凸集理论

第五章　凸集理论

引　言

本章介绍凸集的基本理论，包括凸集的分离定理、紧凸集的表示和凸锥的基本性质。

对于一般线性空间中凸集的概念，是从平面凸集E的特征性质中抽象出来的：对于E的任意两点x与y，联结这两点的线段

$$\lambda x+(1-\lambda)y,\quad 0\leqq\lambda\leqq 1,$$

也必属于E。在这个性质中，只要求对（平面上）向量作线性运算，并不要求空间具有拓扑结构，所以这个概念可以扩充到一般的线性空间。

图 5

有穷维空间的凸集理论与许多数学分支，例如数的几何、凸曲面的微分几何、积分几何以及不等式理论等有着密切的联系。特别是凸集的分离定理已经成功地奠定了在实际应用中十分重要的线性规划、非线性规划和对策论的理论基础。

无穷维空间的凸集理论也有广泛的应用。著名的Leray-Schauder不动点定理建立在紧凸集的基础上；一些表现定理用到紧凸集的端点表现，在Banach代数、位势论和概率论中起重要的作用；近年来，凸锥的理论又被用到现代控制理论，从这个观点出发可以对极值控制理论中的极大值原理和非线性规划中的Kuhn-Tucker理论给出统一的处理方法。

这一章只给出凸集理论的最初步结果，为读者进一步研究提供必要的准备。对于凸集理论在极值控制中的应用有兴趣的读者，请参阅另一本书：《线性系统的极值控制》[1]。

凸集、凸锥与凸函数的理论近年来已形成数学中专门的基础学科，叫做凸分析。国外在这方面已有多种文字的专书出版，并且已开过不少次这方面的学术会议了。

§1　凸集的基本性质

在这一节，如果不是特别声明，总是规定$\mathscr{X}$表示一个实的线性空间。本节的主要内容是介绍凸集的一些最基本的性质。

为了熟悉本节中提出的凸集的概念，我们举几个凸集的例子。

〔例1〕　$\mathscr{X}$中的空集，一点组成的集合以及$\mathscr{X}$的任意线性子空间都是凸集。

〔例2〕　如果$\mathscr{X}$还是一个(F^*)空间，又$\varepsilon>0$；那么球$S(0;\varepsilon)=\{x\in\mathscr{X} \mid \|x\|<\varepsilon\}$是一个凸集。

〔例3〕　连续函数空间$C[0,1]$中的一切正元$\{f(x)\mid\in C[0,1],\ f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]\}$组成一个凸集。

〔例4〕　给定集合$\Omega=\{a_i \mid i\in N\}$，其中$N$是正整数集合，则$\Omega$上的一切概率分布：$\{p_i \mid i\in N\}$，

1）这是中国科学院数学研究所控制理论研究室主编的《现代控制系统理论小丛书》中的一种，待出版。

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,\quad p_i \geq 0,\quad i \in N$$

是定义在Ω上的函数线性空间中的一个凸集。

从凸集的定义出发，容易引出以下简单性质：

性质1　设$A_\iota(\iota\in I)$都是$\mathscr{X}$中的凸集，其中I是任意指标集，则$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$也是凸集。

这是因为

$\forall x, y \in \bigcap_{\iota\in I} A_\iota$

$$\Rightarrow \begin{cases} x, y \in A_\iota, \\ \forall \iota \in I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x + (1-\lambda) y \in A_\iota, \\ \forall \iota \in I,\ \forall \lambda \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x + (1-\lambda) y \in \bigcap_{\iota\in I} A_\iota, \\ \forall \lambda \in [0, 1]. \end{cases}$$

性质2　设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是两个线性空间，T是$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的一个线性映射；又设E是$\mathscr{X}$中的一个凸集，则$T(E)$必是$\mathscr{Y}$中的凸集。

这是因为

$\forall a, b \in T(E)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x, y \in E, \\ Tx = a, \\ Ty = b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda a + (1-\lambda) b \\ = \lambda Tx + (1-\lambda) Ty \\ = T(\lambda x + (1-\lambda) y) \in T(E), \\ \forall \lambda \in [0, 1]. \end{cases}$$

设E与F是$\mathscr{X}$中任意两个集合，我们用$E+F$表示集合

$\{x = y + z \mid y \in E,\ z \in F\}$.

为了说明集合$E+F$的意义，举两个例子。

〔例1〕 设E是一点集$\{x_0\}$，而F是任意集合，则$E+F$就是F中每点经过平移x_0后得到的集合。

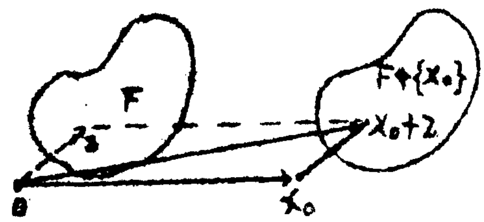

图5·2

〔例2〕 在(B_0^*)型空间$\mathfrak{X}$中，设E是任意集合，$\|\cdot\|$是~~一个~~拟范数，而$F=S(0;\delta)=\{x\mid \|x\|<\delta\}$，$\delta>0$；若记

$$E_\delta=\{x\in\mathfrak{X}\mid \exists y\in E\text{使}\|x-y\|<\delta\}$$

则
$$E+F=E_\delta。$$

我们把集合E_δ称为E关于拟范数$\|\cdot\|$的δ邻域。

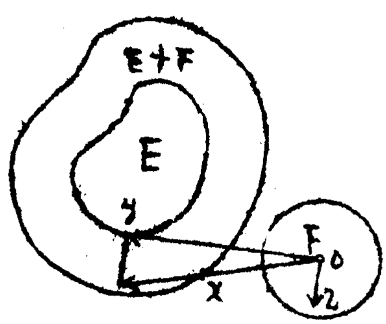

图5·3

性质 3　设 E 与 F 都是 $\mathfrak{X}$ 中的凸集，则集合 $E+F$ 也是凸的。

这是因为

$\forall x,\ y\in E+F$

$$\Rightarrow\begin{cases}\exists x_1,\ y_1\in E,\\ \exists x_2,\ y_2\in F,\\ x=x_1+x_2,\\ y=y_1+y_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda x+(1-\lambda)y\\ =\lambda x_1+(1-\lambda)y_1\\ +\lambda x_2+(1-\lambda)y_2\\ \in E+F,\\ \forall\lambda\in[0,\ 1].\end{cases}$$

由此可见：

性质 4　设 E 是 $\mathfrak{X}$ 中任一线性流形，即有一线性子空间 E_0 及向量 $x_0\in\mathfrak{X}$，使得 $E=E_0+x_0$；则 E 是一凸集。又一个凸集的平移仍是凸集。

性质 5　设 E 是 $\mathfrak{X}$ 中的任意凸集，$\mathfrak{X}$ 是一个 (B_0^*) 型空间，则它关于拟范数 $\|\cdot\|$ 的 δ 邻域 E_δ，$\delta>0$ 以及闭包 $\bar{E}=\bigcap\limits_{\delta>0}E_\delta$ 都是凸的。

（性质 3 与性质 1 的直接推论。）

今后我们需要遇到从一个未必凸的集合出发，构造包含它的最小凸集的问题，为此引入

定义 1　集合 $[A]$ 称为 $\mathfrak{X}$ 中的子集 A 的凸包，是指 $[A]$ 是一切包含 A 的凸集的交集。

（例 1）　设 A 由有穷多个点 $\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$ 组成，则

$$[A]=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\ \middle|\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\leq 1,\ \lambda_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

特别在三维空间中，包含四个点的最小凸集即以这四个点为顶点的

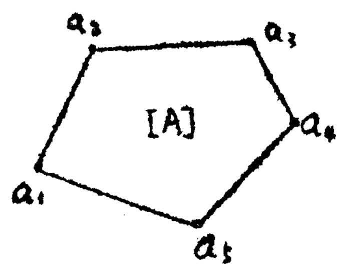

图 5 · 4

四面体。

〔例 2 〕 设 E 是平面上的单位圆周$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$。则〔E〕是单位圆盘$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$。

对于任意集合 E，我们来刻划它的凸包。

性质 6 设 E 为 X 的任意集，则

$$(1)\ [E]=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \,\middle|\, x_i\in E,\ \lambda_i\geq 0,\ i=1,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ n\text{ 任意}\right\}$$

。我们常称(1)中形如$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$的点为 E 中点的一个凸组合。

事实上，记(1)式右端的点集为 S，不难看出 S 是一个包含 E 的凸集。为证 S 是包含 E 的最小凸集，设 F 为任一包含 E 的凸集。则$x_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n$。从而$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in F$。即得$S\subset F$。既然 F 是凸的，便有〔E〕$=S$。

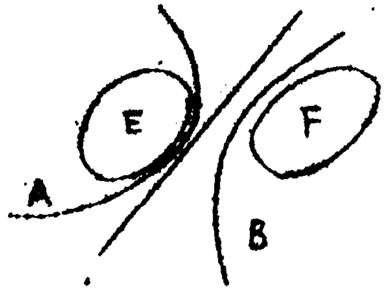

图 5 · 5

性质7（角谷静夫－Stone） 设E与F是$\mathscr{X}$上两个不相交的凸集：$E\cap F=\varnothing$。则必存在两个凸集A_0与B_0满足：

（2） $$E\subset A_0,\quad F\subset B_0.$$

（3） $$A_0\cap B_0=\varnothing,\quad A_0\cup B_0=\mathscr{X}.$$

证 在这个命题中，主要之点显然是结论的最后一条：

$$A_0\cup B_0=\mathscr{X}.$$

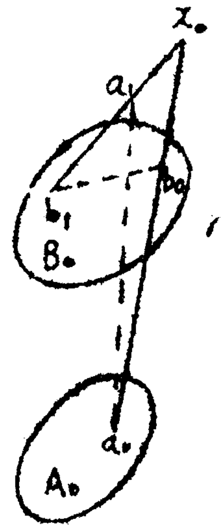

图5·6

至于前几个要求

（4） $$E\subset A,\quad F\subset B,\quad A\cap B=\varnothing$$

都是不足道的。我们把满足（4）式的凸集合双（A，B）组成的集双族记作$\mathfrak{F}$，并在$\mathfrak{F}$上规定序$\leq$如下：

（A，B）$\leq$（A'，B'）指$A\subset A'$且$B\subset B'$。显然$\{\mathfrak{F},\leq\}$是一个非空序集（$(E,F)\in\mathfrak{F}$）。

为了要求（A_0，B_0）满足（4）式及$A_0\cup B_0=\mathscr{X}$，只要能证明（A_0，B_0）是$\mathfrak{F}$中的一个极大元就够了。事实上，倘若有$x_0\notin A_0\cup B_0$，分别作集合$[A_0\cup\{x_0\}]$及$[B_0\cup\{x_0\}]$，我们指出：

（5） $$[A_0\cup\{x_0\}]\cap B_0=\varnothing,$$

或

（6） $$A_0\cap[B_0\cup\{x_0\}]=\varnothing$$

至少有一个成立。因若不然[1]，

$$\begin{cases}\exists a_0\in A_0,\ b_0\in B_0,\ b_0\in[a_0,\ x_0];\\ \exists a_1\in A_0,\ b_1\in B_0,\ a_1\in[b_1,\ x_0];\end{cases}$$

线段 $[a_0, a_1]$ 与线段 $[b_0, b_1]$ 必相交，而这个交点 $\in A_0\cap B_0$，便与 $A_0\cap B_0=\varnothing$ 相矛盾。于是 (A_0, B_0) 便不可能是$\mathfrak{F}$的极大元。剩下来只要再证明$\mathfrak{F}$中有极大元存在就够了。因为$\mathfrak{F}$中任意全序子族有上界，所以由Zorn辅助定理，在$\mathfrak{F}$中存在着极大元 (A_0, B_0)。

性质8　设E是(B_0^*)空间$\mathfrak{X}$中的一个含有内点的凸集，则 $\overline{\mathring{E}}=\overline{E}$。

事实上，不妨设E以O为内点，并且是$\mathfrak{X}$的真子集。由第一章§3·1，它的Minkowski泛函$p(x)$是非零正齐次连续次加法的，所以

$$\mathring{E}=\{x\mid p(x)<1\},$$

$$\overline{E}\subset\{x\mid p(x)\leq 1\}\subset\overline{\mathring{E}},$$

即得 $\overline{\mathring{E}}=\overline{E}$。

1）这里以及今后，常用 $[x, y]$ 表示线性空间$\mathfrak{X}$中联结点 x 和 y 之间的直线段，即 $[x, y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y\mid 0\leq\lambda\leq 1\}$。

§ 2 分离定理及其应用

平面上两个互不相交的凸集 E 与 F，$E\cap F=\varnothing$，有一个重要的几何性质：存在着一条直线 l 分离 E 与 F；即存在直线 l 使 E 与 F 各在 l 的一侧。

在一般的线性空间中这条几何性质有没有相应的推广呢？为简单起见，今后我们总假设 $\mathscr{X}$ 是一个实的线性空间。本节的任务就是讨论这种推广并指出它们的一些应用。

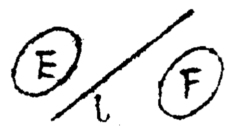

图 5 · 7

我们知道在 $\mathscr{X}$ 上相应于平面上的直线 l 的概念是极大线性流形 L，即一个极大线性子空间 R 的平移 $L=x_0+R$，$x_0\in\mathscr{X}$；如果 $\mathscr{X}$ 是一个 (F^*) 型空间，那么我们还应要求 L 是闭的。平面上的直线 l 可以通过线性函数表示：

$$l=\{x=(\xi,\eta)\mid a\xi+b\eta=C\}.$$

极大线性流形 L 也可以通过线性泛函来刻划。事实上，如果 f 是 (B_0^*) 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个非零（连续）线性泛函，那么集合

$$H_f^r=\{x\in\mathscr{X}\mid f(x)=r\},\ r\in R_1$$

必是一个极大线性（闭）流形。因为 H_f^0 显然是一个（闭）线性子空间。若 $r\neq 0$，由 f 是非零的，可见有 $x_0\in\mathscr{X}$ 使 $f(x_0)=r$。今对任意 $x\in H_f^r$，由

$$f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=0$$

得 $x\in x_0+H_f^0$，这证明了 $H_f^r=x_0+H_f^0$。至于极大性是由于若有 $x_1\notin H_f^r$，$x_2\triangleq x_1-x_0\notin H_f^0$，则 $\forall x\in\mathscr{X}$，$x-\dfrac{f(x)}{f(x_2)}x_2\in H_f^0$。便推出 x_1 与 H_f^r 张满全空间。

如 $L=R$ 是极大线性（闭）子空间，则取与它相应的连续线性泛函 f：$R=f^{-1}\{0\}$。如 $L\neq R$，$L=x_0+R$，从而 $x_0\notin R$，则 $L=f^{-1}(\{f(x_0)\})$。总结起来有

定理 1　为了 L 是 (B_0^*) 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个极大（闭）线性流形，必须且只须存在非零（连续）线性泛函 f 及 $r\in\mathscr{K}$，使得 $L=H_f^r$。

从上面的分析，还可以得到进一步的结论：如果 $H_{f_1}^0=H_{f_2}^0$ 则 f_1 与 f_2 必差一非零倍数。

所谓极大线性（闭）流形 $L=H_f$ 使集合 E 在它的一侧，用线性泛函来描写就是：

$$x\in E\Rightarrow f(x)\geq r\quad（或\leq r）。$$

定义 1　所谓 $L=H_f^r$ 分离 E 与 F，是指：

$$\begin{cases} x\in E\Rightarrow f(x)\geq r & （或\leq r），\\ x\in F\Rightarrow f(x)\leq r & （或\geq r）；\end{cases}$$

如果在上两个式子中分别用 $>$ 与 $<$ 号代替 $\geq$ 及 $\leq$ 号，那么我们就说 H_f^r 严格（或强）分离 E 与 F。

现在可以讨论本节一开始提出的：用极大线性（闭）流形分离互不相交的凸集的问题了，为简单计，以后也称极大线性闭流形为超平面。

首先指出 Hahn—Banach 定理就是一个这种类型的分离定理。

根据第一章§3·1，我们知道，如果E是实(F^*)空间中一个以0为内点的真凸子集，那么它的Minkowski泛函$p(x)$便是一个非零连续正齐次次加法泛函，满足

(1) $$x\in E \Longrightarrow p(x)\leq 1.$$

如果还有一点$x_0\notin E$，那么由$p(x)$的定义和E是以0为内点的凸集可以推出$p(x_0)\geq 1$。我们要证明有超平面H_f^r分离E与x_0。为寻求连续线性泛函f，先在一维线性子空间$\mathscr{X}_0=\{\lambda x_0 \mid \lambda\in\mathscr{K}\}$上构造：

$$f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0).$$

根据Hahn—Banach定理，必存在$\mathscr{X}$上的一个连续线性泛函$f(x)$满足

(2) $$f(x_0)=f_0(x_0)=p(x_0)\geq 1,$$

(3) $$f(x)\leq p(x),\quad \forall x\in\mathscr{X}.$$

联合(1)与(3)得

(4) $$f(x)\leq 1,\quad \forall x\in E.$$

这个f就是所要求的。

凸集E不一定要求以0为内点，因为只要通过适当平移，总可以把任意点变到0点。这样我们就得到

定理2(Hahn—Banach定理的几何形式) 设E是实(B_0^*)空间$\mathscr{X}$上的一个有内点的不空凸真子集，又设$x_0\notin E$，则必存在一个超平面H_f^r分离x_0与E。

注 对于无穷维空间$\mathscr{X}$，"E有内点"这一条是不能省略的。

例如在空间(l^2)中，令$E=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\mid$其中只有有穷多个$\xi_n$不为0，而最后一个不为0的坐标是正的$\}$。容易验证，E是一个凸集，且$0\notin E$，但E与0是不能分离的。事实上，若有$f\in\mathscr{X}^*$使得

$$f(x)\geqq 0\ (\leqq 0),\quad \forall x\in E,$$

则必有

$$f(\lambda e_n+e_{n+1})\geqq 0\ (\leqq 0),\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad n=1,2,\cdots,$$

其中e_n表示第n个分量为1其余分量为0的元。于是

$$\lambda f(e_n)+f(e_{n+1})\geqq 0\ (\leqq 0).$$

由此推得

$$f(e_n)\equiv 0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

这意味着$f\equiv 0$。

下面我们转向考虑两个任意凸集E和F的分离问题。当然要假定E有内点，且$E\cap F=\varnothing$。

根据角谷静夫-Stone定理，不妨假设$E\cup F=\mathscr{X}$。从几何直观上可以猜测到这个分离E与F的超平面就是E与F的公共边界$\overline{E}\cap\overline{F}$。所以我们要证明$\overline{E}\cap\overline{F}$是一个超平面。

因为E是一个含有内点的非空凸真子集，所以它的Minkowski泛函是正齐次连续次加法的：

$$x\in\overline{E}\iff p(x)\leqq 1,$$

$$x\in\overline{F}\iff p(x)\geqq 1,$$

又因为$\overline{E}$，$\overline{F}$都是凸集，所以$H=\overline{E}\cap\overline{F}=\{x\in\mathscr{X},\ p(x)=1\}$还是凸集。由$H$的凸性可以导出对于$\forall x,\ y\in\mathscr{X}$，只要$p(x)>0$，$p(y)>0$，就有

$$(5)\qquad p(x+y)=p(x)+p(y);$$

这是因为$\dfrac{x}{p(x)}$，$\dfrac{y}{p(y)}\in H$，从而$\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)}\in H$，即得

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right)=1.$$

这就是（5）式。我们要想证明H是一个超平面。为此引入

$$L=\{y\in\mathscr{X}\mid p(y)+p(-y)=0\}.$$

显然L是$\mathscr{X}$的一个闭线性子空间，而$\forall x_0\in H$，$y\in L$，由

$$\begin{aligned}1&=p(x_0)\leqq p(y+x_0)+p(-y)\\&=p(y+x_0)\leqq p(x_0)+p(y)=p(x_0)=1\end{aligned}$$

得$x_0+L\subset H$；反之，若有$x_1\in H$，但$x_1-x_0\notin L$，那么$p(x_1-x_0)>0$（或$p(x_0-x_1)>0$），由（5）得

$$\begin{aligned}p(x_1)&=p(x_0+(x_1-x_0))\\&=p(x_0)+p(x_1-x_0)>1\end{aligned}$$

（或$p(x_0)=p(x_1+(x_0-x_1))=p(x_1)+p(x_0-x_1)>1$），这个矛盾表明：

$$(6)\qquad H=x_0+L.$$

L还是极大的，因为$\forall x_1 \notin L$，不妨设$p(x_1)\neq 0$。由L的定义，$p(x_1)$与$p(-x_1)$不能同时$=0$，即

$$\text{或 } p(x_1)>0,\ \text{或 } p(-x_1)>0.$$

我们可以证明x_1与L张成全空间$\mathfrak{X}$。事实上，$\forall x\in\mathfrak{X}$，若$x\in L$自不待言，否则$p(x)>0$（或$p(-x)>0$），则$x_1/p(x_1)$，$x/p(x)$（或$\frac{-x}{p(-x)}$）$\in H$。由等式（6），

$$\frac{x}{p(x)}-\frac{x_1}{p(x_1)}\left(\text{或}\frac{-x}{p(-x)}-\frac{x_1}{p(x_1)}\right)\in L,$$

所以x在x_1与L张成的线性空间中。

利用定理1，存在$f\in\mathfrak{X}^*$，使$H_f^1=L$。因为f与p都是正齐次的，所以当$p(x)>0$时，$f(x)=p(x)$，因此H_f^1分离凸集E与F。

最后，条件$E\cap F=\varnothing$可以减弱为$\mathring{E}\cap F=\varnothing$；这是因为E有内点，所以$\mathring{E}$是有内点的凸集，对$\mathring{E}$与F应用上述结论得到分离超平面L，再由本章§1性质8，L还分离E与F。总结起来有

定理3（Eidelheit）　设E和F是(B_0^*)空间中的两个凸集，E有内点，$\mathring{E}\cap F=\varnothing$，那么存在超平面$H_f^r$分离E与F；换句话说，存在一个非零线性连续泛函$f(x)$使得

$$x\in E\Rightarrow f(x)\leq r,$$

$$x\in F\Rightarrow f(x)\geq r.$$

注　Eidelheit定理是Hahn—Banach定理的一个推广，它也可以利用Hahn—Banach定理导出来，不过在这里我们给出

了它的另一个证明。

这个定理有许多重要的推论。列举几个如下：

系 1（Mazur） 设 E 是（B_0^*）空间 $\mathfrak{X}$ 上的一个有内点的凸集，F 是 $\mathfrak{X}$ 上的一个线性流形，即一个线性子空间的平移：$F=x_0+\mathfrak{X}_0$，$x_0\in F$，$\mathfrak{X}_0$ 是 $\mathfrak{X}$ 的线性子空间。设 $\mathring{E}\cap F=\varnothing$，那么必存在一个包含 F 的闭超平面 H_f^r，使 E 在 H_f^r 的一侧；换句话说，存在 $\mathfrak{X}$ 上的连续线性泛函 f 使得

$$x\in F \Rightarrow f(x)=r,$$

$$x\in E \Rightarrow f(x)\leqq r.$$

证 由定理 2，$\exists H_f^r$，分离 E 与 F，即

$$f(x_0+\mathfrak{X}_0)\geqq r_0,\quad f(E)\leqq r_0.$$

这只能在 $\mathfrak{X}_0\subset H_f^0$ 时成立。从而 $F\subset x_0+H_f^0=H_f^r$，其中

$$r=f(x_0)=r_0.$$

系 2（Ascoli） 设 E 和 F 是（B_0^*）空间 $\mathfrak{X}$ 中两个不相交的闭凸集，其中 E 还是列紧的；那么 E 和 F 可以用一个闭超平面严格分离。换句话说，存在 $f\in\mathfrak{X}^*$，及 $\varepsilon>0$，r 实常数，使

$$x\in E \Rightarrow f(x)\leqq r-\varepsilon,$$

$$x\in F \Rightarrow f(x)\geqq r.$$

证 为了化到定理的条件，必须使两个不相交的凸集中，有一个有内点。如今 E 是列紧的，我们来证明必存在一个拟范数 $\|\cdot\|$ 及 $\delta>0$，使得 E 按这个拟范数的 δ 邻域 E_δ 与 F 不相交。为此先考察 $\mathfrak{X}$ 上的准范数

$$|||x|||=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}\cdot\frac{1}{2^n},$$

其中$\|\cdot\|_n$（$n=1, 2, \cdots$）是$\mathscr{X}$上的可数个拟范数。记$S(\varepsilon)=\{x\in\mathscr{X}\mid |||x|||<\varepsilon\}$。我们来证明$\exists\varepsilon>0$使$E+S(\varepsilon)$与$F$不相交。用归谬法；倘若不然，必存在$x_m\in E$，$y_m\in F$使得

$$|||x_m-y_m|||<\frac{1}{m},\quad m=1, 2, \cdots.$$

由E的列紧性，不妨设$x_m\to x_0\in E$，从而$y_m\to x_0$。但F是闭的，就得到$x_0\in E\cap F$，这与$E\cap F=\varnothing$矛盾。但是$S(\varepsilon)$不一定是凸集。我们还要证明存在拟范数$\|\cdot\|$及$\delta>0$使

$$\{x\mid \|x\|<\delta\}\subset S(\varepsilon).$$

这只要取n使$\frac{1}{2^n}<\varepsilon/2$，$\delta=\varepsilon/2$以及

$$\|x\|=\max_{1\leq k\leq n}\|x\|_k$$

就够了。这样一来，

$$E_\delta\triangleq E+\{x\mid \|x\|<\delta\}\subset E+S(\varepsilon),\text{ 而}$$
$$(E+S(\varepsilon))\cap F=\varnothing.$$

应用本章§2性质5，E_δ是含有内点的凸集。再由定理3，$\exists f\in\mathscr{X}^*$满足

$$x\in E_\delta\Rightarrow f(x)\leq 1,\quad x\in F\Rightarrow f(x)\geq 1.$$

但因E是列紧集，所以$f(x)$在E上达到最大值r_0，显然$r_0<1$。