | 0.2   | 3.278279502 |
|     | 3.1  | 40       | 3.533649664E+05             | “                              | “     | 3.294691389 |
|     | 6.3  | 39.8     | 3.498401013E+05             | “                              | “     | 3.327887062 |
|     | 12.5 | 39.4     | 3.428434761E+05             | “                              | “     | 3.395801375 |

|         |     |             |                 |                   |                   |                        |
|---------|-----|-------------|-----------------|-------------------|-------------------|------------------------|
|         | 25  | 39          | 3.359175236E+05 | “                 | “                 | 3.465816057            |
| #22     | 3   | 40.2        | 3.580123761E+05 | 2.335526514E-03   | 0.2               | 3.261989944            |
| 表 4 (2) |     |             |                 |                   |                   |                        |
|         |     |             |                 |                   |                   |                        |
|         | 梁号  | B           | B <sub>x</sub>  | β <sub>cal.</sub> | β <sub>prc.</sub> | Note                   |
|         | #6  | 0.05190161  | 0.236678814     | 23.2645           | 22                |                        |
|         |     | 0.051984425 | 0.239869245     | 22.9092           | 21                |                        |
|         |     | 0.0527539   | 0.271574719     | 19.8289           | 19                |                        |
|         |     | 0.0529764   | 0.281446634     | 19.0103           | 18.5              |                        |
|         |     | 0.05320306  | 0.291842104     | 18.2075           | 18                |                        |
|         |     | 0.053434005 | 0.302797839     | 17.4204           | 17                |                        |
|         | #5  | 0.049966859 | 0.172291264     | 33.2279           | 32.5              |                        |
|         | #21 | 0.049621592 | 0.162673448     | 35.39             | 34.8              | Visible tensile cracks |
|         |     | 0.04965567  | 0.163600108     | 35.1707           | 32                |                        |
|         |     | 0.04972412  | 0.165476256     | 34.7341           | 28                |                        |

|     |             |             |         |    |
|-----|-------------|-------------|---------|----|
|     | 0.049862221 | 0.169322199 | 33.8692 | 26 |
|     | 0.05000195  | 0.173297561 | 33.0155 | 25 |
| #22 | 0.049587612 | 0.161754292 | 35.6101 | 35 |

根据文献[2]说明，21-26 号予应力钢筋混凝土梁由 1-3/8” 钢索张拉至 14000lb. 予应力梁混凝土截面上的最大拉应力为 210 p.s.i. 最大压应力为1023 p.s.i., 在该梁的上部受拉面上有可见的 1-2 条横向裂纹并且不同程度地向下向横断面内延伸。梁的养护温度为140°F，养护时间 1-10 号梁为 72 小时，21-26 号梁为50 小时，21 号梁由于混凝土开裂因此除第一次试验扰力为 2 lb 时，实测与理论一致外，其后几次的实测值均有较大出入，这是合乎动力性能的。

文献[2]的计算数据如下：

$$E_x = 4 w l^3 f_1^2 / \pi^2 I g$$
  
$$l = 116.5 \text{ in.}$$
  
$$W = \text{The weight of beam ( Table 2, reference 2)}$$
  
$$f_1 = \text{Natural frequency (Table 3, reference 2)}$$
  
$$I = 4X8^3 / 12= 170.6666 \text{ in}^4$$
  
$$g = 386.0885827 \text{ in / s}^2$$
  
$$1 \text{ in}^3 = 16.387064 \text{ cm}^3$$
  
$$1 \text{ lb} = 0.453599081 \text{ Kg}$$
  
$$1 \text{ p.s.i.} = 0.070307 \text{ Kg / cm}^2$$
  
$$\rho_x = W / 4X 8 X 120 \text{ Kg / cm}^3$$

再以文献[3]，例6及18，计算对照如表5。理论计算值与文献所给经验数据基本一致。