高中数学

教学参考資料

第三册

武汉市教育局教学辅导站编
湖北省中小学教学教材研究室校订

一九七三年七月

目　　录

第五章　数列与极限

本章主要内容是数列和极限的概念及数学归纳法。

中学数学、物理中的某些基本概念，如圆弧的长、切线、法线，瞬时速度等，都要借助于极限概念才能得到确切的解释；有某些初等运算（有限运算）所不能解决的问题，如无穷递缩等比数列求和，圆的周长和面积、锥体的体积、以及液体对侧面的压力等计算公式的推导也都需要使用极限的方法。同时，极限的方法，也是处理常量与变量，有限与无限，直线与曲线，近似与精确这些矛盾的基本方法。因此，在中学里学习数列和极限的基本概念，能使学生对客观世界中某些数量关系获得更深刻的认识，这对于逐步形成学生的辩证唯物主义世界观，提高分析问题和解决问题的能力，有着重要的意义。

数列和极限的有关概念，都是从数量方面反映客观事物运动的变化规律的，它们揭示了量变与质变、有限与无限、近似与精确的对立统一关系，其产生和发展，正如伟大领袖毛主席所指出的：**“只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。”**数学归纳法作为一种数学方法，也是人们在长期的实践中逐步形成的。但是旧教材片面强调这些理论的抽象性和严谨性，不讲矛盾的产生和发展，不讲事物的运动和变化，不讲理论与实践的关系，从概念到概念、理论到理论，反映出来的是唯心论和形而上学。新教材试图努力改变这种状况。教学中，要坚持唯物论的反映论，反对

唯心论的先验论，宣传事物本来的辩证法，反对形而上学。

第一节　数　　列

一　用辩証唯物主义观点分析教材

本节教材遵循由特殊到一般的认识规律，首先通过仓库、码头、车站堆放货物的实际问题，引进数列的概念，接着就研究等差数列与等比数列，并结合这两种特殊数列的通项公式和求前n 项和的公式的证明，介绍了一种重要的推理方法——数学归纳法，这两种特殊的数列，在生产和生活中有着较为广泛的应用；它们所涉及的知识，与学生已学过的恒等变形、方程和函数等知识，有一定的联系，学起来比较容易。让学生先研究一些有穷数列的变化规律，特别是熟悉一些数列的通项公式，就可为学习无穷数列的极限打下基础。

在开门办学的过程中，要重视向工人、贫下中农学习，学习他们运用等差、等比数列解决生产实际问题的经验，通过这一系列活动，把三大革命中丰富的数学知识引进课堂，使学生认识到数学概念来源于实践，而不是人们头脑中主观思维的产物。数学中的计算规律是劳动人民长期实践经验的总结，决不是少数“天才”数学家个人的发明创造，特别是在推导等差数列前n项 的和的公式时，要揭露和批判过去某些资产阶级学者所散布的什么高斯在童年时代凭“灵感”发现了这个公式的反动谬论。结合教学，应狠批刘少奇一类骗子所鼓吹的唯心史观、反动的唯“天才论”和“头脑创造法则”等反动谬论，对学生进行思想和政治路线方面的教育。

不但数学概念本身，而且它的结论、它的方法都是反映现

实世界的。数学归纳法是一种数学方法。我们知道，人们在长期的三大革命实践中，通过局部的、特殊情况下的实践开始认识了某些规律，得出了某些结论，这就是归纳法。课本在分析了归纳法所不能解决的矛盾后才提出数学归纳法的，并力图以恩格斯关于无限与有限关系的某些教导，来阐明数学归纳法的实质。所以数学归纳法就是在这个基础上发展起来的，它和数学上演绎的方法是互相联系的、互相补充的，正如分析和综合一样。在教学时，应揭示它和演绎法的联系。

毛主席教导我们：**“如果不研究矛盾的特殊性，就无从确定一事物不同于他事物的特殊的本质，就无从发现事物运动发展的特殊的原因，或特殊的根据，也就无从辨别事物，无从区分科学研究的领域。”**本节主要介绍等差数列和等比数列，教材在研究这些数列时，都是通过观察、比较和分析这些数列中的项及其相互关系，揭示出它们的特点，如等差数列的特点是：“从第二项起，每一项减去它相邻的前面一项所得的差都等于同一个常数”。等比数列的特点是：“从第二项起，每一项与它相邻的前面一项的比都等于同一个常数”。抓住这些特点定义了等差数列和等比数列，介绍了公差和公比的概念，在此基础上才研究它们的通项公式和前n项和的公式。因此，可以说，抓住了公差就抓住了等差数列的特殊本质，抓住了公比就抓住了等比数列的特殊本质。关于等差（等比）数列的求和，首先应指出的矛盾是项数太多，不可能（不宜）一一相加，然后通过对特例的分析，找出等差（等比）数列中项与项之间的联系，再指出解决矛盾的方法，导出求和公式。

鉴于以上分析，本节教学要求是：

1.通过教学，培养学生“实践第一”的观点，明确人的认识过程是特殊——一般——特殊的过程。

2.使学生在明确数列概念的基础上，掌握等差、等比两种数列的基本特征，熟练地运用它们的通项公式和前n项和的公式解决有关实际问题。

3.使学生了解数学归纳法的基本思想方法，培养学生逻辑推理能力，并能用它去证明一些简单的命题。

二　教学建議

1.数列的一般概念

在讲解数列的概念时，要充分重视通过实际问题抽象概括出数列概念，如堆放问题，阶梯形问题等（见补充材料），要注意揭露它的本质特征。所谓数列就是与自然数对应起来的一串数：A_1，A_2，A_3，……，A_n，……它的元素用自然数编号，并按它们的号码上升的顺序进行排列，简记作$\{A_n\}$。由于数列的各项是按号码顺序排列起来的，所以又叫做序列，只是这一序列的各项都是一个确定的数，而且各项并不一定都是各个不同的数。

2.数列的分类

教材中按照不同的标准，对数列进行了分类：

（1）按照项数的有限和无限来分类，可分为有穷数列和无穷数列。

（2）按照比较任意相邻两项的大小来分类，可分为递增数列（$A_{n+1}>A_n$），递减数列（$A_{n+1}<A_n$），摆动数列，常数列（$A_{n+1}=A_n$）。

除了教材中提到的两种分类方法以外，还可以按照数列里各项的值的变化范围来分类，即分为有界数列和无界数列：

如果一个数列的任何一项的绝对值$|A_n|$都小于某一个正

数M，即 $|A_n|<M$，这个数列就叫做有界数列；

如果不存在这样一个正数M，能够使不等式 $|A_n|<M$ 对任何n都成立，这个数列就叫做无界数列。

例如，数列1，4，9，16，25，……是一个无穷数列，但也是递增数列，同时又是无界数列；再如，数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，……是一个无穷数列，但也是递减数列，同时又是有界数列。

要证明一个数列是哪一种类型的数列，就要用它的定义来进行论证。例如：

求证 $A_n=\frac{2n-3}{2n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 是递增有界数列。

证：$\because$ $$A_{n+1}-A_n=\frac{2(n+1)-3}{2(n+1)-1}-\frac{2n-3}{2n-1}$$

$$=\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n-3}{2n-1}$$

$$=\frac{(2n-1)^2-(2n-3)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\frac{4}{4n^2-1}>0,$$

$\therefore$ 这个数列是递增数列。

又$\because$ $$|A_n|=\left|\frac{2n-3}{2n-1}\right|=\left|1-\frac{2}{2n-1}\right|<1$$

$\therefore$ 这个数列是有界的。

因此，这个数列是递增有界数列。

3.数列的通项

对于一个数列来说，通项公式是非常重要的，因为它能充

分地揭露这个数列的本质特性，能看出这个数列的主要的变化趋势，对于研究极限有着重要的作用。如一个数列的通项公式为$A_n=2n+3$，那么我们就容易看出：

（1）当n增大时，A_n也随之增大，所以这个数列是递增的；

（2）当n每增大1时，A_n就增大2，所以这个数列是一个等差数列；

（3）由于A_n可以无限增大，所以这个数列是无界的；

（4）由于$2n$总是一个偶数，所以$2n+3$恒为奇数，亦即这个数列中各项都是奇数。

当一个数列的通项公式已经知道时，我们可以写出这个数列的任意一项来。但是如果已知一个数列的若干项，而要找出它的通项公式，那就不太容易，这时没有现成的固定的方法和公式，全靠从分析综合中找出规律。而且在根据数列的前几项去求它的通项公式时，除了要分析各项的值与项数之间的对应关系从中找出规律外，还要明确它后面的各项都是按这一规律排列的，这样找出来的公式，才能是这个数列的通项公式。

有的数列的通项并不能用公式给出。例如质数列：

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots$$

它的各项只能借助于其他方法（例如质数检验法）求得。又如求$\sqrt{2}$的不足近似值，得到的数列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots\cdots$$

可以借助于开方的方法，求出它的任何一项。

一般来说，不管通项公式如何。只要有某种方法确定出数列的任何一项，这个数列就认为是已知的。

4. 等差数列

引进等差数列的概念以后，就要紧紧抓住它的本质属性——“从第2项起，每一项减去它相邻的前面一项所得的差等于同一个常数。”它是进一步研究等差数列和处理等差数列的各种问题的根据。

例如，根据这一本质属性，很容易得出它的通项公式为

$$An = A_1 + (n-1)d。$$

根据这一本质属性，可以推出等差数列的一个重要性质："与首末两项等距离的两项之和都相等"。

$A_1 + An = 2A_1 + (n-1)d$,

$A_2 + A_{n-1} = 2A_1 + (n-1)d$,

$A_3 + A_{n-2} = 2A_1 + (n-1)d$,

…………

如果n为奇数，设$n = 2K + 1$，则数列就有一中间项$A_{K+1} = A_1 + Kd$,它与首末两项等距离，把它看作两项，仍有$A_{K+1} + A_{K+1} = 2A_1 + (n-1)d$。

在此基础上，我们就很容易提出等差数列前n项和的公式：$Sn = \frac{n(A_1 + An)}{2}$。这个公式的证明，学生是容易接受的。

此外，掌握了等差数列的本质属性，对于提高学生解决问题的能力，也是十分有利的。例如在处理已知等差数列某连续几项的和要求出这几项的问题时，如何正确选择未知数列出方程，就是一个很关键的问题。根据等差数列的本质属性，若为三数，可设为$X-Y$，X，$X+Y$（公差为Y）；若为四数，可设为$X-3Y, X-Y, X+Y, X+3Y$（公差为2Y），其余类推。还有，若a，b，c成等差数列，则必有$b = \frac{1}{2}(a+c)$；反之，

若证明a、b、c成等差数列，只要证明$b=\frac{1}{2}(a+c)$就行了。所以，$b=\frac{1}{2}(a+c)$是a、b、c成等差数列的条件。明确地指出这一点，对于提高学生的解题能力，是有好处的。

5. 等比数列

如同等差数列一样，在引进等比数列的概念时，必须充分揭示它的现实性，引进概念以后，就要紧紧抓住它的本质属性——“从第2项起，每一项都等于它相邻的前面一项乘以一个不为零的常数”. 它是处理等比数列各种问题的依据。

根据这个本质属性，我们很容易推出等比数列的通项公式$A_n=A_1Q^{n-1}$和前n项和的公式$S_n=\frac{A_1(1-Q^n)}{1-Q}$

$(Q\neq 1)$。值得注意的是教材上推导等比数列前n项和的公式方法，是某些有穷级数求和的重要方法，掌握这个方法，对于提高学生的解题能力是有益的。

例如求下面级数的和，就要用到这一方法。

求 $1+2X+3X^2+4X^3\cdots\cdots+nX^{n-1}+\cdots\cdots$ 前n项的和$(X\neq 1)$。

解 设 $S_n=1+2X^1+3X^2+4X^3+\cdots\cdots+nX^{n-1}$,

$$XS_n=X+2X^2+3X^3+4X^4+\cdots\cdots+nX^n,$$

$$S_n-XS_n=1+X+X^2+X^3+\cdots\cdots+X^{n-1}-nX^n$$

$$=\frac{1-X^n}{1-X}-nX^n,$$

$$\therefore\ S_n=\left(\frac{1-X^n}{1-X}-nX^n\right)\cdot\frac{1}{1-X}。$$

利用等比数列前n项和的公式，还可以证明下列公式：

$$X^{n-1}+X^{n-2}Y+X^{n-3}Y^2+\cdots\cdots+XY^{n-2}+Y^{n-1}=\frac{X^n-Y^n}{X-Y}。$$

这个公式是多项式的因式分解和整除性的一个重要公式。

掌握等比数列的本质属性，对于提高学生的解题能力，也大有帮助。例如，已知等比数列某连续几项的乘积要求各项时，根据等比数列的本质属性，可以合理地选择未知数，列出方程。若已知三数的积，可设为$\frac{X}{Y}$，X，XY，（公比为Y）；若已知四数的积，可设为$\frac{X}{Y^3}$，$\frac{X}{Y}$，XY，XY^3（公比Y^2）；若已知五数的积，可设为$\frac{X}{Y^2}$，$\frac{X}{Y}$，X，XY，XY^2（公比为Y）；若已知六数的积，可设为$\frac{X}{Y^5}$，$\frac{X}{Y^3}$，$\frac{X}{Y}$，XY，XY^3，XY^5（公比为Y^2），其余类推。这样设立未知数的优点，是根据条件，很快可以求出一个未知数。

还要指出：$x=\pm\sqrt{ab}$是a、x、b成等比数列的充要条件，，这对于提高学生的解题能力，也是有好处的。

6.数学归纳法

毛主席在《矛盾论》中指出了人类认识有两个过程：**“一个是由特殊到一般，一个是由一般到特殊。”**通常所说的归纳方法就是由特殊到一般的一种推理方法；通常所说的演绎法就是由一般到特殊的一种推理方法。

数学归纳法，历来是中学数学教学中的一个难点，如何使学生理解数学归纳法的精神实质，并能用它来解决具体问题，的确是一件很不容易的事，下面提几点意见，供教师参考：

（1）通过实际问题，说明归纳推理和演绎推理的基本意义。例如：

①根据某生产队68年粮食增产、69年粮食增产、70年粮食增产、71年粮食增产、72年粮食增产，并把它们联系起来，就可得出新的判断：这个生产队连续五年都增产。

②通过计算

$$S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4},$$

$$S_4=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{4}{5},$$

联系起来，得出新的判断：

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}。$$

③平行四边形的对角线互相平分和矩形是平行四边形，联系起来，我们便得新的判断——矩形的对角线互相平分。

④根据钢加热后膨胀，铁加热后膨胀，玻璃加热后膨胀，并把他们联系起来，得出新的判断——一切物体加热后都要膨胀。

我们联系几个判断得出新的判断，这一过程叫做推理（一种思维形式）过程。从这里我们可以体会到，所谓推理，是一

种逻辑作用。借助于它，我们可以由几个判断，得出新的判断，从而认识客观规律。很显然，推理是要有一定事实作依据的，它是客观实际在人们头脑中的反映。

例如①、②的推理过程是由特殊的命题推到一般的命题的过程，我们把它叫做归纳推理（归纳法）。而③的推理过程是由一般命题推到特殊命题的过程，我们把它叫做演绎推理（演绎法）。

在①中，新的判断是根据所有特殊情况得出的，这种归纳法称为完全归纳法。很显然，由完全归纳法所得出的结论是完全可靠的。在②、④中，新的判断是根据一部分特殊情况得出的，这种归纳法称为不完全归纳法。很显然，由不完全归纳法得出的结论，有时正确如②；有时不正确，如④。

尽管由不完全归纳法所得出的结论，有时不一定可靠。但因为客观事物的数量关联是很多的，情况是复杂的，所以通常人们在实际中所得到的各种结论，大多是在不完全归纳的情况下得到的。这说明，不完全归纳法，对我们发现和研究问题，很有用处。

（2）数学归纳法的基本内容

为什么用归纳法得出的结论，有时正确，有时不正确呢？仔细分析一下，我们不难发现，如果对于所有的特殊情况，都逐个地经过如实的调查和计算，那么所得出的结论，肯定正确。如果只有一部分事实作根据，而不是对所有情况都经过如实的调查和计算，那末所得出的结论，便不一定可靠。但是，客观事物是无穷的。如果世界上的万事万物，都要人们逐一地经过如实地调查和计算，才能得出结论，那是不可能的。因此，人们在长期实践中总结出来了这样一种数学方法：对于

某一个命题，既有部分事实作基础，又有理论规律作依据，由此归纳出来的结论，就一定正确。数学归纳法的基本思想是：有一批编了号码的数学命题，我们能证明第1号命题是正确的（即有部分事实作基础，又叫命题的特殊性）；如果我们证明在k号命题是正确的时候，第$k+1$号命题也是正确的（有理论规律作依据，又叫命题的延续性），那么，这一批命题就全部正确。具体地说，数学归纳法主要由两大部分组成，即验证部分和递推部分：

①验证部分 证明当$n=a$（第一个数且为自然数）的时候，某一论断是正确的；

②递推部分 假设当$n=k$（k是大于a的自然数）的时候，论断是正确的，证明当$n=k+1$时，这个论断也是正确的。

根据①、②,就可以断定当n为大于或者等于a的任意自然数时，这个论断都是正确的。

数学归纳法的这两个组成部分是互相联系的，也是缺一不可的。验证部分是证明这个论断的基础，没有这个部分，递推就无从推起；递推部分是验证部分的发展。

这两个步骤中，如果缺少任何一步，就有可能得出错误的结论。这一点，教材上讲的比较清楚，教学时要向学生强调。

（3）学生开始学习数学归纳法，感到不理解。常常表现为：

①在第一步中，学生往往对只验证$n=1$就行了这一点不放心。因而有的学生问：要不要令$n=2$，$n=3$多验证几个？这反映了学生对数学归纳法的精神实质，还缺乏了解。他们不知道当$n=1$时命题正确。就说明这个命题有了特殊性，也就是说有可能成立的基础，如果下一步能证明它有延续

性，回过头来，就可以推出$n=2$，$n=3$，……都正确。因此，只要验证$n=1$就够了。有的学生在作业中，作第一步验证时，常常这样写：当$n=1$，2，3，……时，命题成立。这种写法不仅是多余的，而且是不正确的；其中用$n=2$，$n=3$来验证是多余的；写上"……"是不正确的。如果"……"，表示经过试验都正确，那么试问到底试到哪一步？如果"……"是表示尚未经过试验的自然数，那么就断定n对于这些未经过试验的自然数都对的结论，就没有根据了。

②有的学生对于第二步中"假设$n=k$时，命题成立"中的"假设"二字感到不理解。应该指出，这一"假定"是有基础的，其目的是要证明命题的延续性。也就是说要证明：从$n=k$时命题成立出发，证明下一号$n=k+1$时命题也成立。因为有$n=1$时命题成立作基础，又由于k的任意性，那么从$n=1$时命题成立可知$n=2$时命题成立，从$n=2$时命题成立知$n=3$时命题也完全成立，如此递推下去，对任何n值，命题都成立，有的学生在作业中这样写：

$n=1$时，…… ∴ 真；

$n=2$时，…… ∴ 真；

…………

$n=k$时，…… ∴真；

$n=k+1$时，…… ∴真；

∴ 原命题为真。

这里主要的错误是：当验证几个自然数都能使原命题成立之后，一下就跳到$n=k$，不是假设$n=k$时原命题为真，而是断定$n=k$时命题为真，然后再跳到$n=k+1$的情况。他的思路是$n=1$时，命题成立，$n=2$时，命题成立。"推

而广之”，$n=k$时，原命题也成立；$n=k+1$时，原命题也成立。因此，对于所有自然数，原命题都成立。表面上用了数学归纳法的格式，实际上，仍然停留在不完全归纳法上。

③既然假设$n=k$时命题为真，这里k是指的任意的自然数，那末将k代以$k+1$，即可得$n=k+1$时为真了，何必还花那么多力气去证呢？这是由于不了解在“假设$n=k$为真”的时候，k是可以任意的，在“假设”以后，推导“$n=k+1$为真”的时候，k便是固定而不能任意了。正如我们在证明三角形内角之和等于180°一样，我们可以“任意”画一个三角形，但一经画出以后，在推算过程中，这个三角形便已固定，就不能任意了。

④在实际证题时，如何由$n=k$时成立，推出$n=k+1$时也成立，学生往往感到束手无策，这主要是由于不了解这两步之间的关系，不知道$n=k+1$时这一步的推导，是在假定$n=k$时命题成立的基础之上进行的。也就是说分不清“已知”和“求证”。解决这一问题的有效办法是告诉学生：以$n=k$代入原命题，这就是“已知”；再以$n=k+1$时代入原命题，这就是“求证”。然后根据“已知”条件，推出求证的等式。

三　习题提示

1.等差数列练习第6（3）题解法如下：

三位数中，又是9的倍数的最小的一个数是108，最大的一个数是999，这些数组成的是一个等差数列，公差是9。

由于$A_1=108$，$A_n=999$，$d=9$，可由$999=108+(n-1)d$中求出$n=100$，

$$\therefore\quad S_n=\frac{(108+999)\times 100}{2}=55350。$$

2.等比数列练习第4（3）题解法如下：

$\because\quad 1458=2\times q^6,\quad q^6=729,\quad \therefore\quad q=\pm 3,$

这里q的正负两个值都是符合题意的，它们形成的数列为：

2，6，18，54，162，486，1458，…… 与

2，－6，18，－54，162，－486，1458……

可以看出，虽然两个数列不同，但是A_1都为2，A_7都是1458。

3.等比数列练习第10题，设容器内最后剩下纯酒精An升，

已知$A_1=20$升，$Q=\frac{19}{20}$，$n=4$，

$$\therefore\quad A_n=20\times\left(\frac{19}{20}\right)^3\approx\cdots\cdots$$

4.等比数列练习第13题，设这三数为$\frac{A}{Q}$，A，AQ，则

$$\begin{cases}\frac{A}{Q}+A+AQ=14, & ①\\ \frac{A}{Q}\cdot A\cdot AQ=64, & ②\end{cases}$$

由②得$A^3=64$，$A=4$，代入①得$\frac{4}{Q}+4+4Q=14$，

去分母，化简得$2Q^2-5Q+2=0$，

$\therefore\quad Q=2$ 或 $Q=\frac{1}{2}$，

∴ 此三数为2，4，8。

解这类问题的特点是：已知三数成等比数列，又知它们的