力　学

（試用教材）

下册

吉林师范大学物理系力学教研组

下 册 目 录

第三篇 连续介质力学

第三篇 連續介質力学

在前几篇里，我们把物体看成"刚体"，也就是认为在外力作用下，物体的几何形状和尺寸不发生变化。实际上，所谓"刚体"，在自然界中并不存在。由实验知：任何物体在外力作用下都将变形，也就是它的几何形状和尺寸总有些改变，而且最后可能破坏。

在刚体力学中，我们研究物体平衡及运动问题的一般规律。物体的微小变形对于平衡及运动问题来讲是一个次要因素，可以不加考虑。所以采用"刚体"这个抽象概念来把真实物体的性质加以简化，以利研究。但在生产实践中，分析材料的强度，刚度等力学性质时，物体的变形却是主要因素之一，因此必须加以考虑，而不能忽略。所以此时刚体这一概念已不适用，一般，应按变形体来处理。

不同形态的物体——固体、液体、气体其形变性质不同。固体具有一定的几何形状。在外力作用时，形变和外力的大小有确定的单值关系。外力撤去后，形变完全消失，物体恢复原状。物体的这种形变称为弹性形变。但在较大的外力作用时，虽然形变与外力仍有一定的关系，但外力撤去后，形变将部分的保留，物体不能恢复原状。这种形变称为塑性形变。

液体与气体跟固体有显著的差别。它们没有固定的形状（随容器变），具有易流动性，即在很小的外力作用下也能发生形状的改变。因此，液体和气体统称为流体。

处理变形体的机械运动的学科叫变形体力学。在变形体力学中我们把弹性体（包括塑性体）和流体当作由无限多个质点所组成的连续分布并有内部相互作用的力学体系，这种体系称为连续介质。当然，物体是由大量分子组成的，分子又是由原子组成的，它们都是不连续的，运动

也是不连续的．人们可能发生这样的问题：在研究变形体运动时，能否先列出庞大数目的分子运动的微分方程，通过它们的解再来确定变形体的运动呢？实际上，这种想法，既不现实也不必要。研究变形体力学的方法是在一块固体或一滴液体中割出一个微小体元，把它当作一个宏观质点——“微团”，这种质点的大小比分子的自由程大得很多，它是一大群分子所形成的集团，每个分子的运动影响不了这种质点的运动，把整个弹性体或流体看成是这些微小体元一个挨着一个，没有宏观空隙的连续介质。这就是我们研究变形体的基本观点。

研究连续介质内部机械运动的学科叫作连续介质力学。

本篇第一部分研究物体的弹性和塑性，第二部分研究，流体的运动性质，第三部分研究物体在弹性力作用下的运动，即振动与波问题。

第八章 物体的弹性和塑性

任何机器（包括建筑物）都是由固体零件组成的，要保证机器正常工作，就必须保证组成机器的每个构件正常工作。所谓正常工作，就是在载荷（作用在构件上的外力）作用下，构件应不至于破坏，所产生的变形在工程上允许的范围以内。为了对构件进行强度分析和刚度分析（构件在承载时具有抵抗断裂的能力，这种能力通常称为构件的强度；而构件在承载时具有抵抗变形的能力，这种能力通常称为构件的刚度。），首先必须分析构件之间的相互作用力，并确定这些力的大小和方向（通称受力分析）．力作用在构件上，就要使构件产生变形，甚至可能被破坏，而构件却依靠自身的一定尺寸和材料性能来反抗变形和破坏。“对抗是矛盾斗争的一种形式”。破坏和反破坏，变形和反变形，是构件在工作过程中始终存在的矛盾。工人师傅在设计构件时希望构件具有足够的强度和刚度，这样构件的尺寸就要大些，材料就要好些，但另一方面，我们又希望构件的尺寸小、重量轻、成本低，这是互相矛盾

的。这就需要我们对构件进行受力分析，强度分析，刚度分析，合理地确定构件的形状、尺寸，选用材料，正确处理上述矛盾，以达到既安全又经济的目的。这就需要材料力学的知识，这些知识以固体的弹性和塑性为基础。

我们在理解弹性与塑性这个问题上，必须用辩证的观点，绝对化是不对的。事实上，弹性与塑性性质也只是相对的，物体同时具有弹性性质和塑性性质。物体的微小形变一般是弹性形变，而较大的形变则为塑性形变．本章将从理论上研究物体弹性形变的性质和大小，确定物体受力状态（这就是弹性力学的任务），同时要结合机器、工程建筑中材料的实际加以分析、讨论，使我们所学得的弹性力学知识能更好的为三大革命实践服务。

以后我们会清楚，弹性力学所研究的规律，为后面几章将要学习的流体运动，振动与波打下重要的基础。

§1．形 变 和 应 力

“**事物发展的根本原因，不是在事物的外部而是在事物的内部，在于事物内部的矛盾性**。”不同的金属材料由于内部结构不同，而具有不同的机械性能。

用手拉长弹簧时，手上就会感到有力作用。这是因为弹簧受力拉长时，内部产生一种抵抗力，它阻止外力使弹簧继续发生形变，这种抵抗力称为内力。手上用的力越大，弹簧拉得越长，弹簧所产生的内力也就越大。

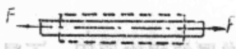
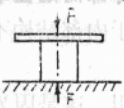
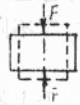
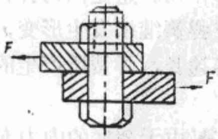
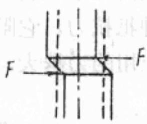
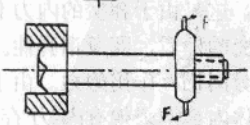
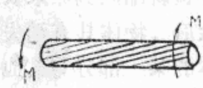
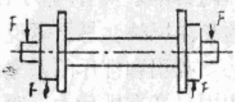
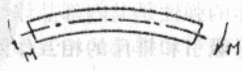
放手后，弹簧就缩回到原来长度，这是由于弹簧的内力使形变消失。在外力去除后，物体具有消失形变的性质，即所谓弹性。

内力是物体的某一部分与其他部分间相互作用的力。由于物体的分子间本来就有力相互作用着，因此物体内部本来就有内力存在（固有的）。物体的弹性是其内部晶体结构的具体反映。恩格斯说：“**一切运动都存在于吸引和排斥的相互作用中**。”吸引和排斥的对立统一是无机界自身固有的矛盾性。分子间既有吸引力，又有排斥力，吸引力要使分

子互相接近，排斥力要使它们互相远离。二者处于经常不断的斗争之中。双方矛盾斗争的表现之一就是，在某一距离上吸引力等于排斥力，这时两个分子就处于平衡状态。当物体受压力作用时，分子间距离小于平衡的距离时，由于排斥力比吸引力增加得快，排斥力将占优势，从宏观上看，物体内部有压力发生；当物体受拉力时，分子间距离增大，吸引力将占优势，从宏观上看，物体内部有张力发生。当外力去掉时，这些多余的斥力或引力使物体恢复原状。这就是物体弹性的本质。

由于外力的作用，材料产生形变。例如起重机吊起重物时，钢索伸长；下层砖墙在以上各层砖的重量作用下，被压缩；水力发电机在运转中，轴要发生扭转；在汽车的载荷作用下，弹簧要发生弯曲等是物体形变的各种形式。这些形变有时比较简单，有时很复杂。不过复杂的形变常常可以当作是由几种简单的形变组合而成。如车轴的形变就可以当作

表1　简单的形变形式

形变形式	工程实例	受力简图
拉　伸		
压　缩		
剪　切		
扭　转		
弯　曲		

扭转和弯曲两种简单形变的总和。简单形变包括拉伸、压缩、剪切、扭转和弯曲（表1），这些形变又由两种最基本的形变——长变（线形变）和切变所组成。

下面讨论两种基本形变。

1. **长变**

细棒长为 l，使它的一端固定；另一端在拉力的作用下，形变后的长度为l_1，其伸长为 $\Delta l = l_1 - l$，我们把 Δl 叫做绝对伸长。但是绝对伸长不能全面描述棒的长度变化。为了更全面描述长度的变化，我们引入相对形变的概念，对于线形变来说，其相对形变即相对伸长表示在长度均匀变化的情况下，每单位长度所发生的长度变化，记作

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}。 \tag{8—1}$$

ε 又称为长应变，以后谈到的形变，一般都是指的相对形变。当棒受压力而单向压缩时，上式仍可适用，但 Δl 为负值。长应变是一个没有量纲的量。

在一般情况下，相对形变是一个变量。例如：杆件在本身重量或惯性力作用下发生形变时，它的各部分的形变各不相等，从

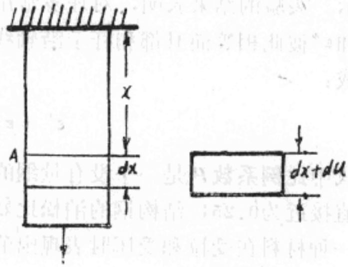


图 8—1

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

中得到的只是整个杆的平均形变。为了说明杆内各处的形变，需要将杆子分成许多元段来考虑（图8—1）。从截面A割取的原长 dx 的元段在变形以后的长，假设为 $dx + du$，则元段的相对伸长便是：

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}。 \tag{8—2}$$

元段无限减小时，ε的极限值便是杆在截面A的相对伸长。（8—2式中的函数u代表杆内各质点的位移。在所讨论的简单情形中u只是x的函

数，所以它代表整个截面的位移，因为元段各截面的位移不同，所以它产生了伸长。在最复杂的情况下，u不仅与x有关，而且与y、z有关，即$u=u(x,y,z)$，此时沿x方向的形变应该用偏导数

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8—3}$$

来表示。

生产中发生拉长形变的实例很多，如链、缆索、传送、皮带、桁架中的受拉杆件……等；发生压缩形变的物体也很多，如基础、墙壁、桁架中的受压杆件等。

应用精密的实验方法可以观测到，杆件在伸长时也改变它横截面积的大小。一般是，杆伸长时，截面缩小；杆缩短时，截面增大。在横截面上，取两个互相垂直的方向，沿这两个方向的线形变分别用ε'、ε''表示。实验的结果表明，对许多常用的工程材料如生铁、钢、铜等来说ε'和ε''彼此相等而且都和杆子沿轴线的形变ε成正比。这个结果可以表示成：

$$\varepsilon'=\varepsilon''=-\mu\varepsilon。 \tag{8—4}$$

式中比例系数μ是一个没有量纲的量，称为泊松比。多数物质的泊松比值接近为0.25；结构钢的泊松比较大，约为0.3。对微小形变来说，同一种材料在受拉和受压时表现出的泊松比值是相等的。

2. **切变**

物体的另一种基本形变是形状改变，而大小不变。若一立方形物体，使其底面固定，上表面在切向力F的作用下，此立方体由于形变而成为平行六面体（图8—2），这种形变称为切变，变形中所有和底面平行的平面，彼此之间发生了位移。和底面距离不同的平面、移动的距离也不同。但任一平面的位移和该平面与底面的垂直距离之比，则一定不变，这个比值称为切应变（或角应变），即

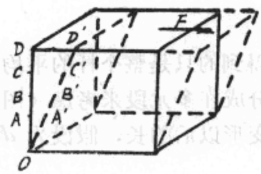


图 8—2

在形变均匀发生的情况下，相隔单位距离的二平面的相对位移，以γ表示，由图知：

$$\gamma=\frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB}=\cdots=\mathrm{tg}\alpha。\tag{8—5}$$

因在实际情况下，α角很小，它的正切和角度的弧度本身可看作相等，所以通常就用垂直于底面的OA线所转的角度α来量度切变，则（8—5）式可写作

$$\gamma=\mathrm{tg}\alpha\doteq\alpha。$$

在一般情况下，切向力F在所有和底面平行的截面内的数值互不相同，因此立方体各处的切变也不相同。一个有限大小的立方体的棱边OD在被扭歪后将成为一根曲线（图8—3中的OD'）。此时，必须将OD分成元段来考察它的形变，如令元段BC之长为dy，形变后，C点移动到C'，B点移动到B'，它们的水平位移之差为：

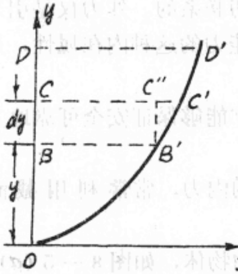


图 8—3

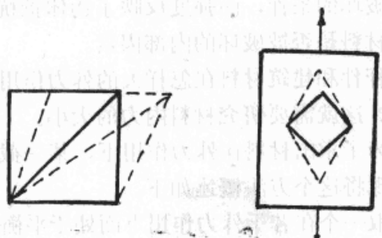


图 8—4

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

B处的切变由上式及（8—5）给出为：

$$\gamma=\frac{\partial u}{\partial y}。\tag{8—6}$$

材料内部的长变和切变不是互不相关的，而常常是同时发生的。例

如，在杆件中象图 8—4 中所取的正方形，伸长后，将变成一个菱形，原来的直角已经不再是直角；同样的，立方体切变时它的所有对角线的长度都已发生了变化。因此，所谓单纯的拉伸或单纯的切变平常是指某一物体的受力情况而言的。

从表面来看物体的形变尽管是复杂、多样，但从内部来看，形变无非是一些线段的长度的变化和线段与线段间的角度变化（切变）。因此说，长变和切变是形变的两种基本形式。

3. **应力**

我们知道，内力是物体的某一部分与其它部分间相互作用的力，而且内力随着物体的变形的增加而增大，变形一直增加到内力和外力平衡时为止。

如果外力有这样大，以致为内力所不能平衡时，则物体各部分之间的相互联结就会遭到破坏而发生断裂。对于某一种材料来说，有其一定的限度。不同的材料，有不同的限度，也就是有不同的强度（不同的抵抗断裂的能力）。所以内力与强度问题是有密切联系的。外力仅是引来材料破坏的条件，而强度反映了物体抵抗断裂能力的这种内在属性，是决定材料是否被破坏的内部因素。

杆件和建筑材料在怎样大的外力作用下，才能够保证安全可靠地工作呢？这就需要研究材料内力的大小。

为了求出材料在外力作用下，某一截面上的内力，常常利用截面法。现将这个方法概述如下。

取一个在若干外力作用下而处于平衡状态的物体，如图 8—5 (*a*)。为了求出截面 *mn* 上的内力，设想有一平面，通过这一截面将物体截成 *A*、*B* 两部分。任取一部分 *A* 来看，它仍平衡。但部分 *A* 上的外力不是平衡力系，因此在截面上必须有内力存在。这些内力实际上就是部分 *B* 对部分 *A* 的作用力。当然 *A* 对 *B* 也必定有大小相等而方向相反的力作用着。因此，当我们分析物体某截面上的内力时，可以取截面两侧的任何一部分来研究。

根据部分 *A* 在所有外力（包括截面上的内力，此时内力对部分 *A* 起着外力的作用了）作用下处于平衡状态，依平衡方程就可求出截面上内

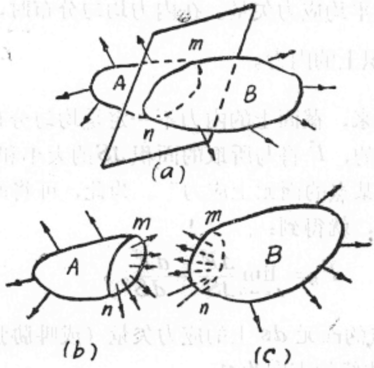


图 8—5

力的合力。一般说来，力系简化后将是一个力及一个力偶，有时也可能是一个力或一个力偶。

但是，光知道截面上内力的合力，还不能解决材料的强度问题（它是材料力学研究的主要内容之一），而必须要知道内力在截面上的分布情况。

我们假定内力是连续地分布在整个截面上的。如果围绕截面内某一点M，取一小面积Δs（图 8—6），并以$\Delta \vec{F}$表示作用在这一小面积上的内力，则比值

$$\vec{P}^* = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \qquad (8-7)$$

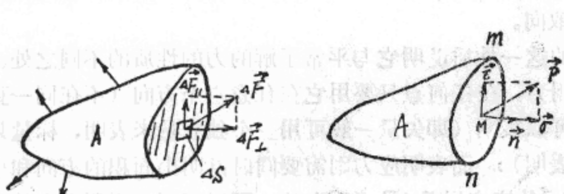


图 8—6

称为面积 ΔS 内的平均应力矢量。在内力均匀分布时，应力可以表示为$\frac{F}{S}$它代表单位面积上的内力。

但是，一般说来，截面上的内力不一定是均匀分布的，所以物体各处的应力是不一样的，$\vec{P}$ 将与所取的面积ΔS的大小和方向有关。因此，常需表明物体中“某点的面元上应力”。为此，可将面积 ΔS 尽量地缩小，在极限情况下，就得到：

$$\vec{P}_n=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}=\frac{d\vec{F}}{dS}。\qquad (8-8)$$

这里$\vec{P}$ 就是在M点的面元 ds 上的应力矢量（或叫胁强矢量）。脚注 n 表示面积 ds 的外法线的方向为 n。

如果把应力 $\vec{P}_n$ 分解为两个分量，一个在截面的法线方向，我们称为该点某面元上的正应力（或法向应力），用$\vec{\sigma}$表示；另一个在截面平面内，称为该点某面元上的切应力（或剪应力），用$\vec{\tau}_n$表示。在考虑简单的形变问题中，为了使用上的方便，可以省略表示面元方向的脚注“n”，即写成$\vec{P}$、$\vec{\sigma}$和$\vec{\tau}$。$\vec{P}$、$\vec{\sigma}$及$\vec{\tau}$之间存在下列的数量关系（图8—6）：

$$P^2=\sigma^2+\tau^2。$$

P、σ 及 τ 的计算单位可为公斤力/厘米^{2}或吨力/米^2。

对长变来说，内力方向与截面正交，其应力为正应力；对切变来说，内力方向和截面平行，其应力为切应力。

这里需要强调的是，ΔS 的取向不同，$\Delta \vec{F}$ 的大小和方向也将改变。因此，表明某点的应力时，不仅要说出该点的位置，而且还要标出所取小面积的取向。

应力的这一性质说明它与平常了解的力的性质的不同之处。平常所了解的作用力，在任何点只要用它在任意三个方向（不在同一直线上）的分量就可以表明（即矢量一般可用三个独立量来表明，标量只用一个独立量来表明），而表明应力则需要同时说明小面积的方向和小面积两面作用力$\Delta\vec{F}$的方向以及ΔF、ΔS之比。可以证明，需要六个独立量来表明某点的应力。数学上称这种量为张量，即某一点上的应力是个张量，

而力则是一个矢量。只能说，某一点某个面元上的应力才是个矢量。

§2. 虎克定律和弹性模量

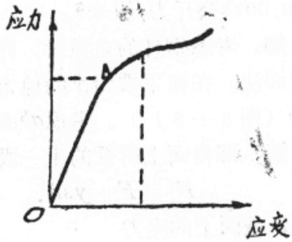


图 8—7

在材料强度试验室里用材料试验机进行拉伸或压缩等试验的结果，可以绘得如图 8—7 的一根曲线，该曲线表征了所试验材料的应力和应变的相互关系。曲线的 OA 部分近于一条直线，表示随着负载（外力）的增加，应力和应变按比例增加，二者为线性关系。从点 A 起，直线开始弯曲，标志着应力和应变的比例关系破坏了，和点 A 对应的应力称为比例极限，各种材料有不同的比例极限。这些结果总结成重要的虎克定律："在比例极限内，应力和相关应变成正比"。所谓"相关"是指张应力与伸长应变相关，压应力与压缩应变相关，切应力和切应变相关。虎克定律中的比例常数，称为该材料的弹性模量，它表示材料抵抗负载的形变作用的能力。

1. 杨氏弹性模量

对于长变，虎克定律的表达式为：

$$\sigma = E\varepsilon。 \tag{8—10}$$

对于材料的平均形变或相对形变为常量时，长变的虎克定律还可表示为

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{8—10}$$

比例系数 E 称为试件材料的杨氏弹性模量，由式(8—10)可以看到杨氏模量 E 的物理意义。当 $\frac{\Delta l}{l} = 1$ 时，$E = \sigma$。这就表明，E 在数值上等于将物体拉长到原来长度的二倍时的应力。实际上，大多数物质早在被拉长到原长的二倍以前就已经断裂，所以 E 是按比例算出的。

例题（8—1）一竖直悬挂着的钢杆，其截面为正方形5×5厘米^2，长为10米，下端受拉力$F=15$吨力作用，若考虑钢杆的自重，求钢杆的最大应力。钢的比重$d=0.0078$公斤力/厘米^3。

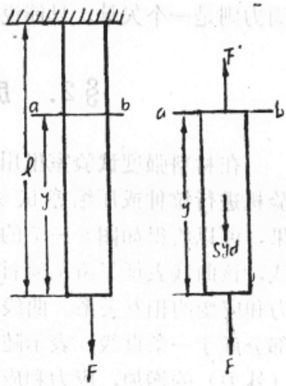


图 8—8

解：考虑钢杆的自重时，同样可以应用截面法。在离下端为y的地方取一横截面ab（图8—8））。考虑ab面下端这一段平衡，即得面上所受的上一段的内力。

$$F'=F+ysd.$$

这样，截面上的应力

$$\sigma=\frac{F'}{S}=\frac{F}{S}+yd.$$

这表明，应力随y而变化，即在位置的截面应力不同。

$$\text{当 } y=0 \text{ 时（即下端）}, \ \sigma=\frac{F}{S};$$

$$y=l\text{时（即上端）}, \ \sigma=\frac{F}{S}+ld。$$

所以固定的截面的应力最大，其值为

$$\sigma_l=\frac{F}{S}+ld=\frac{1.5\times10^4}{5\times5}\text{公斤力/厘米}^2+10\times100\times0.0078$$

$$\text{公斤力/厘米}^2=6.078\times10^2\text{公斤力/厘米}^2。$$

如果不计自重，则杆中所有横截面的应力都相同，其值为

$$\sigma=\frac{F}{S}=\frac{1.5\times10^4}{5\times5}\text{公斤力/厘米}^2=6.0\times10^2\text{公斤力/厘米}^2。$$

不考虑钢杆自重所产生的误差为

$$\frac{\sigma_l-\sigma}{\sigma_l}=\frac{607.8-600}{607.8}=1.3\%。$$

由此例可以看出，当钢杆不太长时，略去自重所引起的误差不大。但对于重型机械上的某些大构件，必须把自重考虑在内。

2. **切变弹性模量**

对于切变，虎克定律表达式为：

$$\tau = G\gamma。\tag{8—11}$$

当切变比较小时，对于材料的平均形变，切变的虎克定律还可表示为：

$$\frac{F}{S} = G\alpha。\tag{8—12}$$

G称为该物质的切变弹性模量，它表征材料抵抗切向变形的能力，其数值等于垂直于截面的直线转1弧度时的应力。

切变虎克定律并不是一个新的独立的定律。因为它可以直接从关于长变的虎克定律中推导出来。正因为如此，切变弹性模量G也可以被杨氏模量E和泊松比μ所表示。当物质的E和μ值确定后，切变模量G的数值也便确定，它本身不能独立地取任意值。可以证明，E、μ和G的关系由下式决定：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}。\tag{8—13}$$

几种常用材料的弹性模量如下表：

材　　料	E(公斤力/毫米^2)	G(公斤力/毫米^2)	泊松比 μ	弹性限度
铸　　铁	12000	3000	0.27	
弹簧用钢	22000	8000	0.27	3.3
紫　　铜	11000	4700	0.35	3
橡　　皮	500		0.5	

例题（8—2）试求棱柱杆由于本身重量而产生的总伸长。

解：设棱柱杆的原长为l，截面积为S，单位体积杆重为w，则dx段的伸长为

$$du = \frac{sw(l-x)}{SE}dx = \frac{w(l-x)}{E}dx,$$

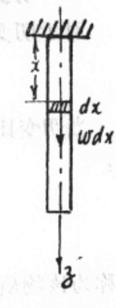


图 8—9

而杆的总伸长为

$$u = \int_0^l \frac{w(l-x)}{E}dx = \frac{w}{E}\int_0^l (l-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{w}{E}l^2 = \frac{1}{2}\ \frac{Wl}{ES}。$$

式中W是杆的总重量。

所以，因本身的重量而产生的总伸长，与在杆的总重量的一半作用于杆的下端的结果相同。

§3. 弯　　曲

弯曲形变也是工程实际中最常见的一种形变。例如切削工件的车刀、旋紧螺母的扳手，以及桥式起重机的横梁在载荷作用上都产生弯曲形变。产生弯曲形变的杆件统称为梁。

一般说来，梁的弯曲问题是比较复杂的。如果梁有一纵向对称平面，如图 8—10所示，作用在梁上的各力和各力偶均在此对称平面内，

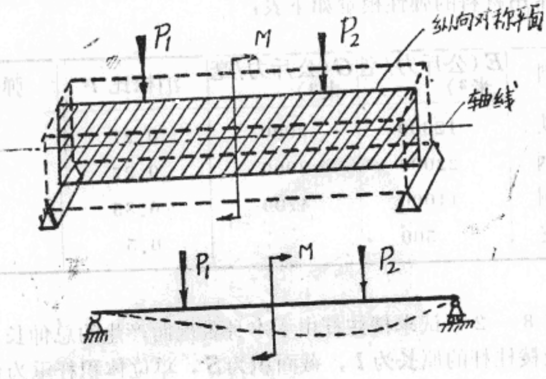


图 8—10