

国外农业科技资料

(41)

—— 农业机械化与电气化

沈阳农学院科技情报室编译

1983 · 12

目 录

多因素试验的数学模型及其结果的分析	1
作物环境条件模拟	21
《大同江—6》型水稻插秧机使用指南	32
碳化钨表面耐磨堆焊	45
高铬铸铁表面耐磨堆焊	50
马氏体铸铁	59
鸡蛋蛋壳的强度	67
鸡蛋蛋壳的弹性模数和极限强度	71
蛋壳极限应力的测定和分析	74
压力、蛋壳变形与破碎力之间的关系	81

多因素试验的数学模型及其结果的分析

В. К. КУРЕЦ Э. Г. ПОПОВ

生态系统现象之间的因果关系是复杂的和多种形式的。在研究和模拟它们的过程中产生了选择适当的定量分析因素方法的必要性。为了处理试验结果，采用传统的数理统计方法：相关、回归和方差分析。

处理随机值之间的数学分析关系组成了相关分析的内容。相关分析具有重要意义，它可估计随机值变化的非随机程度。

后来出现了阐明随机值变化精确定量特性的高级阶段，即采用回归分析。这种回归分析综合了两种数学方法：众所周知的最小均方法和回归方程参数的统计估计法。

在田间进行试验的条件下，例如，用多因素方法研究施化肥时期和数量对产量的影响，研究者必须考虑与有限次试验结果有关的可控和不可控（取决于气候条件）因素的整体综合。在解决这种问题时，相关和回归分析不能得出应有的效果。

采用经典的回归分析来处理多因素受动试验结果通常不能导致问题的解决，这里必须指出下列情况：

1) 在受动的多因素试验中，误差估计是困难的。因此，不可能足够严格的进行所选数学模型试验结果的表象一致性的假设检验；

2) 不能建立剔出测量误差很大的数据的标准；

3) 独立变量 $X_1, X_2, \dots, X_K$ 或者它们中的一部分常常两两相关，因此，区分相应的效应是不可能的；

4) 在生产过程中，独立变量在很窄的数值范围内变异，在这种情况下，独立变量 $X_1, X_2, \dots, X_K$ 的测量与确定的非独立变量误差相比较，已具有不可忽视的误差。

在受动多因素试验中，非雪尔 (1958) 建议：评价试验结果不是用算术平均值，而是用抽样方差比较法，这种方法获得了方差法的名称，它也是一种统计的方法。用这种方法可把总方差分解为分量。方差分析的典型步骤，授引在 E. B 马尔柯夫和 A. H. 里欣克娃的著作中。

在解决精化度与多因素有关的优化过程问题时，常用试验规划法。首先，它的效果与因素总体变异的可能性相联系，其次，考虑它们当中的每一个对其余的相互作用的影响。

所用的主动试验法的基础应该认为是回归分析，这种回归分析的结果是获得被称为回归方程的某一预先给定幂次的多项式。

试验规划，这是一个研究的新途径，这种新途径回避数学方法的积极作用。而是基于所研究过程的固有行为，研究者选择为了控制试验的某一最佳决策。在数学语言上，试验规划可以表达成：在研究的每一步骤中，为了得到响应面的某一表象，需要在因素空间中选择最佳位置点。

本文内只讨论在可控条件下所采用的多因素主动试验，因素的变化规划在两个、三个和五个水平上。在独立变量在两个水平上

变异的条件下，一个经精心设计的规划形成了AUMNP算法语言，为了在独立变量的变异超过两个水平时得到模型，可采用对每个独立变量具有精确函数形式的多元回归。

(一) 多因素主动试验法

多因素试验基于最佳利用变量空间的设想。例如，在线性问题时(线性回归分析)，我们有K个独立变量(因素)X: $X_1, X_2, \dots, X_K$ ，形成K度空间(为了估计回归方程中的自由项，对它还需附加第K+1个虚设变量)。回归方程用下述公式描述：

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_K X_K \quad (1)$$

为了确定回归系数 β_i 的抽样估计 b_i 亦即 $b_i \rightarrow \beta_i$ 这个问题可用对每个变量进行变异的传统的单因素法来解决。如果对每个变量做n次重复试验，且如果变量只在两个水平上变异，亦即在+1和-1水平上，那么，回归系数的估计方差：

$$\sigma\{b_i\} = \sigma^2\{y\}/2n$$

这个数值与独立变量的总数无关，这是由于它们当中的每一个是分别进行研究的，而且 b_i 的数值决定于给定回归系数方差值的所有两次平均测量值。

如果利用另外的方案，即所有的变量变异成这样：用全部试验总体估计每一个效应，那么，与单独测量(K+1)次的方案相比较，估计方差可以减小，因为估计将依全部(K+1)次试验进行。

我们现举一例。问题的构成是称量三个对象A、B和C。研究者习惯于按表1所示的方案来称量这些对象。首先进行空载称量，这是为了确定重量的零点，然后，依次称量对象中的每一个。这个例子习惯上用于单因素试验。在这里分别研究每一个因素的行为。每个对象的重量只用两次试验结果来估计：放置所研究对象重量的试验和空载试验。例如，对象A的重量等于： $A = Y_1 - Y_0$ 。

$= \sigma^2\{Y_1 - Y_0\} = 2\sigma^2\{Y\}$ ，其中，Y—称量误差。

我们用另一方案来做这个试验，即给出规划模型，亦即表示在表2中独立变量的模型。

在这种情况下，试验1、2和3次是顺次称量对象A、B、C，而第四次是所有三个对象一块称量，不进行空载试验。

容易看出：每个对象的重量将由下述公式给出：

$$A = \frac{Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4}{2} \quad (2)$$

$$B = \frac{-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4}{2} \quad (3)$$

$$C = \frac{+Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4}{2} \quad (4)$$

表1

试验序号	A	B	C	称量结果
1	-1	-1	-1	Y_0
2	+1	-1	-1	Y_1
3	-1	+1	-1	Y_2
4	-1	-1	+1	Y_3

说明：+1 表示称量对象在预定的重量上
-1 表示对象没有重量

表2

试验序号	A	B	C	称量结果
1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	-1	-1	Y_2
3	-1	+1	-1	Y_3
4	+1	+1	+1	Y_4

公式(2)、(3)和(4)的分子可用A、B和C列元素乘最后一列元素的方法得到。我们指出：在计算时，在分子中包含了两次对象A的重量，因此，在分母中含有数值2。依上述公式计算对象A的重量，没有使对象B、C的重量畸变，因为它们当中每一个重量包含在重量A的公式中两次，且具有相同的符号。

现在，我们求出与称量误差相联系的方差，由方差特性导出：

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\left\{\frac{-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4}{2}\right\}$$

$$= \frac{4\sigma^2\{Y\}}{4} = \sigma^2\{Y\} \quad (5)$$

用类似的方法我们求得 $\sigma^2\{B\} = \sigma^2\{Y\}$ 和 $\sigma^2\{C\} = \sigma^2\{Y\}$ 。

可见：使用新方法比使用传统的方法所得的方差小两倍，尽管在两种情形下都进行四次试验。

在传统称量条件下，为了获得与第二种试验具有相同精度的结果，我们应将全部四个试验重复两次。在新方案中，每个重量的计算不是由两次、而是用全部四次试验的结果，由此，精度倍增。

第二个试验方案可以称为多因素方案，这种方案是这样来处理全部因素：即是为了依所进行一系列试验的全部结果来计算每个重量，随着独立变量的个数增加，试验因素的效果（从回归系数误差减小的意义上而言）增长。

我们假设，试验由 2^7 个规划组成，亦即 $K = 7$ ；此时，有七个独立变量在两个水平上，这七个我们所感兴趣的回归系数可以用通常的、传统的单因素法来估计。一个是做使所有独立变量在下限水平上的试验；再继续做 7 个试验，其中的每一个试验，依照变量中一个的次序向上限水平转移。对于第 i 次试验，这种试验法表示在图形上如图 1 所示。此时，我们得到具有方差 $\sigma^2\{b_i\} = 6^2\{Y\}/2$ 的回归系数。

按表 3 所给出的方案来进行试验，在试验总数相同的条件下，我们得到具有方差

$$\sigma^2\{b_i\} = \sigma^2\{Y\}/(K + 1)$$

$$= \sigma^2\{Y\}/8 \quad (6)$$

的回归系数。在给定情形下，获得了四倍的精度。

在新方案的试验配置下，在给定方差表

达式 (6) 的分母中，包含了总和 $K + 1$ ，其中 K 为独立变量的个数。由此得出，随着包括在试验中独立变量数目的增加，多因素试验的效果将增加 $K + 1$ 倍。

对多因素试验的效果可以给出几何解释。很清楚，在线性问题中，所研究的球面半径越大，则所确定的回归系数越准。

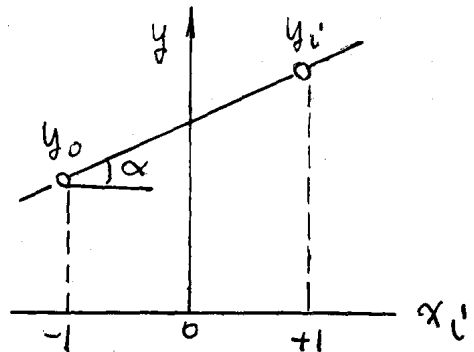


图 1 回归系数 $b_i = \operatorname{tg} \alpha$ ，用二次试验估计值 $b_i = (y_i - y_0)/2$

在单因素问题中，这一点易于用表示在图 2 的图形来研究。可以看出：如果进行测量的两点彼此靠得很近 (A)，那么，即使在试验中误差并不大，则在回归系数的估计中也将引起很大的误差。点越分开，在同样的试验误差条件下，回归系数的估计越精确 (B)。但是，在实际条件下，并不希望尽量增加所研究空间的半径，这里需要考虑两种情况的限度：1) 变异区间的边界往往是由进行试验的技术可能性硬性给定的；2) 正如我们所知，生物系统是非线性的，因此，随着变异区间的增加，线性逼近的可能性越加困难，出现了借助高阶多项式反映试验结果的必要性。

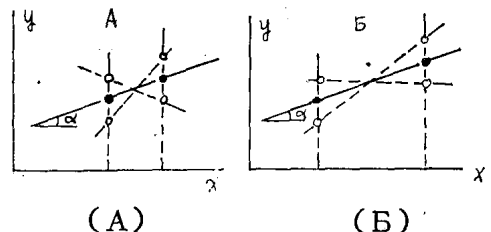


图 2 由测量点之间的距离研究回归系数 $b_i = \operatorname{tg} \alpha$ 的估计中误差关系的图形，涂黑点——真实值；圆圈——具有误差的值

在多因素规划中，所研究球面半径的增加不是由于每一变量的变异区间分别的增加，而是由于多度空间的特性。我们用三个独立变量来研究这个问题。若每个变量的变

表 3 的试验规划

试验序号	规 划								试验结果
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y ₁
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y ₂
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	Y ₃
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y ₄
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y ₅
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y ₆
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y ₇
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y ₈

异为两个水平，亦即 -1 和 +1，那么，所研究的空间的体积是一个有界的立方体，这个立方体的顶点由排列数(±1, ±1, ±1)给定。从图 3 不难看出：表示在表 4 中的规划，可用立方体顶点子集的点的坐标来给定，而且

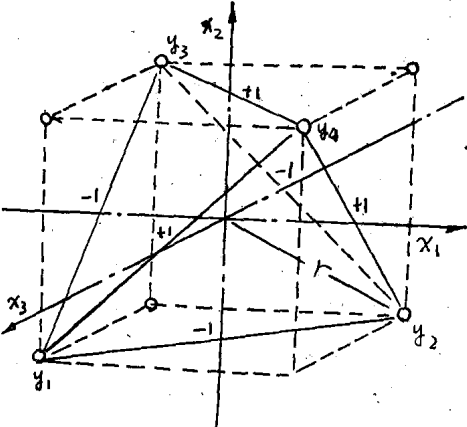


图 3 所研究独立变量空间给定边界的立方体

表 4 具有三个独立变量的试验规划

试验序号	规 划				试验结果
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	
1	+1	-1	-1	+1	Y ₁
2	+1	+1	-1	-1	Y ₂
3	+1	-1	+1	-1	Y ₃
4	+1	+1	+1	+1	Y ₄

形成了一个正四面体或者正单纯形。

我们围绕球面单纯形来进行描述。显然，它的半径等于 $\sqrt{3}$ 。对于具有七个变量的问题，我们可以同样来做。这里，规划用 7 度空间中正单纯形的顶点坐标给定，且所研究的球面半径 $r = \sqrt{7}$ 。我们看出：虽然每个独立变量的变异区间仍如先前一样，但是，随着独立变量个数的增加，所研究的球面的半径增大。这样，从传统的单因素试验转变到多因素试验，由于多因素空间的特点，我们增加了所研究空间的半径，从而提高了试验效果。

处理多因素试验结果的方案和算法在文献和专门的手册中已有叙述。

进行多因素试验和处理试验结果，由各自独立的步骤组合而成：

I. 选择最佳参数，其中包括：1) 从达到目的的观点来看的有效性；2) 通用性，亦即全面反映过程的特性；3) 定量性，亦即用一个数来表示；4) 统计效果，亦即具有不大的方差；5) 希望最佳参数有物理意义，且简单、易算。

II. 选择因素——系统的输入作用。因素是所采用的有一定意义的被测变量的数值。因素可以是定量的和定性的。因素的每一个可能值叫做水平，而水平的总体形成因素的定义域。因素应该：1) 可控性，这就是说，在因素的定义域内可以赋予任何值；2) 相容性，亦即在定义域内部可以实现任何水平的组合；3) 水平的规定精度应该超过最佳参数固有值的精度。

III. 模型选择。模型系响应函数的形式，即 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，选择模型则意味着选择这一函数的型式，写出它的方程式。

然后，为了估计这个方程式的系数值，提出规划并进行试验。因素的编排应考虑设备和对象的限制，且要作出试验规划模型，各种规划模型援引在试验规划的专门手册中。

试验以随机次序进行, 这种方法是为了消除系统误差所必须的。它叫做试验条件, 其应用在田间试验的条件下和保护土壤中。假设, 现在要求实现 2^{7-4} 次规划(表3)。在这种情形下需要以随机次序配置8个试验, 由随机数值表的任一位置起抄录作为8个数字中的第一个数字, 其中不包括已抄过的数和大于8的数。依据这种新方法进行的试验, 随机次序不应小于三次、在极限情形下不应小于两次重复。其次进行模型

$$\begin{aligned}\hat{y} = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ & + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 \\ & + b_{13}x_1x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 \quad (7)\end{aligned}$$

的参数计算。

模型的参数计算可以形成程序并上机计算。

B. B. 纳里莫夫和H. A. 切尔娃研究了在全因素试验(2^3)的条件下, 求得回归方程和它的均匀性检验的算法:

1. 依下述公式确定平均值和每一试验的方差:

$$\bar{y}_{11} = \sum_{j=1}^n y_{1j} / n \quad (8)$$

$$\begin{aligned}S_{11}^2 = & \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{y}_{11})^2 \\ & / (n-1) \quad (9)\end{aligned}$$

2. 计算KOXPEH标准值:

$$G = S_{i\max} / \sum_{i=1}^m S_i^2 \quad (10)$$

并进行方差一致性的假设检验。

检验以下述方法完成: 比较G和它的表中数值 G_{TAB} , 如果满足

$$G < G_{TAB} \quad (11)$$

那么, 则接受方差一致性的假设。

3. 计算所有试验复方差

$$S^2\{\bar{y}\} = \sum_{i=1}^m S_i^2 / m \quad (12)$$

4. 作出交互作用 x_{12} 、 x_{13} 、 x_{23} 、 x_{123} 表, 并依下述公式确定回归方程的系数

值:

$$b_{11} = \sum_{i=1}^m x_{1i} \bar{y}_i / \sum_{i=1}^m x_{1i}^2$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

5. 检查依方案所得到系数的方差贡献: 计算估计系数的方差

$$S\{b_i\} = \sqrt{S^2\{\bar{y}\} / n} \quad (14)$$

对它的每一个系数, 依下述公式确定t标准值

$$t_j = b_j / S\{b_j\} \quad (15)$$

把t的标准值与其表中的数值 t_{TAB} 比较, 如果满足下述不等式

$$t_j > t_{TAB} \quad (16)$$

则认为系数是显著的。倘若这个不等式不满足, 则相应的系数认为等于0。

6. 形成回归方程, 并依F标准检查它的均匀性:

$$F = S_{A\Omega}^2 / S^2\{\bar{y}\} \quad (17)$$

对于均匀性假设检验的方差值 $S_{A\Omega}^2$ 可按予定的公式计算:

$$S_{A\Omega}^2 = \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - y_{PACH})^2 / (m - e) \quad (18)$$

其中

y_{PACH} 为由回归方程求出的因变量值;
 e 一方程中系数显著的数目。

均匀性检验以比较计算值和F标准的表中值的方法来实现, 如果满足

$$F < F_{TAB} \quad (19)$$

则接受方程均匀性的假设。

作为例子, 对玉米作物我们来求出回归方程并估计它的均匀性。假定有三个独立变量: 照度 x_1 , 空气温度 x_2 , 二氧化碳浓度 x_3 。且使它们在两个水平上变异。并且上限定为+1, 下限定为-1。照度 x_1 在25~55个单位内变化, 相应地第二个因素, 即空气的温度在26~35℃的范围内变化。第三个因素

是作物栽培室中二氧化碳的浓度。二氧化碳的含量为体积的0.18%定为-1, 而含量为体积的0.36%定为+1。作为因变量 Y 取作物表面光合作用的强度。

容易看出: 如果组成8种试验, 则对变异在两个水平上的三个因素的所有可能组合将全部用完, 正象表5所表示的那样。作为回归方程的经验模型是静态的, 那么, 试验点的测取必须在因素 x_1, x_2, x_3 的稳态下和作物气体速度 Y 的稳态响应下进行。因此, 作物的状态设备和响应记录必须经30分钟进行。具有两次重复的 2^3 规划的试验持续时间约为8~9个小时。为了确定回归方程和检验它在全因素试验条件下的均匀性, 设计了МИР-1型计算机АЛМИР语言程序。上述

部分应写成:

$N = n$ ——试验中的并行观测数;

$M = m$ ——试验数;

$F_{TAB}, G_{TAB}, T_{TAB}$ ——相应地标准中的查表数值 (F 标准和 G, T 标准):

$Y[m, n]$ ——并行观测数组;

$X[m, n]$ ——独立变量数组;

$B[m], Y_{cp}[m]$ ——回归方程系数和平均值的工作单元, 以及其他等等。

解题的结果, 得到了与照度 x_1 和二氧化碳浓度 x_3 相联系的光合作用强度 Y 的线性方程式 (图4):

$$Y = 242 + 99.6x_1 + 38.3x_3 \quad (20)$$

其中因素变化的范围是:

$$-1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1$$

```
N = 2; M = 8; GTAB = 0.998; TTAB = 2.31; FTAB = 4.1; Y(8, 2) = 99, 89, 350, 330,
99, 82, 98, 305, 223, 240, 403, 370, 165, 165, 325, 375;
X(8, 8) = 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0,
1, -1, 1, -1, 0, 0, 0, 0 1, 1, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1,
-1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0 1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -1,
1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0;
B(8); Ycp(8); S2(8); T(8); YPAC(8);
X(8, 8) "结束"
```

解

方差

$$S^2_{YCP} = \cdot 296_{10^3}$$

B(8)

$$\cdot 242_{10^3} \quad \cdot 996_{10^2} \quad 0 \quad \cdot 383_{10^2} \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$S^2_{AD} = 1.04_{10^3} \quad F = \cdot 351_{10^1} \quad S_{OCT} = \cdot 322_{10^2}$$

图4 2^3 规划在АЛМИР计算机上的解

表5 玉米作物的规划表和试验结果

试验序号	x_0	x_1	x_2	x_3	并行观测	
					y'	y''
1	1	-1	-1	-1	99	89
2	1	+1	-1	-1	350	330
3	1	-1	+1	-1	99	82
4	1	+1	+1	-1	298	305
5	1	-1	-1	+1	223	240
6	1	+1	-1	+1	403	370
7	1	-1	+1	+1	185	185
8	1	+1	+1	+1	325	375

x_1 和 x_3 的系数表征了在给定值增加,其余数值固定的条件下光合作用强度的变化。例如,当 x_1 增加一个单位, y 增加99.6个单位,而当 x_3 增加0.1, y 增加3.83。

方程式(20)按F标准是均匀的。而 x_2 的系数(空气温度)按T标准是不显著的,即为0,因此,在方程式(20)中不包括温度因素 x_2 。 x_2 的系数不大是与温度变化范围不大相联系的。如果因素 x_1 变化120%,因素 x_3 变化100%,那么,因素 x_2 只变化36%。正如罗斯所指出的:由于光合作用和呼吸作用与温度的相依关系互相补偿,所有作物的表面光合作用与在宽范围内变化的温度关系很小。因此,为了计及温度的影响,必须增加因素 x_2 的变化范围,或者增加包括公式(14)中的重复次数。

方程式(20)的几何解释表示在图5中。其中独立变量 x_1 和 x_3 的变化用标准比例尺表示。这些变量的变化以真实比例表示的方程式有其方便之处。

向真实比例尺换算以下述公式来实现:

$$X^{*i} = \frac{\frac{X_{i\max}^* + X_{i\min}^*}{2}}{\frac{X_{i\max}^* - X_{i\min}^*}{2}} \quad (21)$$

其中 x_i^* ——以真实比例尺测量的第*i*个变量的数值;

x_i ——以标准比例尺测量的第*i*个

变量的数值。

对方程式(20)的 x_1, x_3 有:

$$X_1 = \frac{x_1^* - 40}{15} \text{ 和 } x_3 = \frac{x^* - 0.27}{0.09} \quad (22)$$

将(22)式中的变量值代入方程(20),有:

$$y = -138.5 + 6.64x_1^* + 4.25x_3^* \quad (23)$$

其中

$$25 \leq x_1^* \leq 55 \text{ 和 } 0.18 \leq x_3^* \leq 0.65 \quad (24)$$

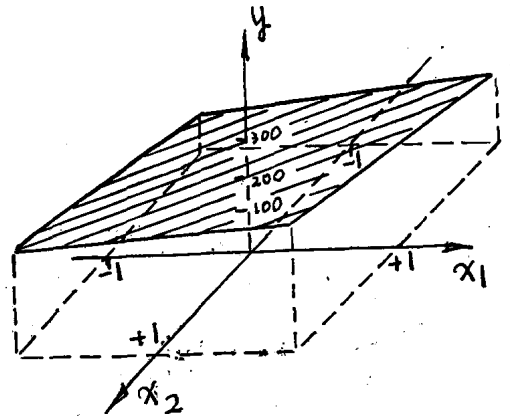


图5 函数 $y = f(x_1, x_3)$ 的定义域

表示在表6和图6中的试验结果,指出了光合作用强度(y)的变化与照度(x_1)的变化和二氧化碳浓度变化(x_3)的关系。在进行试验区间(24)中,光合作用强度 y

表6 x_1^* 和 x_3^* 在(24)的变化范围内光合作用强度(y)的变化

照 度		二氧化碳浓度		光合作用强度
НОРМ	НАТ	НОРМ	НАТ, %	НАТ, ОТН. ЕД
-1	25	-1	0.18	104.1
+1	55	-1	0.18	303.3
-1	25	+1	0.36	180.7
+1	55	+1	0.36	379.9

说明: НОРМ——标准比例尺; НАТ——真实比例尺, ОТН. ед——单位

的最大值，在照度 x_1 等于55个单位和二氧化碳的浓度等于体积的0.36%的一点处获得。

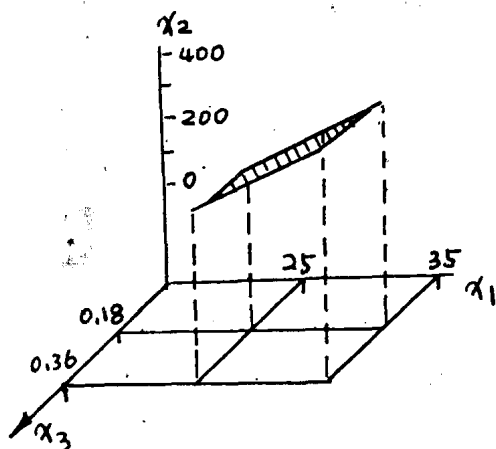


图6 真实比例函数 $y = f(x_1^*, x_2^*)$ 的定义域

用最小均方法建立数学模型

现在只对形如二阶多项式的非线性模型设计的比较详细。二阶曲面易于进行分类。为了描述二阶多项式的响应曲面，在规划中的独立因素应该不少于三个不同的值。

在生物试验中往往不可能准确知道非线性模型或者采用二阶规划。在这种情形下，作为相应模型的标准采用经验结果，即采用实际值与计算值偏差的最小平方总和。可以实现这个标准的计算程序叫最小均方法，而在这个基础上得到的研究过程和辅助统计叫回归分析。计算结果使我们得到了形为多元非线性回归的方程式。

选择最小均方法来估计由一个方程式构成的回归模型的参数时，我们假设它满足一系列条件，即保持估计的无偏性、信度和所计算的结构系数的有效性。例如，若

1—抽样观测数， $l = 1, 2, \dots, L$ ；

A—未知参数 x 的估计向量；

M—数学期望的符号。

那么，由最小均方法所得参数估计的上述特性可以描述如下：

a) 每个 l 的无偏估计 $M(A) = \alpha$ ；

8) 信度，即当 $L \rightarrow \infty$ 时，对任意小的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \{ |A - \alpha| < \varepsilon \} = 0,$$

$$L \rightarrow \infty$$

亦即， A 依概率趋于其真值 α ；

B) 对所有无偏估计的有效性

$$CoV\{A\} = M\{[A - \alpha][A - \alpha]^T\} \leq CoV\{C\},$$

或

$$\det [CoV\{C\} - CoV\{A\}] \geq 0.$$

无偏估计、信度和所有计算结构系数的有效性，在下述条件下可得以保证：

1) 因素，即宗量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 不是随机变量；

2) 随机被加数 ε_i 的数学期望为0，或者为常数，或者为上述变量 $x_{1i}, \dots, x_{ni}$ 数值的某一未知函数；

3) 独立观测之间缺少相关和自相关；

4) 随机被加数与上述变量之间不相关；

5) 隐含变量的数学期望可以表成下述形式： $f(x, A)$ 。如果满足等式

$$f(x, A_1 + A_2) = f[(x^{(1)}, A_1)] + f[(x^{(2)}, A_2)],$$

对 A 而言，函数 $f(x, A)$ 叫做线性的。

在实际研究中，这些条件往往不可能满足，因此，必须讨论这些条件遭到破坏时的后果。

在第一个条件受到破坏时，利用最小均方法所得到的估计特性发生了变化，特别是对小样本来说，它可能发生偏移，但估计仍可保证信度。在样本容量增加时，它的有效性增加，偏移减小。

在第二个条件受到破坏时（满足第一条条件），尽管其有效性减少，但不影响参数估计的偏移，若已知函数 φ_i ， S_i^2 依观测序号而变化，那么，最小函数 F 可以表示成显式的形式，且利用最小均方法对表达式的最小

值可以写成:

$$F = \sum_{i=1}^L \frac{1}{\varphi_i} (Y_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ji})$$

若所估计的回归方程的随机被加数之间有关,那么,尽管有效性减少,但参数估计不致偏移。

第四个条件的破坏是由于自身偏移和参数估计不可靠而引起的。在变量模型确定不正确的情况下,通常出现相关。因此,必须求出这些变量,并将其包入在模型中。

我们研究第五个条件的实质。在统计学中,参数的非线性和变量的非线性是有区别的。第二种形式的非线性也叫做曲线回归,而且,通常不排除应用最小均方法的可能性。用代数变换和变量的替代可以转化为通常线性形式的回归方程,叫做参数的非线性。例如,如果我们研究的函数为

$$Y = a_0 \cdot X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \quad (25)$$

很显然,这个方程是非线性的,在这种情形下也易于利用最小均方法,事实上,如果将方程的两边取对数,则

$$L_n Y = L_n a_0 + a_1 L_n x_1 + a_2 L_n x_2$$

且若表示:

$$L_n Y = Z, L_n a_0 = A_0, L_n x_1 = V_1,$$

$$L_n x_2 = V_2,$$

那么,方程式(25)可改写成:

$$Z = A_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2$$

为了估计这个方程式的参数,容许用最小均方法,在缺少多元回归方程形式信息的情形下,通常以选择和代换它以特有某一给定均匀性方差的各种函数,或者给定回归方程的误差。显然,用这种主观选择函数的方法,或者不能达到给定的方差,或者所选函数是无界的。

多元非线性回归方程中 函数形式的确定

多元非线性回归方程具有下述形式:

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (26)$$

其中 n ——因素的个数;

$f_i(x_i)$ ——联系因素 x_i 的特征与结果 y 特征的任一形式的函数。

f_i 的函数形式是必须确定的。它可用逐步逼近法来完成,这种方法的实质在于:除了依确定函数 f_i 较为准确形式的一个因素以外,消除所有因素的影响,在全相关分析的基础上,计算联系变量 y 与因素 x_i 的净回归曲线 $y^* = f_i(x_i)$, 且画出这个曲线,以图形目测法给出所选函数 f_i 的基数。

首先,依试验数据用最小均方法进行回归方程

$$y' = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (27)$$

系数的计算。再依每次观测值进行剩余值 Z_j 的计算,为此,向方程式(27)代入单独的观测值,得:

$$Z_j = y_j - y_j' = y_j - (a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_{ij}) \quad (28)$$

其中 i ——因素序号; j ——观测序号;

y_j ——因变量 y 的原始值;

y_j' ——按回归方程的估计值。

其次,确定 m 个相应于第一因素变化的新的结果变量 y^{**} 。为此,向方程式(27)代入所有其余因素的平均值。

对于第一、第二独立变量有:

$$y_{1j}^{**} = Z_j + (a_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_n \bar{x}_n) \quad (29)$$

$$y_{2j}^{**} = Z_j + (a_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_n \bar{x}_n) \quad (30)$$

其中 $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_n$ ——每个样本独立变量的平均值;而在园括号中的表达式是对每个因素原始因变量 y 的净回归直线方程:

$$(a_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_n \bar{x}_n) = A + b_1 x_{1j} \quad (31)$$

我们所研究的 m 个变量 y_{1j}^{**} 的数值只与变量 x_1 有关（其余因素的作用已消去），用这些数值和间距 K 我们建立相关表，且按此表计算回归线 y_{1j}^{**}/x_1 对第二个因素计算回归线 y_{2j}^{**}/x_2 和其他等等。

用这些点画出平滑曲线图，以一次近似得到了所要求的函数曲线 $f_1(x)$ ，这是因为，在确定函数时假设其余变量只是纯正比作用。以目测分析图形 y_{1j}^{**}/x_1 ，给出我们所设想的 y 和 x_1 之间解析关系形式的全部基数，用此来组成回归方程形式。

因此，以精确曲线构成的多元非线性回归方程的完整形式，可用原始变量函数变换的方法转换成线性形式。

作为例子，我们研究光合作用强度与第三叶期的黄瓜作物的照度和空气温度相联系的回归方程。试验中，照度 x_1 在 25~50 个单位的范围内变化（1 个单位 = 10 瓦/米²），空气温度 x_2 在 24~35 °C 的范围内变化。土壤温度和二氧化碳浓度保持恒定。

试验结果用精确的函数形式的程序，在 МИР-1 型计算机上进行处理。

在上述程序中必须引入：

$N = n$ —— 独立变量数（因素）；

$B = m$ —— 样本的观测数；

$KK = k$ —— 相关表的间距数；

$X[n+1, m]$ —— 原始数据的二维数组，且在数组的最后一行存贮因变量的 m 个值；

$P[n]$ —— 多元回归方程系数的工作数组；

$M(n+1)$ —— 每个样本均值的工作数组；

$V[k], Y[k]$ —— 相关表的形成和经验回归线 $f_1(x_1)$ 的工作数组；

$A[n+1, n+1]$ —— 线性方程组的工作数组。

解题的第一部份是用最小均方法作多元回归线性方程系数的计算。用最小均方法组

成的线性方程组以正交法来求解。这里同样也进行多元回归的统计估计：均匀性方差的估计—COOB；多元判决系数— R_2 和多元相关系数—RM 的估计。

解题的第二部份是求出函数的精确形式 f_{1j} （对于每个因素）。

在 x_2 为均值的条件下， y 与 x_1 的图形关系（图 7）为平方抛物线形式，而在 x_1 为均值的条件下， y 与 x_2 的关系具有复杂的非线性函数形式（图 8）。

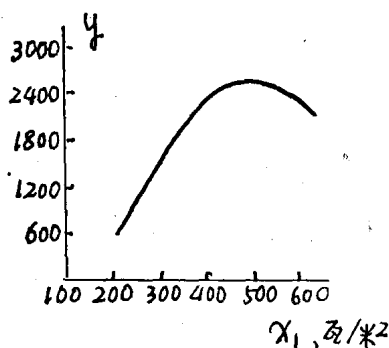


图 7 在温度为均值的条件下，表面光合作用与照度的关系

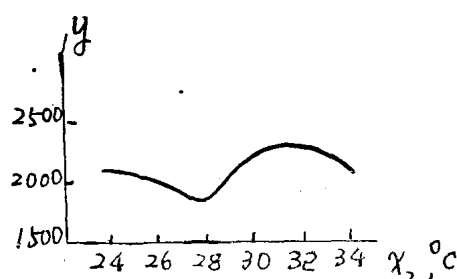


图 8 在照度为均值时，表面光合作用与温度的关系

选择函数 f_{1j} （对每个因素）以后，用消去未知因素的多元回归程序来处理，我们可以得到形为非线性多元回归的联系方程。

线性多元回归方程式具有下述形式：

$$y = -45.4 + 54.109x_1 + 4.5358x_2 \quad (32)$$

$$COOB = 382.6$$

$$R_2 = 0.738$$

$$RM = 0.895,$$

而选择函数 f_1 和处理以后的非线性多元回归方程式为:

$$y = 306.82 + 136.42x_1 - 1.717x_1^2 - 98.96x_2 + 2.01x_1x_2 \quad (33)$$

$$COOB = 262.1$$

$$R_2 = 0.86$$

$$RM = 0.93.$$

它与F标准一致 ($F = 7.6$; $F_{TAB}(0.05, 31, 27) = 1.86$)。

方程式 (32) 和 (33) 的统计比较指出: 1) 方程式 (33) 的均匀性方差减小1.5倍; 2) 判决系数增加到0.86; 3) 多元相关系数增加到0.93。

回归方程的静态优化

依据作物栽培室中的试验结果和用消去未知因素的多元回归分析所得信息进行处理的方法, 可获得玉米和黄瓜作物的非线性方程式。

对出土14天的玉米:

$$x_1 = -3266.6 + 197.3x_2 - 2.5x_2^2 + 2753.8x_3^2 + 0.25x_4^2, \quad (34)$$

其中: x_1 —光合作用强度;

x_2 —照射强度;

x_3 —二氧化碳浓度, %;

x_4 —空气温度, $^{\circ}\text{C}$ 。

因素 x_2, x_3, x_4 在下述范围内变化:

$$25 \leq x_2 \leq 45; 0.15 \leq x_3 \leq 0.3; 27 \leq x_4 \leq 37 \quad (35)$$

对出土22天的黄瓜:

$$x_1 = -5973.6 + 0.132x_2^2 - 32096x_3 + 74678.5x_3^2 + 0.596x_4^2 + 890.6x_5 - 20.44x_5^2 \quad (36)$$

其中 x_1 —光合作用强度;

x_2 —照射强度;

x_3 —二氧化碳浓度, %;

x_4 —空气温度, $^{\circ}\text{C}$;

x_5 —土壤温度, $^{\circ}\text{C}$ 。

因素 x_2, x_3, x_4, x_5 在下述范围内变

化:

$$25 \leq x_2 \leq 45; 0.15 \leq x_3 \leq 0.3; 27 \leq x_4 \leq 37; 16 \leq x_5 \leq 27. \quad (37)$$

所提出的问题是: 为了 x_1 在因素变化空间中具有最大值和最小值, 确定 x_2, x_3, x_4, x_5 的数值。

方程式 (34) 和 (36) 是某些变量的函数, 为了优化问题的解, 可以利用数值法, 因为利用偏微分法求得多元函数的极值, 是在因素变化空间的内部, 而在一般情形下, 极值可能在多度空间的边界处。

数值法之一是在给定区域内局部极值的随机搜索法, 这个方法用来搜索依赖于N个参数的凸函数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (38)$$

的条件极值, 在约束为下式的条件下:

$$d < y, \quad (39)$$

其中 $d = \text{常数}$ 。

搜索在N度容许区域 $R^{(N)}$ 内进行:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\leq x_1 \leq \beta_1 \\ \alpha_2 &\leq x_2 \leq \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_K &\leq x_K \leq \beta_K \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_N &\leq x_N \leq \beta_N \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

问题在于寻找这样一个向量 $x^* =$

$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$, 使函数 (38) 在容许区域 (40) 内达到极小, 亦即

$$y(x^*) = \min y(x) \quad (41)$$

在约束为 (39), (40) 的条件下。

在给定区域内, 寻找函数的局部极值借助于迭代搜索法来实现。

初始点 $x^{(0)}$ 的坐标依下述公式来计算:

$$x_i^{(0)} = (\alpha_i + \beta_i) / 2 \quad (42)$$

其中 α_i 和 β_i ——参数 x_i 的下限和上限。

在变量空间中($R^{(N)}$), 沿随机方向跨步搜索:

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \Delta x^{(n+1)}, \quad (43)$$

其中 n —步长序号;

$\Delta x^{(n+1)}$ ——在空间 $R^{(n)}$ 中的步长。

如果新的一点较好, 亦即满足条件 (40), 那么, 对它计算最小函数值。

如果在新的一点最小函数值满足所提出的要求, 亦即它小于它前一点的数值, 那么, 新的随机步长从该点跨出。假如不满足要求, 则新的步长仍从前一点跨出, 亦即返回一个步长进行迭代。这意味着

$$\Delta x_{i,1}^{(n+1)} = \begin{cases} h_i \varepsilon_i, & \text{若 } y_n < y^{n+1} \\ -\Delta x_{i,1}^{(n)} + h_i \varepsilon_i, & \text{若 } y_n \geq y^{n+1} \end{cases} \quad (44)$$

其中 y^{n+1} ——前 $n-1$ 步搜索后函数的最小值;

$h_i = (\beta_i - \alpha_i)/4$ ——步长值;

ε_i ——正态分布的随机数。

只有在满足 (39) 和 (40) 所有条件时, 方可过渡到新的一点。

如果向新的一点过渡时, 不适宜的步长已超出了某一预先给定的数值 T , 那么, 步长 h_i 的长度将减少一半, 不适宜步长推荐为 $20 \sim 30$ 。

当 $h_i < \varepsilon_i$ 时, 搜索停止, 该处的计算精度为:

$$\varepsilon_i = (\beta_i - \alpha_i)/2^p, p = 8 \sim 10 \quad (45)$$

方程式 (34) 在 (35) 的范围内和方程式 (36) 在 (37) 范围内的优化结果列于表 7 中。

表 7

培育玉米和黄瓜作物状态的优化结果

作物和品种	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{lmax}
						X_{lmin}
玉米, ГИБРИД	max1163.5	36.6	0.3	37.0	—	3.5
和 БУКОЗ	min333.5	25.0	0.15	27.0	—	
黄瓜	max46.2	40.0	0.3	33.7	21.5	3.4
АЛМа	min13.7	25.5	0.21	27.0	18	

方程式 (34) 和 (36) 的优化结果证明: 在所研究的区域 (35) 内, x_3 和 x_4 的变化范围, 对玉米来说不可能确定绝对优化条件, 但是, 加温设备比玉米少的黄瓜包括在优化区中。

(二) 作物光合作用的生产率和生产率模型

当前, 对于产量规划问题给予很大的注意, 在这方面取得了一定的成就。因为大多数环境因素的时间进程, 在田间试验的条件下是不可控的, 那么, 基于不考虑环境参数与其均值的短暂偏差的预测, 产量规划的研究法可以作为大多数长期作用的农业技术措施应用的基础。

由于在保护土壤的作物栽培中, 大部分因素可以维持在给定的水平上, 那么, 在这

种条件下, 不仅可以采用长期作用的农业措施来规划产量, 并且以保持作物光合作用活动最佳条件为目的的环境因素也是连续可控的, 特别是对于有机因素的补偿, 如在温室中冬季的光照。

在研究者拥有依据试验规划来改变外界环境因素水平的人工气候设备的情况下, 为了确定最佳区可以采用坡度法。这种方法可不用过程的模型直接求出对象的最佳条件。其典型方法是同时只有一个因素变化, 高斯法和梯度法皆属此例。在多因素规划中, 所有因素同时变化, 优化问题可分两步: 进入最佳区消耗时间最少和求出最佳近似曲面的数学描述。

在可调照度和温度状态的条件下, 阐明培育作物最佳化的一系著作中指出了: 在试验点调整生产率与环境因素相联系的特性。

但是, 在这里, 当调整投资显著变化的条件下, 所得生产率的增加量是无限小。

若将作物看作多参数系统, 那么, 作为控制标准, 选择易于在解析关系上联系外界环境的每一因素和系统有效输出的参数, 那将是十分方便的。

选择控制标准以后, 还必须得到联系输出参数与外界环境因素的方程式, 因为有效方程式只当客观存在的规律表示为数学描述的形式时才是可能的。

在这一节, 我们研究不要求模型原始知识的坡度法和基于利用模型应用在保护土壤中的拉格朗日法, 除了控制方法而外, 我们还论述获得表面光合作用生产率与环境因素关系的方法, 亦即生产率模型。

坡度法方程式

以寻求极值为目的, 在研究响应曲面的条件下, 坡度法的设想是: 在小批量试验的基础上, 在某一初始区域中, 用线性模型求出响应曲面的局部描述。在区域的中心计算线性近似梯度, 且在梯度方向上, 亦即在最快爬升方向上进行到达置有极点的区域的试验。若在区域中心所求的线性近似梯度与运动方向上某一点的梯度值不同, 那么, 可以求出这一点曲面的新的描述, 并计算新梯度值。在特定的区域中, 当线性模型不适宜时, 可应用二阶和三阶多项式。

方法对二维情形表示在图9中。连续函数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

的梯度向量具有下述形式:

$$\text{grad } y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} i + \frac{\partial f}{\partial x_2} j + \dots \right) \quad (46)$$

这个向量垂直等水平 $y = \text{常数}$ 的曲面, 且指出了最快爬升方向 (图9)。在 (46) 中, i, j 为变量 x 轴的单位向量。

如果模型是线性的, 即

$$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad (47)$$

那么, 系数 a_i 是梯度向量的坐标。

若使因素正比于所求的估计系数 $\hat{a}_i$ 变化, 那么, 便可使在最快爬升方向的运动近似于最佳运动。梯度分量和规格化梯度为:

$$\frac{\text{grad } y}{|\text{grad } y|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} i + \frac{\partial f}{\partial x_2} j + \dots}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}} \quad (48)$$

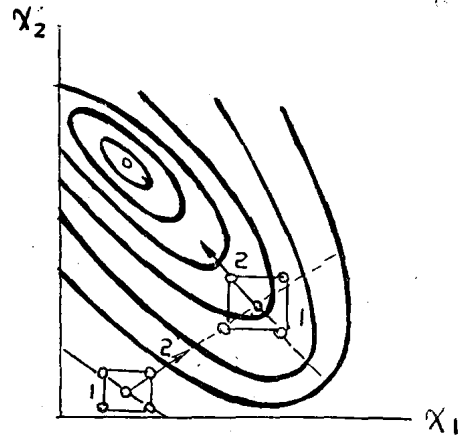


图9 坡度法策略

1—线性模型的试验规划; 2—梯度的线性近似;
3—固定区。

试验上所得线性模型与基准的选择和变量的变异有关, 选择变量变异间距时, 必须使系数值具有相同的量级。在这种情形下, 正如B、H马克西莫夫指出的, 采用坡度法是有效的。

方法的实现包括下述步骤:

1. 在局部区域中建立线性模型

假设试验从距最佳点足够远的一点开始, 因此, 为了在始点周围描述响应曲面, 可以应用线性模型。借助多因素规划可以求出观测点, 并计算系数的估计。在这一步完成了结果的静态分析。

2. 每步改善整个函数值

为了向最佳方向运动, 直到最后一次试验以前, 必须计算梯度方向和确定步长的数值。沿梯度方向, 第 i 个观测点的坐标依下

式求出:

$$x_i^1 = x_i^{1-1} + \lambda \hat{a}_i \quad (49)$$

其中 $\hat{a}_i$ ——第 i 个系数的估计;

λ ——沿梯度方向运动的步长的约定值;

X_i ——因素的规定值;

对于第 K 个因素的步长值 λ_K 由物理含意来选择, 并将其表示成实际的单位, 之后, 计算:

$$\lambda = \frac{\lambda_K}{\Delta_K |\hat{a}_K|}, \quad (50)$$

其中 Δ_K ——变异间隔 ($\Delta_K = \frac{1}{2}$

$$(x_{K\max} - x_{K\min})).$$

为了依据其余变量, 以实际单位确定步长数值, 可用下述公式:

$$\lambda_i = \lambda |\hat{a}_i| \Delta_i \quad (51)$$

在这种条件下, 所得步长值 λ_i 的相互关系如同数值 $\hat{a}_i \cdot \Delta_i$ 的数模的相互关系一样, 亦即:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = |\hat{a}_1 \Delta_1| : |\hat{a}_2 \Delta_2| : \dots : |\hat{a}_n \Delta_n| \quad (52)$$

方法的实现

利用坡度法是要用改变下述变量:

x_1^* ——光照强度 (1 单位 = 10 瓦/米²);

x_2^* ——二氧化碳浓度, %;

x_3^* ——空气温度, °C

的方法来确定黄瓜达到最大光合作用生产率的条件。因素的变异水平, 规划表, 试验结果, 和系数的计算值表示在下表的方案中。

设置在作物栽培室中的作物, 照度的变化范围 (x_1^*) 从 20 到 30 个单位, 二氧化碳浓度 (x_2^*) 从体积的 0.12 到 0.30%, 空气温度 (x_3^*) 从 22° 到 28°C。基准组成: 对照度为 20 个单位, 对二氧化碳浓度为体积的 0.21%, 对空气温度为 25°C, 土壤温度和

规划和试验结果

说 明	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\hat{Y}$
基 准	25	0.21	25	
变 异 间 距	5	0.09	3	
上 限 水 平	30	0.30	28	
下 限 水 平	20	0.12	22	
规 定 值	x_1	x_2	x_3	
试 验				
1	-1	-1	+1	542
2	+1	+1	+1	834
3	-1	+1	-1	546
4	+1	-1	-1	606
$\hat{a}_1^1$ ($\hat{a}_0 = 632$)	88	58	56	
变 异 间 距	440	5.0	168	
x_2^* 以 0.1 为步长变化	8.0	0.1	3.36	
步 长 值	10	0.1	3.4	
在坡度方向上试验	x_1^*	x_2^*	x_3^*	
5	35	0.31	28.4	910
6	45	0.41	32.0	1216
7	55	0.51	35.5	1250
8	60	0.56	36.5	1520
9	65	0.61	38.5	1430
10	57	0.54	34.0	1190
11	47	0.44	25.5	866

说明: x_i^* ——实际单位的因素值。

空气湿度维持恒定。

规划由两个水平组成, 且试验以两次重复进行。根据试验结果计算联系生产率 Y 与环境因素: 光照 x_1 , 二氧化碳浓度 x_2 和空气温度 x_3 的线性方程式系数, 得到的方程为:

$$Y = 632 + 88x_1 + 58x_2 + 56x_3$$

然后, 对每个因素的变异间距, 确定系数 x_1 、 x_2 、 x_3 的乘积。由物理含意, 步长的变化取为 0.1、且依公式 (50) 计算在梯度方向上运动步长的约定值, 亦即

$$\lambda = \frac{\lambda_K}{\Delta_K |\hat{a}_K|} = \frac{0.1}{5} = 0.02 \quad (53)$$

之后, 根据其余变量, 以实际单位(51)

计算步长值 λ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right| \Delta_1 = 0.02 \cdot 440 = 8.8 \\ \lambda_3 &= \lambda \left| \frac{\partial w}{\partial x_3} \right| \Delta_3 = 0.02 \cdot 168 = 3.36 \end{aligned} \right\} (54)$$

最后, 利用试验规划基准的变化, 对计算步长值来完成试验。第7次试验之后, 每个变量的步长值减小约为两倍, 如把第2次与第8次试验比较, 可以看出: 生产率增加约为2倍。因此, 在四步以后将保证进入最佳区。

拉格朗日法的方程式

在计算环境对作物生产率的影响和考虑环境因素调节的消耗时, 问题将导致多参数系统的最优控制。栽培室作物和温室作物, 环境因素: 光照强度和二氧化碳浓度等的改变的可能性是有限的。

例如, 有作物某一生产率指标 W 。决定二氧化碳的吸收速度的光合作用强度以及在营养末期的作物产量可以使用这个指标。生产率的数值依据一系列外界环境因素 x_i , $i=1, 2, \dots, n$, 的变量值而改变。因素的各自联合值可以写成矩阵形式:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & x_{13}^* & \dots & x_{1m}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & x_{23}^* & \dots & x_{2m}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & x_{n3}^* & \dots & x_{nm}^* \end{pmatrix} (55)$$

与其相应的生产率值:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* & w_{13}^* & \dots & w_{1m}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* & w_{23}^* & \dots & w_{2m}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1}^* & w_{n2}^* & w_{n3}^* & \dots & w_{nm}^* \end{pmatrix} (56)$$

在矩阵(55)和(56)中有试验序号 $j=1, 2, \dots, m$, 其目的是为了得到矩阵的元素值。利用回归分析法, 我们得到了作物的生产率为生态因素函数的方程式:

$$W = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) (57)$$

函数(57)达到最大值的必要条件是:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = \dots$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0, (58)$$

以及在充分条件下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \leq 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \leq 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \leq 0 \dots \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} \leq 0 \end{aligned} (59)$$

在具有特性(58)的函数(57)的最大值区域内, 每一个生态因素变化一个有限增量, 函数的增量为无限小。这就意味着, 无论因为因素的增量进行怎样的耗费, 而生产率增加的效果却近于0。

因此, 调整与消耗相联系的生态因素的变化企图达到生产率的最大值是没有意义的。作为作物生产率调节的目的应该认为是函数 $W = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 比这个函数的最大值小。但是, 生产率函数的最大值可用来确定生态因素容许值的范围, 这时, 解方程组(58)可得因素 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的极限估计值。

作为作物生产率调节的整体函数可以取最大生产率, 这个最大生产率的增量等值于为调节外界环境因素所消耗的增量。在这里, 必须使因素的增量与生产率的增量有相同的度量单位。因为可以用能量和重量的单位进行度量, 而最通俗的度量形式只可能是价值度量单位。

若第 i 个因素的增量单位为 K_i 个货币单位, 那么, 函数(57)可以写成:

$$KW = F(x_{10} + K_1 x_1, x_{20} + K_2 x_2, \dots, x_{n0} + K_n x_n) (60)$$

其中 K —生产率的价值单位;

$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ —因素的自然值;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ —因素的可调部分;

$K_1, K_2, \dots, K_n$ —因素可调部分的价值单位。

在合理提高作物生产率的限度内, 生产率价值的偏增量和因素可调部分价值的偏增量应满足等式: