高 等 数 学

（下 册）

习 题 解 答

南京邮电学院

一九七四年十月

第一章 微分方程

习 题 1 P.6

1. ① ② ③ ④ ⑥是微分方程

2. ①$y=e^{-5x}$，$y=ae^{-5x}$ 是 $dy+5ydx=0$ 的解

②$y=3$，$y=e^{-2x}+3$ 是 $y'+2y=6$ 的解

③$y=\frac{x}{2}+1$，$y=ae^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}+1$ 是 $4\frac{dy}{dx}=2y-x$ 的解

④$y=xe^{cx}$ 是 $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$ 的解

3. ①$y=e^{-2x}$ 是 $\begin{cases} dy=-2ydx \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解

②$y=e^{-x}+x$ 是 $\begin{cases} y'+y=1+x \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解

③$u=\frac{1}{4t+1}$ 是 $\begin{cases} \frac{du}{dt}+4u^2=0 \\ u|_{t=1}=\frac{1}{5} \end{cases}$ 的解

4. ①通解 $y=\frac{3}{4}x^2+C$ 特解 $y=\frac{3}{4}x^2+3$

②通解 $y=\sin x+C$ 特解 $y=\sin x$

③通解 $y=-\frac{A}{\omega}\cos\omega t+C$ 特解 $y=-\frac{A}{\omega}\cos\omega t+\frac{A}{\omega}$

④通解 $y=-\frac{a}{b}e^{-bt}+C$ 特解 $y=-\frac{a}{b}e^{-bt}+\frac{a}{b}$

⑤通解 $y=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$ 特解 $y=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+\frac{1}{2}$

5. 把 $y=cx^3$ 代入方程 $3Cx^3-x(3Cx^2)=0$

$\therefore$ $y=Cx^3$ 是 $3y-xy'=0$ 的通解

代入初始条件 $\therefore$ 特解为 $y=\frac{1}{3}x^3$

6. 把 $v=\frac{1}{kt+a}$代入方程

即得 $\frac{-k}{(kt+a)^2}+\frac{k}{(kt+a)^2}=0$

$\therefore$ $v=\frac{1}{kt+a}$ 是 $\frac{dv}{dt}+kv^2=0$ 的解

又 v 中含有一个任意常数 a 因此 v 是一阶方程的通解

7. 求导读者已自推导。

习　题　2　P.12

1. ① $y=e^x$　② $y=ax$

③ $y=\frac{1}{2x^2}$　④ $y=x^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{5}{2}}$　⑤ $y=e^{-x^2}$

2. ①　②　③是可分离变量方程

3. ① $x^2+y^2=C$　② $xy=C$

③ $y=\frac{1}{C-x}$　④ $y=(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)^2$

⑤ $y=\ln(x^2+C)$

⑥ $\sin y=\frac{C}{x^2+3}$ $\left(提示\frac{2xdx}{x^2+3}+\frac{\cos y dy}{\sin y}=0\right)$

⑦$y^2=1-(\arcsin x+C)^2$

$\left(提示：\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0\right)$

⑧$y=tg(\ln C\sqrt{1+x^2})$

(提示$(1+x^2)dy-x(1+y^2)dx=0$)

4. ①$y=3e^x-2$

②$\sqrt{x}=\frac{1}{4}t^2+C$　　③ $s=\frac{1}{6}t$

④$y=x-1$$\left(通解\ y=\frac{1}{C}(x-1)表示过(1,0)的一束直线\right)$

5. ①$\begin{cases}500\times10^{-6}\times2\times10^3\frac{duC}{dt}+u_C=0\\ u_C|_{t=0}=10\end{cases}$

②$u_C=Ce^{-t}$ 代入初始条件可得 特解 $u_C=10e^{-t}$

③$u_C|_{t=1}=10e^{-1}\approx3.68$伏

④$1.5=10e^{-t}$　　∴　$t\approx1.9$秒

⑤$R=14$ 欧

6. $\begin{cases}0.5\times10^{-6}\times4\times10^3\frac{du_C}{dt}+u_C=0\\ u_C|_{t=0}=12\end{cases}$

①$u_C=12(1-e^{-500t})$

$i=0.5\times10^{-6}\frac{du_C}{dt}=3\times10^{-3}e^{-500t}$

$u_R=Ri=12e^{-500t}$

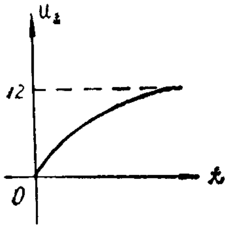
②$R\leqslant2\times10^3$欧

习　题　3　P.17

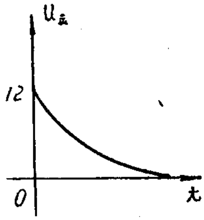
1. ①积分电路中 $u_{出} \approx u_C$

$$i = c\frac{du_C}{dt} = C\frac{du_{出}}{dt} \qquad \text{又} \quad u_{出} + Ri = u_{入}$$

$$\text{可得}\begin{cases} u_{出} + RC\dfrac{du_{出}}{dt} = 12 \\ u_{出}\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad u_{出} = 12(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



第　1①　题



第　1②　题

②微分电路

$\because \quad u_{出} = u_R$

而 $\quad u_C + u_{出} = u_{入}$

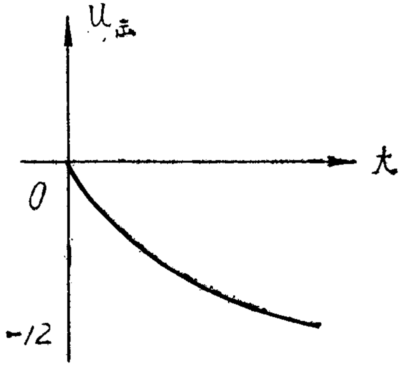
即 $\quad \dfrac{Q}{C} + Ri = 12$

$$\text{因此可得}\begin{cases} \dfrac{1}{C}i + R\dfrac{di}{dt} = 0 \\ i\Big|_{t=0} = \dfrac{12}{R} \end{cases}$$

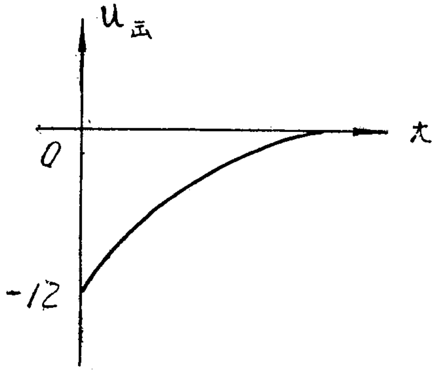
解之可得 $i = \dfrac{12}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \therefore \quad u_{出} = Ri = 12e^{-\frac{t}{RC}}$

2． 同第一题一样解法，可得

①$u_{出}=-12(1-e^{-\frac{t}{RC}})$　　②$u_{出}=-12e^{-\frac{t}{RC}}$



第 2① 题



第 2② 题

3． $\begin{cases} Ri+L\dfrac{di}{dt}=E \\ i\big|_{t=0}=0 \end{cases}$　　∴　$i=\dfrac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

4. $\begin{cases} Ri + L\dfrac{di}{dt} = U_m \sin \omega t \\ i\,|_{t=0} = 0 \end{cases}$

5. $u_C + u_L = E$

而 $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ $\qquad u_L = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

$$\therefore \begin{cases} u_C + LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} = E \\ u_C\,|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

6. ① $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg \\ v\,|_{t=0} = v_0 \end{cases}$ $\qquad \therefore \quad v_0 = -gt + C$

代入初始条件可得解为：

$$v(\ t\ ) = v_0 - gt$$

② $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \\ v\,|_{t=0} = v_0 \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{m}{kg}}\ \mathrm{arc\,tg}\ \sqrt{\frac{k}{mg}}v = -\ t\ + C$$

代入初始条件可得 $C = \sqrt{\dfrac{m}{kg}}\ \mathrm{arc\,tg}\ \sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\ \mathrm{tg}\,(\alpha - \sqrt{\frac{kg}{m}}\ t\ )$$

其中 $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\ \sqrt{\dfrac{k}{mg}}v_0$，$m$是物体质量，$k$是比例系数。

7. $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=P-kv \\ v\|_{t=0}=0 \end{cases}$ $\therefore\quad v=\dfrac{P}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

8. 设比例系数 $k>0$

则 $\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}=-k(\theta-20) \\ \theta\|_{t=0}=50 \end{cases}$ $\therefore\quad \theta(t)=20+30e^{-kt}$

9. 设比例系数$k>0$

则 $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}=-kN \\ N\|_{t=0}=N_0 \end{cases}$ $\therefore\quad N(t)=N_0e^{-kt}$

10. 设电动机运转 dt 时温度变化$d\theta$

则 $\begin{cases} d\theta=10dt-k(\theta-15)dt \\ \theta\|_{t=0}=15 \end{cases}$

$\therefore\quad \theta(t)=15+\dfrac{10}{k}(1-e^{-kt})$

11. 设经dt 时刻同位素生长 dN

则 $\begin{cases} dN=Pdt-kNdt \\ N\|_{t=0}=0 \end{cases}$ $\therefore\quad N(t)=\dfrac{P}{k}(1-e^{-kt})$

12. $\begin{cases} \dfrac{2x}{100+t}dt=-dx \\ x\|_{t=0}=10 \end{cases}$ $\therefore\quad x=\dfrac{10^5}{(100+t)^2}$

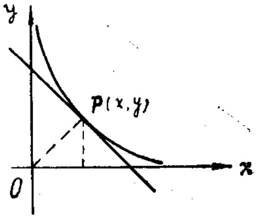
$x\|_{t=60}\approx 3.9$(公斤)

13. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{y}{x} \\ y\|_{x=1}=1 \end{cases}$ 所求曲线为 $y=x^2$

14. 设P的座标为（x， y）

则 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y|_{x=0} = 5 \end{cases}$

所求曲线 $x^2 + y^2 = 25$



第 14 题

15. ①$y = Ce^{+x}$

②$y = Ce^{-x}$

③$y = Ce^{3x}$

④$y = Ce^{-3x}$

16. ①$y = -3 + Ce^{x}$ ②$y = -3 + Ce^{-x}$

③$y = 3 + Ce^{3x}$ ④$y = 3 - Ce^{-3x}$

习 题 4 P.23

1. ①，②，③，⑤，⑥，⑦，⑧是线性方程

①②③⑥⑦是常系数线性方程

②⑤齐次线性方程

2. $2y' - y = 0$

①$2P - 1 = 0$

②$P = \dfrac{1}{2}$ ③$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$ ④ $y = ae^{\frac{1}{2}x}$

3. ①$y = ae^{-4x}$

② $y = ae^{\frac{1}{3}x}$ ③ $y = ae^{-\frac{2}{3}x}$ ④ $y = ae^{\frac{1}{4}x}$

4. $\begin{cases} \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = 0 \\ i\Big|_{t=0} = \dfrac{E}{R} \end{cases}$ $i = ae^{-\frac{R}{L}t}$

$\therefore$ $i = \dfrac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}$

5. 读者自己验证

6. $xy' + y = 0$

即 $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$ $\qquad\therefore\quad y = \dfrac{C}{x}$

习 题 5 P.29

1. ① $y = e^{-\int \frac{1}{2}dx}\left[C + \int 5e^{\int \frac{2}{1}dx} dx\right] = 10 + Ce^{-\frac{1}{2}x}$

② $y = e^{-\int \frac{B}{A}dx}\left[C' + \int \frac{C}{A}e^{\int \frac{B}{A}dx} dx\right] = \dfrac{C}{B} + C'e^{-\frac{B}{A}x}$

③ $u = e^{-\int \frac{2}{5}dt}\left[C + \int \frac{4}{5}e^{-2t}e^{\int \frac{2}{5}dt} dt\right]$

$= -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + Ce^{-\frac{2}{5}t}$

④ $y = e^{-\int \frac{2}{3}dt}\left[C + \int 2xe^{\int \frac{2}{3}dx} dx\right] = 3x - \dfrac{9}{2} + Ce^{-\frac{2}{3}x}$

⑤ $u = e^{\int \frac{3}{4}dt}\left[C + \frac{5}{4}\int \cos 2t \cdot e^{-\int \frac{3}{4}dt} dt\right]$

$= \dfrac{40}{73}\sin 2t - \dfrac{15}{73}\cos 2t + Ce^{\frac{3}{4}t}$

⑥ $y = e^{-\int dx}[C + \int \sin x \cdot e^{\int dx} dx]$

$= \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^{-x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + Ce^{-x}$

2. $\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{R_1C_1}u = \dfrac{u_0}{R_1C_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right) \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$

$$\therefore \quad u = e^{-\int\frac{1}{R_1C_1}dt}\left[C + \frac{u_0}{R_1C_1}\int\left(1 - e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right)e^{\int\frac{1}{R_1C_1}dt}\right]$$

$$= Ce^{-\frac{t}{R_1C_1}} + u_0\left[1 - \frac{R_2C_2}{R_2C_2 - R_1C_1}e^{\frac{t}{R_2C_2}}\right]$$

代入初始条件可得

$$C = u_0 \cdot \frac{R_1C_1}{R_2C_2 - R_1C_1}$$

$$\therefore \quad u = u_0\left(1 - \frac{R_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2}e^{-\frac{t}{R_1C_1}} + \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2}e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right)$$

3. ① $\overline{y} = \alpha x^2 + \beta x + r$ ② $\overline{y} = (\alpha x + \beta)e^{x}$

习 题 6 P.32

1. ① $y = Ce^{-\frac{5}{3}x} + \dfrac{6}{5}$ ② $S = C_e^{-\frac{t}{2}} + 2t - 3$

③ $y = Ce^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{5}e^{-2x} + 4$

④ $y = Ce^{-kx} + \dfrac{kb}{\omega^2 + k^2}\sin\omega x - \dfrac{b\omega}{\omega^2 + k^2}\cos\omega x$

⑤ $y = 11e^{\frac{1}{4}x} - 10$ ⑥ $y = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x - e^{-x})$

2. ① $\begin{cases} \dfrac{1}{200}\dfrac{du_C}{dt} + u_C = \sqrt{2}\,220\sin 100\pi t \\ u_C\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ $(U_m = \sqrt{2}U,\ \omega = 2\pi f = 100\pi)$

②$i(t)=\dfrac{dQ}{dt}=C\dfrac{du_C}{dt}$

$$u_R(t)=Ri=185\sqrt{2}\sin(100\pi t-7+\frac{\pi}{2})-140e^{-200t}$$

③u_R 比 u_C 超前$\dfrac{\pi}{2}$

3. $\begin{cases}\dfrac{1}{200}\dfrac{du_C}{dt}+u_C=\sqrt{2}\cdot 220\sin(100\pi t+\dfrac{\pi}{6})\\ u_C\,|_{t=0}=0\end{cases}$

解法同2.①，$u_C=Ae^{-200t}+118\sqrt{2}\sin(100\pi t-1+\dfrac{\pi}{6})$

由初始条件知 $A=77$，

即 $u_C=77e^{-200t}+118\sqrt{2}\sin(100\pi t-0.48)$

4. $u_L+u_R=U_m\sin\omega t$，得 $\begin{cases}Ri+L\dfrac{di}{dt}=U_m\sin\omega t\\ i\,|_{t=0}=0\end{cases}$

5. ①$RC=5$ $\begin{cases}5\dfrac{du_C}{dt}+u_C=12\\ u_C\,|_{t=0}=3\end{cases}$

5. ①$RC=5$ $\begin{cases}5\dfrac{du_C}{dt}+u_C=12\\ u_C\,|_{t=0}=3\end{cases}$

②$RC=3\cdot 9$

$$\begin{cases}3\cdot 9\dfrac{du_C}{dt}+u_C=3\\ u_C\,\Big|_{t=0}=12-9e^{-\frac{2}{5}},\quad u_C=3+3e^{-\frac{1}{3\cdot 9}t}\end{cases}$$

6. 设通过左回路电流为 i_1，右回路之电流为 i_2（图见书）据回路电压定律，对左回路通过 R_2 之电流为 $i_1 - i_2$，对右回路，通过 R_2 之电流为 $i_2 - i_1$，列出关于 i_1，i_2 的方程：

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) = E \\ u_C + R_2(i_2 - i_1) = 0 \end{cases}$$

$$i_2 = \frac{-(R_1 + R_2)u_C + R_2 E}{R_1 R_2}，\text{但} i_2 = C\frac{du_C}{dt}，\text{故得：}$$

$$\begin{cases} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \\ u_C \big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

7. $y = Ce^{-x} + xe^{-x}$

8. ①是， ②$y' = 0$，$y = C$， ③$y = C + \frac{x^2}{2}$， ④适用

⑤设 $y = \alpha x^2 + \beta x + r$，$y' = 2\alpha x + \beta$，比较系数知

$\alpha = \frac{1}{2}$，$\beta = 0$，r 任意，即 $y = \frac{x^2}{2} + r$

习　题　7　P.38

1. ⑤$\frac{dx}{dy} - 2x = -4y$

3. $y_1'(x) = -\frac{B(x)}{A(x)} \cdot e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} = -\frac{B(x)}{A(x)} y_1(x)$

$$y'(x) = y_1'(x) \int \frac{f(x)}{A(x) y_1(x)} dx + y_1(x) \cdot \frac{f(x)}{A(x) y_1(x)}$$

$$= \frac{-B(x) y_1(x)}{A(x)} \int \frac{f(x)}{A(x) y_1(x)} dx + \frac{f(x)}{A(x)}$$

$$= \frac{1}{A(x)} [-B(x) y(x) + f(x)]$$

$\therefore \quad A(x)y' + \quad x)y = f(x)$

4. $\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ u_C|_{t=0} = 0 \end{cases}$

$u_C = E(1 - \dfrac{1}{RC}te^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}})$

$u_{出} = u_R = RC\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{E}{RC}te^{-\frac{t}{RC}}$

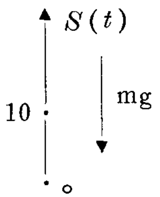
习　题　8　P.41

1. $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ $\quad a = b = \dfrac{1}{2},\ \ \overline{y}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

2. ① $y = -\sin x + C_1x + C_2$

② $y = \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2$

3.



$\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2} = -g \\ s|_{t=0} = 10 \\ \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 4 \end{cases}$

5. 都可以，没有它法，

习　题　10　P.53

2. 减衰振荡

3. $2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2\sqrt{10} \cdot 10^3$

①过阻尼，　　②振荡回路，　　③临界阻尼

在②中 $\delta = \frac{1}{4}10^4$，　　$\omega_0 = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot 10^4$，

$$\beta = \frac{\sqrt{39}}{4}\cdot 10^4 \qquad \frac{5U_U}{100} = \frac{\omega_0}{\beta}U_0 e^{-\delta t}\sin(\beta t + \varphi)$$

$$\because \quad |\sin(\beta t + \varphi)| \leqslant 1, \quad \frac{1}{20} = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot 10^4 \cdot \frac{4}{10^4 \cdot \sqrt{39}} e^{-\delta t}$$

$$e^{-\frac{10^4}{4}t} \doteq \frac{1}{20} \qquad 即 \quad t = 0.0012 秒$$

4. $\delta = \frac{R}{2L} = 10^4$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 10^4, \quad \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \doteq 8900$$

$$P_1 = -1100, P_2 = -18900, u_C = 21.2e^{-1100t} - 1.2e^{-18900t}$$

5. $$\begin{cases} LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \\ u_C|_{t=0} = E \\ \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \\ x|_{t=0} = x_m \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

8. ① $$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dx^2} + B\dfrac{dx}{dt} + kx = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_0 \end{cases}$$

② $$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_0 \end{cases}$$

习　题　11　P.58

3. $$\begin{cases} LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=E \\ u_C\big|_{t=0}=0 \\ \dfrac{du_C}{dt}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$ 讨论仿照齐次方程三种情形

5. $\sqrt{\dfrac{1}{LC}}=\omega=2\pi\cdot 820\cdot 10^3$　　$C=120$微微法

6. $m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=P\sin\omega t$

习　题　12　P.62

2. 非齐次方程组②的通解等于齐次方程组①的通解加非齐次方程组②的特解。

第二章　幂　级　数

习　题　1　$P.73$

1. ① $a=2,\quad l=100,\quad n=50$

$$S=\frac{(a+l)n}{2}=\frac{(2+100)50}{2}=2550$$

② $a=1,\ d=3,\ n=10,$

$$l=a+(n-1)d=1+(10+1)3=28$$

$$S=\frac{(1+28)10}{2}=145$$

③ $a=2,\quad l=10,\quad d=-2$

$$\because\quad l=a+(u-1)d\quad\therefore\quad n-1=\frac{l-a}{d}=\frac{-10-2}{-2}=6$$

$n=7,$

$$S=\frac{(2-10)7}{2}=-28$$

④ $n=7,\quad d=-12,\quad l=15$

$$a=l-(n-1)d=15-(7=1)(-12)=87$$

$$S=\frac{(87+15)7}{2}=357$$

2. ① $a=1,\quad r=2,\quad n=7$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1(1-2^7)}{1-2}=127$$