天文航海计算原理

王安国　王海亭

中国人民
解 放 军　海军大连舰艇学院

一九九四年二月

天文航海计算原理

编　著：王安国　王海亭
校　对：王安国　王海亭
打　字：王冬梅
开　本：16　开
字　数：40　万
印　刷：海军大连舰艇学院印刷厂

价格：16.00元

前　言

天文定位作为远岸航行时的一种基本定位方法，具有独立性强、隐蔽性好、仪器简便、精度较高等显著优点。在导航技术电子化的现代，天文定位仍旧是航海人员必须掌握的基本方法。然而，由于计算方法繁难、观测手段落后，观测条件受限，天文定位一度受到人们的冷落。

随着计算机技术的发展，天文定位的自动解算已经实现。并且由于电子技术及微光夜视技术的使用，宜于推广的新型观测仪器正在孕育。天文定位的观测手段正向自动化迈进，观测条件的制约也在逐步消除。我们高兴地看到，天文定位这一古老的定位方法正焕发出新的生机。

在此新形势下，我们在深入部队调研的基础上，通过大量地消化和吸收国内外有关理论著述，结合我军的实际情况及业务长培养计划的客观要求，围绕天文船位的自动解算问题，编写出了本书，以满足业务长班教学需要。

本书第一篇由王海亭同志撰写，第二篇及第三篇由王安国同志撰写，并由王安国同志统稿。教保处王冬梅同志进行文字输入。

在本书编写过程中，曹助雁教授及司徒杰教授给予了热情支持，并提供了若干具体的指导。教研室其他同志及教保处有关同志在本书编写、出版过程中给予了大力的支持，在此一并致谢。

由于成书时间十分仓促，书中错谬在所难免，祈望读者不吝赐教。

编　者

目　录

第一篇　航海数学

第二篇　天文学基础

第三篇 天文航海数学模型

附　录

第一篇　航海数学

第一章　数值计算

在实践中，绝对准确的观测和度量是没有的。任何测量值，按其本质来说，都含有一定的误差，永远是近似值，即使是一些无理数，如π、e和$\sqrt{2}$等，尽管可以根据人们的要求，要多么准确就取小数多少位，但在实用中，总是取有限的小数位，因而仍然是个近似值。由此可见，数值计算通常都是近似计算。那么如何进行数值处理和计算才是科学的态度，才能既不无缘无故地降低计算结果的准确度，又不致盲目地进行冗长而又繁杂的运算等问题就摆在我们面前了。

本章拟从航海数值计算的实际需要出发，简要阐述一些有关数值计算的基本概念和常用方法。

第一节　有效数字与凑整

一、有效数字

在航海实践中，观测值和计算结果一般都是近似值，其末位总是由凑整得来，包含着末位数半个单位的误差。例如，六分仪测微装置上的游标尺，其设计最小刻度为0′.2，所以用六分仪观测一个角度的读数值就可能包含0′.1的误差。为了说明一个近似值的准确程度，我们引进有效数字的概念。

设某一量的真值L的近似值L′的误差限是其某一位上的半个单位，且该位直到L′的第一位非零数字一共有n位，则称近似值L′有n位有效数字。也就是说，近似值应取多少位必须以它的极限误差为依据，当近似值某一位的半个单位大于极限误差，再多取一位时它的半个单位又小于极限误差，那么从该位算起到第一个非零数字为止，若有n位数字，则该近似值称为是有n位有效数字的有效数。近似值中有效数以外的数字称为安全数字。即这些数字是不大可靠的，为使用该数安全之故而提供参考的数字。

例如：对于L＝π＝3.1415926……，当近似值L′＝3.14时，它有三位有效数字；当L′＝3.1416时，它有五位有效数字；而当L′＝3.1415时，它只有四位有效数字。

关于数字“0”是否有效数字，须看它所处的位置而定，当“0”处于第一个非零数字之前，则不是有效数字。当“0”处于非零有效数字之间或在非零有效数字末尾，都是有效数字。当“0”处于非零有效数字末尾，受有效位数限制时，应写为指数形式。例如：7800米和78×10^2米两数的精度是不同的，前者具有四位有效数字，其误差限为0.5米，而后者只有两位有效数字，其误差限为50米。由此可见，在记录某一观测结果或引用某数据时，不应随便变更其表达方式。

二、凑整

在测量或数值运算中，为避免追求虚构的精确度，一般都根据实际要求保留最必须的有效数字。特别对一些无理数，更要根据实际需要截取有限的位数。这种舍去多余尾数的方法称为凑整。

凑整的规则是：“四舍、六入、五凑双”。即当舍去部分的数值大于所保留的末位

数的0.5个单位，则末位加1；当舍去部分的数值小于所保留的末位数的0.5个单位，则末位不变；当舍去部分的数值等于所保留的末位数的0.5个单位，则末位应凑成偶数。即末位为偶数不变，末位为奇数加1。

例如：将下列数字凑整到小数点后第三位有效，凑整前后对照如下：

3.14159——————3.142

2.71829——————2.718

4.51050——————4.510

3.14150——————3.142

7.69149——————7.691

9.4864——————9.486

9.4716——————9.472

9.4225——————9.422

9.4315——————9.432

上述凑整规则可以使数字在运算中的多次舍入不致造成过大的累积误差，这是因为：有效数末位以后的第一位数字取0，1，2，3，4，5，6，7，8，9的机会均等，按照凑整规则，末位后舍去的数为1，2，3，4，进入的数为6，7，8，9，可见舍去与进入的概率相等，所以舍入多次互抵，不致使舍入误差积累过大。至于末位数后为5时，根据凑整规则，末位数为奇数进1的概率与末位数为偶数舍去的概率亦相等，所以舍入多次互抵。

三、凑整误差及其性质

由于数字的取舍而引起的误差称为凑整误差。凑整误差在数值上等于精确值减去凑整值。根据凑整规则，凑整误差的大小不会超过凑整后近似值末位的0.5个单位，这一界限称为最大凑整误差。任何近似数的最大凑整误差可表达为：

$$\text{最大凑整误差} = \pm 0.5 \times 10^{\pm n}$$

其中(+n)指末位有效数字的整数位，(−n)表示末位有效数字的小数位。

根据统计学原理，可以得出凑整误差是一个随机量的结论，通过大量实验证明：

1、凑整误差可正可负，正负误差出现的机会相等；

2、凑整误差不超过凑整后近似数末位的0.5个单位。

3、在最大凑整误差的界限内，小误差与大误差出现的机会相等。

四、近似数运算中的凑整误差

首先讨论凑整误差对各种运算结果影响的规律，进而根据其特点确定比较合理的凑整原则。

1、加减运算

设有四个凑整后的数字相加

$$\begin{array}{r@{}l} 60.4 & ? \\ 2.02 & ? \\ 0.222 & ? \\ +\ 0.0467 & ? \\ \hline 62.6887 & ? \\ ???? & \end{array}$$

其中“?”表示该位含有凑整误差，从这个算式中可以看出，第一个数可能有0.05的凑整误差，所以在总和中小数点后第二位已经不可靠，因此在计算结果中取至小数点后第四位是没有意义的。所以，计算结果应以参加运算数中小数位数最少者为准，其它参加运算各数，多保留一位参加运算，其目的是为了不使因凑整而影响运算结果的精度。多保留的一位数字称为安全数字。减法的情况与此相同。需要指出的是两个值相近的近似数相减，可能会造成有效数字的严重损失，实际计算时应尽量避免这种情况发生。

2、乘除运算

设有两个凑整后的数相乘

```
      232.12?
  ×     0.34?
---------------
      ??? ???
     9284 8?
    69639 ?
---------------
    78.9208??
       ??????
```

从如上算式中可见，乘积中的第三个数字“9”已不可靠，保留更多的位数是没有意义的。这是因为因子“0.34”只有两位有效数字，所以乘积也只有两位数字有效。除法的情况与此相同。由此可见，对于乘除法运算，应以其中有效数字位数最少的为准，其余参加运算各数及积或商，均舍入成比最少有效数字多一位的数而与小数点位置无关。

例如：(603.21×0.32÷4.011)，如按上述规则运算，则应凑整为(603×0.32÷4.01=48.1)。

限于篇幅，以上所介绍的只是比较简单情况下的基本原理，对于大量的近似值运算，其数字的取舍和凑整值的可靠程度等问题，都是比较复杂的，需要根据具体情况进行具体的分析。

第二节　内插计算方法

航海上的一些数值计算，经常用到各种计算表册，例如：航海表，天体高度方位表，航海天文历等等。这些表一般都是按等间距或不等间距的一系列自变量作为引数，列出其相应的函数值，所谓内插计算就是用这样的表计算某区间任意引数所对应的函数值的计算方法。航海数值计算中常用的有比例内插、变率内插和高次内插。

一、比例内插

比例内插是内插计算中最简单的一种内插方法，又称线性内插法，根据自变量的个数可分为单内插、双内插和三内插。

1、比例单内插

设某函数表是根据一元函数$y=f(x)$一系列等间距自变量x_0，x_1……x_n作为引数，列出其一一对应的函数值y_0，y_1……y_n构成。如果相邻两自变量的表列间隔足够小，则不论该函数的性质如何，在给定区间内及在容许的误差范围内可把函数视为线性函数，

即假设在该相邻两引数区间内，表列函数的变化与自变量的变化成比例，这样该表就可以按比例进行内插。

设表2－1中的y_0，y_1是$y=f(x)$对应于x_0，x_1的函数值，如果在误差的容许范围内，可用线性函数$y=p(x)$近似表示该函数。

表2－1

引　数	函　数　值
x	y
x	y

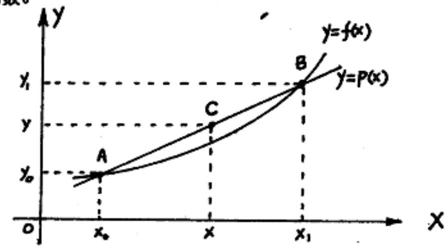


图2－1

从几何图形看，$y=p(x)$表示通过两点$(x_0,\ y_0)$和$(x_1,\ y_1)$的直线。如图2－1所示。

根据解析几何关于直线方程的知识，可以用点斜法写出$y=p(x)$的表达式为：

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \qquad (2-1)$$

式中x_1-x_0称为表列间距；y_1-y_0称为表差；$x-x_0$称为内插间距或内插步长。

结合几何图形不难看出：当表列间隔较小即$x_1\to x_0$时，利用比例内插而导致的误差就较小，反之亦然。

例如：已知$\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，求$x=115$的平方根。

适合所给的函数表为：

引数x	函数y
100	10
121	11

即$x_0=100$，$x_1=121$，$y_0=10$，$y_1=11$

根据内插公式得：

$$y=10+\frac{11-10}{121-100}(x-100)$$

用$x=115$代入，求得$\sqrt{115}$的近似值为：

$$y=10.71428$$

已求得$\sqrt{115}$取六位小数时等于10.723805，可见，如上线性插值的结果有三位有效数字。

2、比例双内插

当函数含有两个自变量时，如$z=f(x, y)$，则必须用双内插求解

比例双内插的具体步骤可通过如下例题加以说明。

设某一物标高$h=13.4$米，测得其垂直角为$\alpha=4'.4$，表2－2是航海表中“垂直角求距离表”的一部分，按该表用比例双内插求水平距离D。

表2－2

α(分) \ D(海里) \ h(米)	10	20	30	40
2	9.3	18.5	27.8	37.1
3	6.2	12.3	18.6	24.7
4	4.6	9.3	13.9	18.6
5	3.7	7.4	11.1	14.9

解法一：

(1)当$\alpha=4'$，$h=13.4$时

$$D_4=D_0+\frac{D_1-D_0}{h_1-h_0}(h-h_0)=4.6+\frac{9.3-4.6}{20-10}(13.4-10)=6.2\text{海里}$$

(2)当$\alpha=5'$，$h=13.4$米时

$$D_5=D_0+\frac{D_1-D_0}{h_1-h_0}(h-h_0)=3.7+\frac{7.4-3.7}{20-10}(13.4-10)=5.0\text{海里}$$

(3)当$\alpha=4'.4$时，从D_4，D_5中比例内插得：

$$D=D_4+\frac{D_5-D_4}{\alpha_1-\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)=6.2+\frac{5.0-6.2}{5-4}(4.4-4)=5.7\text{海里}$$

解法二：

以最接近α，h实际数值的表列引数为基准，进行比例内插。所以有：

$$D=4.6+\frac{9.3-4.6}{20-10}(13.4-10)+\frac{3.7-4.6}{5-4}(4.4-4)=4.6+1.6-0.4=5.8\text{海里}$$

式中第一项为最接近α，h实际数值的表列引数$\alpha=4'$，$h=10$米所对应的距离$D_0=4.6$；第二项为$\alpha=4'$，$h=13.4$米时的比例插值；第三项为$h=10$米，$\alpha=4'.4$时的比例插值。

而本题按公式实际计算得：

$D=13.4(\text{米})\times ctg4'.4=5.7(\text{海里})$

由此可见，如上两种解算方法各有千秋，前者比后者精确度高，而后者又比前者过程简便。在航海上通常采用第二种方法已能满足精度要求。

顺便指出，函数如果有三个自变量，则需进行三项比例内插。例如，用《天体高度方位表》求天体的方位计算天测罗经差，就是具有三个自变量的一个实例，其计算的原

理和方法与上述完全相同，不再赘述。

二、变率内插

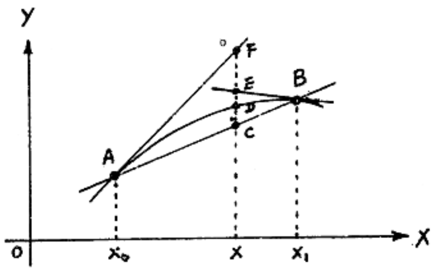
1、变率单内插

在比例内插中，我们已推导出公式(2－1)，式中$\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，实际上是x_0到x_1之间函数的平均变化率。所以，比例内插事实上是平均变率内插。对于有些函数，其变化率并不均匀，如果还按平均变率内插即比例内插，将导致较大的内插误差。因此，对这样的函数在制表时，函数旁边所列的数值就不是表差或平均变率，而是对应于该函数本身的变率。

结合比例内插公式，当$x_1 \to x_0$时，$\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$趋近于函数$y=f(x)$在X_0处的导数值$f'(x_0)$，该值即为函数在x_0处的变率。由此可见，变率内插的公式可表达为：

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2-2)$$

变率内插的几何意义可以从图2－2中看出，和比例内插中以弦代替曲线类似，变率内插是以过A、B点的切线代替曲线。若以过A点的切线内插，误差为DF，而以B点的切线内插，误差则为DE。由此可见，用靠近所给引数的表列引数的变率作为基准计算是较准



(图2－2)

确的，这是使用变率内插时应特别注意的一点。

例如：设某年天文年历中每天太阳赤纬及其变化率如表2－3所示， 试求5月8日20时的太阳赤纬。

表2－3

时　间	太阳赤纬	每小时变量
5月8日0时	16° 56′48″·3N	＋41″·20
5月9日0时	17° 13′06″·5N	＋40″·32

解：

(1)按5月8日0时的变率计算：

太阳赤纬 $\delta_{\odot}=16°\ 56'48''\cdot3+41''\cdot20\times20=17°\ 10'32''\cdot3N$

(2)按5月9日0时的变率计算：

太阳赤纬 $\delta_{\odot}=17°\ 13'06''\cdot5-40''\cdot32\times4=17°\ 10'25''\cdot2N$

(3)按比例内插计算：

太阳赤纬

$$\delta_{\odot}=16°\ 56'48''\cdot3+\frac{17°\ 13'06''\cdot5-16°\ 56'48''\cdot3}{24}\times20=17°\ 10'23''\cdot5N$$

可见三种方法计算的结果各不相同，而直接计算的结果是17° 10′24″·9N。所以用最接近于5月8日20时的表列引数5月9日0时的变率计算最为准确，比例内插次之，而用5月8日0时的变率计算误差最大。

2、变率双内插

若函数是二元的，且变化不均匀，则必须用变率双内插。

设函数为：$Z=f(x,\ y)$

全微分得：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

变为全增量：$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$　　(2—3)

其中：Δz为变率双内插值。

Δx、Δy为内插间距$(x-x_0)$和$(y-y_0)$

$\frac{\partial z}{\partial x}$以y为常数时函数z在$x_0$处的变率。

$\frac{\partial z}{\partial y}$以x为常数时函数z在$y_0$处的变率。

显然，式2—3右边第一项是函数对引数x的变率内插，第二项是对引数y的变率内插，所以变率双内插的公式可表达为：

$$z=z_0+\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)\qquad(2-4)$$

其中$z_0=f(x_0,\ y_0)$。

天文航海中使用的“天体高度方位表”所列的Δd，Δt，就是天体高度对于自变量δ和t的变率，其具体计算过程正是采用了变率双内插。

例如：设某测者纬度$\varphi=24°$ N，$\delta_{\odot}=14°\ 10'N$，$t_{\odot}=25°\ 15'$，求太阳的计算高度。

$\varphi=24°$ N　　　　表2—4

δ \ t	14° N			
25°	高度 64° 23′·4	△d +0.45	△t −0.87	方位 108.4

解：

表2－4为天体高度方位表第三册的部分节录。根据编表原理，$\triangle d$是函数(高度）对引数(赤纬)在δ_0处的变率；$\triangle t$是函数(高度)对引数(时角)的变率，由于时角的变化比较均匀，所以实际列出的是($\frac{h_1-h_0}{t_1-t_0}$即$t_0\sim t_1$之间的平均变率。所以太阳的计算高度

$$h=h_0+\triangle d(\delta-\delta_0)+\triangle t(t-t_0)$$

即$h=64°\ 23'.4+0.45(14°\ 10'-14°)-0.87(25°.5'-25°)=64°\ 14'.9$

三、高次内插

通过对比例内插和变率内插的讨论，不难看出，二者均属线性内插。所以对于非线性函数来说都是近似计算，若欲提高计算精度，则必须缩小表的间距，这样表的篇幅就会成比例地增大，既不经济又增加查表的麻烦。因此必须采用新的方法即高次内插法。

为了推导高次内插公式，我们首先建立差分的概念。

设函数$y=f(x)$，在自变量某一区间有任意阶导数，就可以足够准确地将$y=f(x)$展开成泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+b(x-x_0)^2+c(x-x_0)^3+\cdots\cdots \qquad (2-5)$$

如果能准确定出系数a，b，c……，那么根据靠近x的某一表列引数x_0及其所对应的函数数值$f(x_0)$，就可以求出x的函数值$f(x)$。

设x_0，x_1为靠近且分别大于和小于x的表列引数，并令$\omega=x_1-x_0$为表间距，

$n=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-x_0}{\omega}$ 为内插因子，则有：

$$x=x_0+n\omega \qquad (2-6)$$

将(2－6)式代入(2－5)式得

$$f(x)=f(x_0+n\omega)=f(x_0)+an\omega+bn^2\omega^2+cn^3\omega^3+\cdots\cdots$$

因为对于等间距函数表来说ω为常数，所以，上式可代换为：

$$f(x)=f(x_0)+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots \qquad (2-7)$$

式中代替自变量x的是变量n，所以，可以根据表列函数值定出系数A，B，C……，从而求出f(x)的值。

设某函数表是表间距为ω的等间距表，当n为整数时，(2－7)式就是代表各表列引数及其对应的函数。

根据航海上的精度要求，一般将(2－7)式取至二次项即可。即：

$$f(x)=f(x_0)+An+Bn^2 \qquad (2-8)$$

现令n＝－2，－1，0，＋1，＋2；并以$\triangle^{I}$，$\triangle^{II}$，$\triangle^{III}$分别表示函数的一次差($\triangle^{I}=f(x)$之差)，二次差($\triangle^{II}=\triangle^{I}$之差)，三次差($\triangle^{III}=\triangle^{II}$之差)，则可构成如下差分表：