代數方程式論

代數方程式論

黃緣芳譯

Introduction To The Theory Of Algebraic Equations

by

L. E. Dickson

中華書局印行

大學用書 代數方程式論（全一冊）

◎ 上海 實售中儲券 精裝一百四十四元 並裝七十一元六角

（運郵匯費另加）

原著者 L. E. Dickson

譯者 [illegible]緣芳

出版者 吳叔同

印刷者 中華書局 上海澳門路

發行者 中華書局 上海福州路

（339002）（一〇六四八）

著者略歷

狄克生 (L. E. Dickson) 美國人,曾得哲學博士學位,美國芝加谷 (Chicago) 大學算學教授,為美國第一流代數學者.著作除本書外尚有

算術及其代數 (Arithmatics and Their Algebras),

近世代數理論 (Modern Algebraic Theories),

一次代數 (Linear Algebras),

代數不變式 (Algebraic Invariants),

數史 (History of the Numbers), 3 卷,

數論研究 (Studies in the Theory of Numbers),

數論初步 (Introd. to the Theory of Numbers),

初級方程式論 (First Course in the Th. of Equations),

方程式論初步 (Elementary Th. of Equations),

不變式及數論 (On Invariants and the Th. of Numbers) 刻於 Madison 算學講演集中

及與 Miller-B.ichfeldt 合著之有限羣 (Finite Groups) 等書.

序

普通二次方程式解法,在第九世紀時卽已發見.至於普通三次及四次方程式解法,直至十六世紀始告發見.過此兩世紀間,多數學者致力於普通五次及高次方程式解法,而卒無成.1770 年, Lagrange 將前人解法加以解析,得將各種解法納於同一原理之下,利用豫解式以求方程式之根;並證明普通五次方程式不能藉有理豫解式之助而解之.繼此以後, Abel, Wantzel 及 Galois 諸氏遂證得普通 $n\,(>4)$ 次方程式不能藉有理或無理豫解式之助,而得代數解法.又由此等代數研究,遂產生代換論及羣論.法算學家 Cauchy 氏卽首先對代換作系統研究之人[參看 Journal de l'école Polytechnique,(工藝學校雜誌), 1815].

本書係按歷史上發展之程序而敍述.上篇論 Lagrange-Cauchy-Abel 諸氏之普通代數方程式論,下篇則論列 Galois 氏之代數方程式(其係數爲隨意或特殊皆可)論.敍述力求淺現,立言皆從初等代數出發,不牽連及算學上其他各門類.書中並有許多例解及初等習題,以資讀者學習.

著者草此書時,除引用雜誌上各門類論文外,並參考次列各書:

Lagrange: Réflexions sur la résolution algébrique des équations (方程式代數解法之評論);

Jordan: Traité des substitutions et des équations algébriques (代數方程式論及代換論);

Serret: Cours d'Algèbre supérieure (高等代數學);

Netto-Cole: Theory of substitutions and its Applications to Algebra (代換論及其在代數學上之應用);

Weber: Lehrbuch der Algebra (代數學);

Burnside: The Theory of Groups (羣論);

Pierpont: Galois' Theory of Algebraic Equations (代數方程式之Galois氏理論),刊於 Annals of Math. (算學年報) 第二輯第一、二兩卷中.

Bolza: On the Theory of Substitution-Groups and its Applications to Algebraic Equations (代換羣之理論及其在代數方程式上之應用),刊於 Amer. Journ. Math. (美國算學輯報) 之第13卷中.

Oscar Bolza 於 1894 年, E. H. Moore 於 1895 年, Sophie Lie 於 1896 年, Camille Jordan 於 1897 年皆講授羣論,著者均親承教澤;茲乘此機會,謹致其感謝之忱.

在上述各方面中,著者受 Bolza 教授之講演及著作之影響尤大;本書第65節內,方程式之羣之例,卽係得教授之許可,由其講義中摘出者.

本書爲著者於1897年在 California 大學講演,於 1899 年在 Texas 大學講演,及 1902 年在 Chicago 大學講演兩次所得之收穫.

西曆1902年八月, L. E. Dickson 序於 Chicago.

譯者附言

1. 本書譯文力求忠實,務使原書內容毫無挂漏,除 §§45, 46 與原書次序互調外,其餘章節,無所改變;至此兩節互調之原因,全爲求讀者容易瞭解計耳.

2. 本書術語,多採用國立編譯館所暫定者;間有一名數譯或前後不一致處,則由譯者意見選用之.遇有未經擬定之名詞,則參酌日文著作而定之.

3. 原書祇有學名索引一項,譯者除將內容增補外,並添入人名索引一項.

4. 本書人名皆用原文,不用譯音,以免混淆及隔膜之病.

5. 譯者自維淺學,如有不當處,尚望海內人士不吝賜教!

中華民國二十四年元旦黃緣芳書於承瑞室.

目　錄

索引

代數方程式論

上篇

Lagrange-Abel-Cauchy
諸氏普通代數方程式論

第一章

普通二次三次及四次方程式之解法
關於根內無理數之 Lagrange 氏定理*

§1. 二次方程式(Quadratic equation)　二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q}),\qquad x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4q}).$$

將此兩式相加、相減並相乘,得

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1-x_2=\sqrt{p^2-4q},\quad x_1x_2=q.$$

由此知根式內之無理式 $\sqrt{p^2-4q}$ 可以根之有理函數表之,而等於 x_1-x_2. 至函數 x_1+x_2 及 x_1x_2 爲根之對稱函數,得以係數之有理函數表之.

---

*見於 Lagrange 論文集(Œuvres de Lagrange, Paris, 1869)第三卷中,標題爲 "Réflexions sur la résolution algébrique des équations"(方程式代數解法之評論);此文於 1770–71 年間,首由柏林學院刊行。

§2. **三次方程式** (Cubic equation) 普通三次方程式之形爲

$$x^3-c_1x^2+c_2x-c_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令 $x=y+\frac{1}{3}c_1$, 方程式(1)可化簡爲

$$y^3+py+q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此處 $$p=c_2-\frac{1}{3}c_1^2,\quad q=-c_3+\frac{1}{3}c_1c_2-\frac{2}{27}c_1^3 \cdots\cdots\cdots(3)$$

此時,方程式(2)缺 y^2 項,稱爲**既約三次方程式** (Reduced cubic equation). 將來此式解後,(1)之諸根可由 $x=y+\frac{1}{3}c_1$ 求之.

在1505年以前,三次方程式(2)已爲 Scipio Ferreo 所解;後來 Tartaglia 復發現其解法,而以嚴守祕密爲條件,傳之於 Cardan, 但 Cardan 不遵信約,以1545年刊登其法於所著書 Ars Magna 中,世所稱爲 Cardan 解法是也.次列之法,乃 Hudde 在1650年發表者.其法,以變換式

$$y=z-\frac{p}{3z} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

代入方程式(2),得 $$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0,$$

卽 $$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此式可作爲 z^3 之二次方程式解之,得

$$z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{R},\qquad R\equiv\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3.$$

設以 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}$ 表 $-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}$ 之立方根之一,則其餘兩根爲

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}} \quad 及 \quad \omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}};$$

此處 ω 表 1 之立方根內之一虛根,其求法如次:

1之三個立方根乃方程式

$$r^3-1=0, \text{或} (r-1)(r^2+r+1)=0$$

之根.方程式 $r^2+r+1=0$ 之二根爲 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\equiv\omega$ 及 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\omega^2$;故

$$\omega^2+\omega+1=0, \quad \omega^3=1 \cdots\cdots(6)$$

由 $(-\frac{1}{2}q+\sqrt{R})(-\frac{1}{2}q-\sqrt{R})=\frac{1}{4}q^2-R=-\frac{1}{27}p^3$

之關係,立方根 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}$ 可選其能使

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=-\frac{1}{3}p$$

者用之.

$$\therefore \omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}\cdot\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=-\frac{1}{3}p,$$

$$\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}\cdot\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=-\frac{1}{3}p.$$

故方程式(5)之六根可分爲三對,各對之積皆等於 $-\frac{1}{3}p$;於是,與任一根 z 相配成對之根爲 $-\frac{p}{3z}$.由(4)知其和 $z-\frac{p}{3z}$ 爲三次方程式(2)之一根.又配成一對之二根均導出同一之 y 值,故(5)雖有六根,祇能導出方程式(2)之三根.更因(5)之任一對根之和皆得(2)之一根,於是,得(2)之三根 y_1, y_2, y_3 之 Cardan 氏公式爲

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}, \\ y_2&=\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}, \\ y_3&=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(7)$$

以 $1, \omega^2, \omega$ 順序乘上列諸式而加之,並引用(6),得

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}=\frac{1}{3}(y_1+\omega^2 y_2+\omega y_3);$$

次改用 $1, \omega, \omega^2$ 順序乘上列諸式而加之,得

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=\frac{1}{3}(y_1+\omega y_2+\omega^2 y_3).$$

如將此兩式之立方差分解為因子,且引用全等式 $\omega-\omega^2\equiv\sqrt{-3}$,得

$$\sqrt{R}=\frac{1}{54}\{(y_1+\omega^2 y_2+\omega y_3)^3-(y_1+\omega y_2+\omega^2 y_3)^3\}$$

$$=\frac{\sqrt{-3}}{18}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1).$$

故(7)之諸根內無理數,皆得以根之有理式表之,此為 Lagrange 氏首先發見之結果也.

函數　$(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2=-27q^2-4p^3$

稱為三次方程式(2)之**判別式**(Discriminant).

普通三次方程式(1)之根為

$$x_1=y_1+\frac{1}{3}c_1,\quad x_2=y_2+\frac{1}{3}c_1,\quad x_3=y_3+\frac{1}{3}c_1;$$

故　$x_1-x_2=y_1-y_2,\ x_2-x_3=y_2-y_3,\ x_3-x_1=y_3-y_1,$

而　$(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)=(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$

$$=\frac{18}{\sqrt{-3}}\sqrt{R}=-\sqrt{-3}\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

習　題

1. 求證 $x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=y_1+\omega^2y_2+\omega y_3$, $x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=y_1+\omega y_2+\omega^2y_3$.

2. 若 $R>0$, 則三次方程式 (2) 有一實根及二虛根;若 $R=0$, 有三實根,且有兩根相等;若 $R<0$, 即所謂不可約款 (Irreducible case), 此時方程

式 (2) 之三根皆爲實根而不相等.

3. 求證三次方程式 (1) 之判別式 $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$ 等於 $c_1^2c_2^2+18c_1c_2c_3-4c_2^3-4c_1^3c_3-27c_3^2$.

提示:用 (3) 及 (8) 以求之.

4. $-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}$ 之三立方根與 $-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}$ 之三立方根次第相加 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}$,共得九式.求證:此九式乃次列三個三次方程式之根.

$$y^3+py+q=0,\ y^3+\omega py+q=0,\ y^3+\omega^2py+q=0.$$

5. 求證: $y_1+y_2+y_3=0$, $y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=p$, $y_1y_2y_3=-q$.

6. 用習題 5,求證: $x_1+x_2+x_3=c_1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c_2$, $x_1x_2x_3=c_3$. 倘欲由方程式 (1) 直接導出此等結果時,其方法如何?

§3. 六次方程式 (Sextic) (5) 之根,若除去因數 $\frac{1}{3}$ 不計外,可列爲

$$\psi_1=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3,\qquad \psi_4=x_1+\omega x_3+\omega^2x_2,$$
$$\psi_2=\omega^2\psi_1=x_2+\omega x_3+\omega^2x_1,\qquad \psi_5=\omega^2\psi_4=x_3+\omega x_2+\omega^2x_1,$$
$$\psi_3=\omega\psi_1=x_3+\omega x_1+\omega^2x_2,\qquad \psi_6=\omega\psi_4=x_2+\omega x_1+\omega^2x_3.$$

此等函數相異之點在 x_1, x_2, x_3 排列次序之不同;三文字共有六種排列,故將函數 ψ_1 內之 x_1, x_2, x_3 予以排列後,即得此等函數之全部;因此,ψ_1 稱爲**六值函數** (Six-valued function).

Lagrange 普通三次方程式 (1) 之演繹的解法,在直接決定六函數 $\psi_1, \cdots, \psi_6$. 此等函數乃六次方程式 $(t-\psi_1)\cdots(t-\psi_6)=0$ 之根,其係數爲 $\psi_1, \cdots, \psi_6$ 之對稱函數,故亦爲 x_1, x_2, x_3 之對稱函數;於是,可以 c_1, c_2, c_3 之有理函數表之.*次因 $\psi_2=\omega^2\psi_1$, $\psi_3=\omega\psi_1$,

---

*關於對稱函數基本定理之證明,見本書附錄內.

∴,由(6),得

$$(t-\psi_1)(t-\psi_2)(t-\psi_3)=t^3-\psi_1^3,$$

$$(t-\psi_4)(t-\psi_5)(t-\psi_6)=t^3-\psi_4^3.$$

故六次豫解式(Resolvent)化爲

$$t^6-(\psi_1^3+\psi_4^3)t^3+\psi_1^3\psi_4^3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

但由§2後之習題 6,

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_4&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(\omega+\omega^2)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\&=c_1^2-3c_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1^3+\psi_4^3&=2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3\\&\quad+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2)+12x_1x_2x_3\\&=3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-(x_1+x_2+x_3)^3+18x_1x_2x_3\\&=2c_1^3-9c_1c_2+27c_3.\end{aligned}$$

故方程式(9)化爲

$$t^6-(2c_1^3-9c_1c_2+27c_3)t^3+(c_1^2-3c_2)^3=0.$$

此式可當作 t^3 之二次方程式解之,得兩根 θ 及 θ',因得

$$\psi_1=\sqrt[3]{\theta},$$

$$\psi_4=\sqrt[3]{\theta'}.$$

此處 $\sqrt[3]{\theta}$ 可選取 θ 之任一立方根,而 $\sqrt[3]{\theta'}$ 之選取則爲 θ' 之一定立方根,要使

$$\sqrt[3]{\theta}\cdot\sqrt[3]{\theta'}=c_1^2-3c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

者用之.遂得次之諸已知式:

$$x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=\sqrt[3]{\theta},$$

$$x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{\theta'},$$

$$x_1+x_2+x_3=c_1.$$

順序以 1, 1, 1 乘此三式而加之;次以 ω^2, ω, 1, 又次以 ω, ω^2, 1

乘而加之,則得(1)之根

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{3}(c_1+\sqrt[3]{\theta}+\sqrt[3]{\theta'}),\\ x_2&=\frac{1}{3}(c_1+\omega^2\sqrt[3]{\theta}+\omega\sqrt[3]{\theta'}),\\ x_3&=\frac{1}{3}(c_1+\omega\sqrt[3]{\theta}+\omega^2\sqrt[3]{\theta'}).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

§4. 四次方程式(Quartic equation)　普通四次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

可化爲 $$(x^2+\frac{1}{2}ax)^2=(\frac{1}{4}a^2-b)x^2-cx-d$$

之形.Ferrari之解法,乃以 $(x^2+\frac{1}{2}ax)y+\frac{1}{4}y^2$ 加於上式之兩端,得

$$(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}y)^2=(\frac{1}{4}a^2-b+y)x^2+(\frac{1}{2}ay-c)x+\frac{1}{4}y^2-d\cdots(13)$$

再求 y 之值 y_1,使(13)之右端成完全平方.設令

$$a^2-4b+4y_1=t^2\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

則右端欲成完全平方,必須

$$\frac{1}{4}t^2x^2+(\frac{1}{2}ay_1-c)x+\frac{1}{4}y_1^2-d=\left(\frac{1}{2}tx+\frac{\frac{1}{2}ay_1-c}{t}\right)^2,$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}y_1^2-d=\left(\frac{\frac{1}{2}ay_1-c}{t}\right)^2=\frac{\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)^2}{a^2-4b+4y_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

故 y_1 必爲三次方程式

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-a^2d+4bd-c^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

之一根,此方程式稱爲四次方程式(12)之豫解式.

由(15),方程式(13)可析爲兩二次方程式

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}t\right)x+\frac{1}{2}y_1-\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)\Big/t=0\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}t\right)x+\frac{1}{2}y_1+\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)\Big/t=0\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

設 x_1 及 x_2 爲(17)之根,x_3 及 x_4 爲(18)之根,則有

$$x_1+x_2=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}t,\quad x_1x_2=\frac{1}{2}y_1-\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)\Big/t,$$

$$x_3+x_4=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}t,\quad x_3x_4=\frac{1}{2}y_1+\left(\frac{1}{2}ay_1-c\right)\Big/t.$$

若加減之,得

$$x_1+x_2-x_3-x_4=t,\quad x_1x_2+x_3x_4=y_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

解(17)及(18)兩式,得兩根數 (Radical),其一等於 x_1-x_2,他一等於 x_3-x_4 (參看§1).故普通四次方程式根內所含之無理數,爲根之有理函數.

設不用 y_1,而以三次豫解式(16)之他根代之,則得與(17)、(18)不同之其他二次方程式,其四根仍爲 x_1, x_2, x_3, x_4,惟其各對配合,與前相異.故(16)之三根可推定其爲

$$y_1=x_1x_2+x_3x_4,\ y_2=x_1x_3+x_2x_4,\ y_3=x_1x_4+x_2x_3\cdots\cdots(20)$$

事實上,由次節之證明,知此種推測,確當無誤.

§5. 從有理函數 $x_1x_2+x_3x_4$ 及 $x_1+x_2-x_3-x_4=t$,亦可求得兩二次方程式,其根卽爲普通四次方程式(12)之四根,而不必借助於 Ferrari 之方法.蓋(20)內三量乃 $(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=0$,或

$$y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y-y_1y_2y_3=0\cdots\cdots(21)$$

之三根,其係數可以 a, b, c, d 之有理函數表之:*

$$y_1+y_2+y_3=x_1x_2+x_3x_4+x_1x_3+x_2x_4+x_1x_4+x_2x_3=b,$$

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=-4x_1x_2x_3x_4+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1x_2x_3$$
$$+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)=ac-4d,$$

*此因(見於§29之例2及§30) x_1, x_2, x_3, x_4 之任一排列,祇變換 y_1, y_2, y_3 之順序,故 y_1, y_2, y_3 之對稱函數,亦卽爲 x_1, x_2, x_3, x_4 之對稱函數,卽可以 a, b, c, d 之有理函數表之.