复合材料力学
导编

复合材料力学导論

（美） 蔡为仑　赫·汤姆斯·韩　著

译者　于德昌　李顺林　王山根　许风和　毛镇夷

校者　沈嗣唐　李顺林

第三机械工业部科学技术情报研究所

一九八〇年十二月

译 序

为适应我国复合材料发展的新形势，我们翻译了美国 1980 年5月出版的《复合材料力学导论》一书。本书主要介绍了纤维增强复合材料刚度和强度的基本原理，深入浅出地阐述了刚度和强度的分析与计算、湿热效应以及微观力学。这套分析方法简明易懂，对我国从事复合材料力学分析、材料性能和结构设计等有关科技人员均有参考价值。此书是一本复合材料力学的入门书，因此也可以作为大专院校有关专业的教材。

参加本书译校工作的同志分工如下：第一、三章由王山根同志译，王连玉同志作了部分协助；第二、四章由于德昌同志译；第五、八章由李顺林同志译；第六章由许风和同志译；第七、九章由毛镇夷同志译。全书经李顺林同志校对，又经沈嗣唐同志复校。

这一中译本原根据蔡为仑博士在北京讲学的讲稿翻译，九月中旬又得到蔡博士赠给今年出版的新书，才把原译稿作了许多补充和修改，由于时间仓促，加之我们水平所限，译本中还难免有不少缺点和错误，请读者批评指正。

译者

1980.9.30.

目　录

前　言

本书的目的是介绍单向和多向复合材料刚度和强度的基本原理。这本书是为大学生和大学毕业生编写的一本教材，也可供工程技术人员参考。材料力学课程为阅读本书提供必要的基础知识。

我们想说明复合材料在概念上是简单的。复合材料不仅是比通常材料更轻的代用材料，而且在设计方面还具有独特的优点。复合材料的结构性能比通常材料广泛得多。充分了解有关复合材料结构行为的原理便能在设计中利用其广泛的结构性能。阐明这些原理便是本书的主要内容。

我们的方法是用大量统一的和常用的公式来阐明问题。书中尽量采用封闭解法和简化的公式。全书用图表的形式给出了一种典型复合材料的数字结果。由于我们这本书自成体系，所以只在引用一组有关数据和公认的概念时，或在文中省略详细推导时才给出参考文献。若有疏忽之处，我们在此表示歉意。我们高兴地看到混合法则方程应用于许多场合。我们认为，如果把材料性能和几何因子尽量分开，就能更清楚地表述基本原理。最后，读者将发现转换方程和组合应力状态是复合材料研究中的主要概念。

除九章正文外，前言后有专门一节的符号和术语。每章结尾，列有本章主要符号说明。转换方程归纳在附录 A 中；单位换算表列于附录 B；英文参考文献列于附录 C。

本书是在我们过去写的几份美国空军研究报告的基础上写成的。我们感谢我们的同事们所给予的宝贵帮助。曾有机会在伯克利加里福尼亚大学的复合材料计算讲习会，以及在斯图加特、东京、大阪、北京和其他等地的讲习会上进行讲学并向与会学者学习，对此表示衷心的感谢。书中的公式用小型程序计算器即可方便地解出。这种程序可向作者索取。

蔡为仑

赫·汤姆斯·韩

1980.5.

符 号 与 术 语

选用符号和术语可能会造成混淆。我们所选用的定义、说明和格式列举如下：

·使用工程剪应变时需要应用缩写符号。（参看表 1.3）。

·正轴单向复合材料的泊松比是由（1.5）和（1.6)式定义的；而偏轴泊松比在表 3.15 中。它们和现有文献中的定义是不同的。

·坐标转换角和铺层方向角具有相同的符号。在方程式中与适当的符号相结合，应力和应变（行为量）的转换是从参考轴到材料对称轴。材料的模量、柔量、膨胀系数和其他材料性能参数的转换则是从材料的对称轴到参考轴；与行为量是相反的。附录 A 列出了各种转换方程，以示区别。

·（4.1）和（5.1）式中的层合板标记是按照从底层向顶层的上升顺序。

·均衡层合板的意思是，每一偏轴铺层或铺层组是与另一个具有相反铺层方向的铺层或铺层组正好相配的。这只对面内模量才有意义。均衡层合板按其面内行为是正交各向异性的，但按其弯曲行为不是正交各向异性的。

·除了传统的泊松比以外还有耦合系数。61 和 62 分量是剪切耦合系数；16 和 26 是法向耦合系数。这些系数如在表 3.15 中所示，可用于偏轴单向复合材料，并在（4.18）和（5.23）等式中用于对称层合板。这些系数都看作工程常数。对于一般层合板是沒有与此可比较的系数的。这些层合板具有由 B 或 β 矩阵所确定的面内和弯曲行为之间的独特的耦合作用。

·（5.9）式中曲率-位移（k－w）关系必须是负号。扭率必须有因子 2，以便与工程剪应变相一致。

·在许多情况下利用对称性：

a．材料性能的对称性或互等性：

$Q_{ij}=Q_{ji}$，$A_{ij}=A_{ji}$，等等。

b．材料在结构方面的对称性：

各向异性；正交各向异性；

正方对称；各向同性。

c．材料性能转换的奇数和偶数的对称性：

$$Q_{11}(\theta)=Q_{11}(\theta+n\pi)；\ Q_{66}(\theta)=Q_{66}\left(\theta+\frac{n\pi}{2}\right)；$$

$$Q_{16}(\theta)=-Q_{16}(-\theta)等。$$

d．层合板的中面对称性：

对称层合板：$\theta(z)=\theta(-z)$

非对称层合板：$\theta(z)\neq\theta(-z)$

反对称层合板：$\theta(z)=-\theta(-z)$

·剪切往往容易搞错：

纵向剪切：σ_S 或 ε_S

第一章

单向复合材料的刚度

单向复合材料的刚度，象其他任何结构材料一样，可以用适当的应力-应变关系式来定义。我们要阐明的问题是关于这些关系式中的系数或材料常数可由一组工程常数、柔量分量或模量分量来组成。其中任何一组分量都可直接用另外一组分量来表示。单向复合材料的刚度可由通常材料也适用的应力-应变关系式来决定，只不过复合材料的独立常数为四个，而通常材料的独立常数为二个。

1. 应力

应力是物体內力的一种度量。应力与应变一起是决定材料刚度和强度的基本变量。材料变形和失效的机理也能用应力和应变的状况来说明。应力和应变是表述材料力学性能的基本变量，如同热传导中的溫度和热量，气体中的压力、体积和溫度一样。

应力是无法直接测量的。但应力可以从下列方法中推算出来：

· 根据作用的外力并用应力分析来求出应力。

· 根据测量的位移也用应力分析来求出应力。

· 根据测量的应变再用应力-应变关系式来求出应力。

当我们讨论应力的时候，通常指的是某一物理度量內的平均应力。这象一个城市、一个国家、或一个地区统计的人口。在我们研究的复合材料中将涉及到的平均应力有三种标准。

· 微观力学应力或局部应力是基于性质完全不同的连续的纤维相与基体相来计算的应力，在某些情况下，还要考虑界面和空洞来计算。

· 铺层应力的计算是基于假定每一铺层或铺层组是均匀的，即把纤维和基体混成一体而不再视为性质不同的两个相。

· 层合板的应力合力 N 或力矩 M 是层合板厚度方向上铺层应力的平均值。而单个铺层的

纵向剪切模量：E_S

纵向剪切强度：S

面内剪切：N_6

在本书中不涉及也不讨论层间或横向剪切（σ_{XZ} 和 σ_{YZ}）。

· 正如（7.48）式，强度比是许用应力或应变与作用应力或应变的比。这不要与设计手册中所使用的应力比搞混淆了。应力比是强度比的倒数。两者都使用符号 R。

· 如果下标和上标的意义已经很明显，其符号可以省略掉；如 U_1 在第三章中指 U_{1Q} 或 U_{1S}，在第四章中指 U_{1A}，而在第五章中指 U_{1D}。

· 数值结果由于最后一位舍入误差，也许会存在不相同的情况。在计算的中间步骤不必经常去修正指数或单位。但是最后一步应是具有正确单位的正确答案。

应力是分不清的。

在图 1.1 中我们给出了这平均应力的两种理想化的模型。在微观力学标准的模型（a）中，纤维和基体的应力在每一个连续相里是逐点变化的。这些应力的平均值就是铺层应力。在一个层合板里或在宏观力学标准的模型中，每一铺层或铺层组具有它自身的铺层应力。不同铺层应力的平均值就是该层合板的应力或应力合力 N。

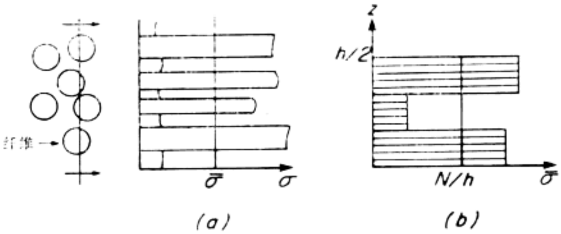

图 1.1　局部应力和平均应力之间的示意关系

(a) 微观力学标准的模型，可分辨出纤维和基体中的应力。这应力平均值就是铺层应力。

(b) 宏观力学标准的模型，可分辨出铺层和铺层组的应力。这应力平均值就是层合板应力

在本书中我们将使用缩写符号。对于应力和应变将采用单一下标，对于柔量和模量采用双重下标。在表 1.1 中给出了通常的或张量的符号和缩写符号。

单一的下标体系能很容易地推广到以后要引入的指标表示法里。为此用下标 s 或 6 来标志 x-y 面的剪切分量。剪切分量用下标 6 是由三维应力的 6 个分量引出来的。虽然有时用下标 3 来表示这剪切分量，然而，因为下标 3 也可用于三维问题中表示第三个正应力分量，故用下标 3 是容易发生混淆的。而用下标 6 就避免了这种混淆。

表 1.1　用缩写的符号表示应力分量

通常的或张量的符号				缩写符号
σ_x	σ_{xx}	σ_1	σ_{11}	σ_x 或 σ_1
σ_y	σ_{yy}	σ_2	σ_{22}	σ_y 或 σ_2
σ_{xy}	σ_{xy}	σ_{12}	σ_{12}	σ_s 或 σ_6

在一个铺层或铺层组中的应力状态主要是平面应力状态。平面应力状态的非 0 分量列在表 1.1 中。其余的三个分量是次要的和局部性质的应力，故在本书中将不予论述。为了方便起见，用三维应力空间来表示平面应力状态，三个正交轴对应三个应力分量。应力空间由图 1.2 所示。这里，由三个应力分量表示的每个作用应力能够很容易地在这三维空间中用一个矢量表示出来。表示作用应力方向的单位矢量用通常的符号来表示：

$$(\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$$

而单位矢量的分量就是方向余弦。所有三个单位矢量示于图 1.2 中。关于简单应力状态的典型单位矢量列于表 1.2 中。当我们讨论复合材料时，必须严格遵守正负符号规则。拉伸强度和压缩强度可以相差百分之几百。而且复合材料正负剪切强度之间还可能有较大的差别。对于通常的材料，符号的正负常常是不重要的。但对复合材料却是很关键的。因而我们必须正确地表达它。当我们研究复合材料时，必须遵守这个符号规则。

表 1.2　简单应力状态的单位矢量

应力型式	单位矢量	图号
纵向拉伸	（1，0，0）	1.3
纵向压缩	（－1，0，0）	1.3
横向拉伸	（0，1，0）	1.4
横向压缩	（0，－1，0）	1.4
正纵向剪切	（0，0，1）	1.5
负纵向剪切	（0，0，－1）	1.5

在图 1.6 中详细地给出了符号规则。在图（a）中所有的分量是正的；而在图（b）中所有的分量是负的。对于法向分量，要认识其符号规则是不成问题的。然而对剪切分量要困难些，其符号规则是：如果剪切分量作用在正面上并且指向正的轴向，那么剪切分量为正；或者，剪切分

量作用在负面上并且指向负的轴向，则剪切分量依然为正。因此，面向和指向均为正或负，则剪切分量为正。若一正一负，则剪切分量为负。

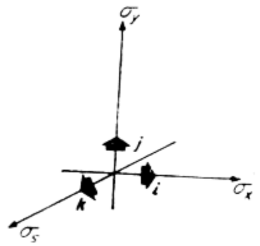

图 1.2　三维应力空间中的应力分量。单位应力矢量由箭头标出

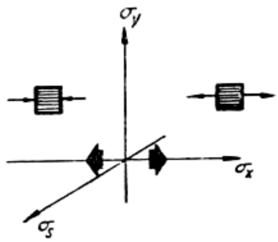

图 1.3　拉伸和压缩时纵向单轴应力。各单位矢量是（±1，0，0）

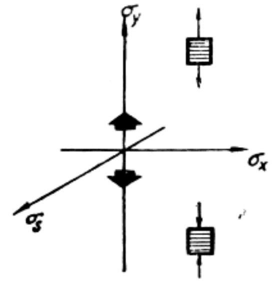

图 1.4　拉伸和压缩时横向单轴应力。各单位矢量是（0，±1，0）

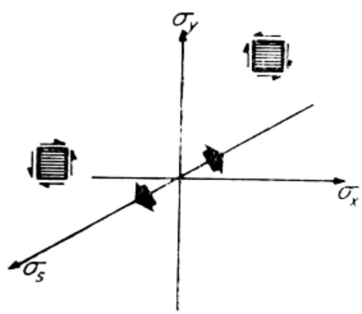

图 1.5　正、负纵向剪切。各单位矢量是（0，0，±1）

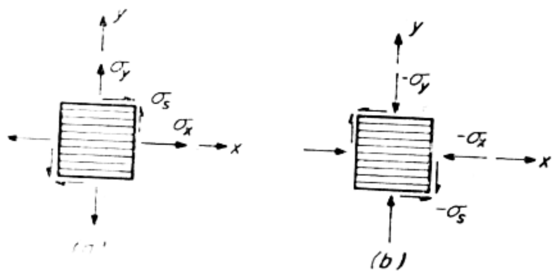

图 1.6　应力分量的符号规则
(a) 给出的所有分量为正，
(b) 给出的所有分量为负

2. 应变

平面内的相对位移将引起二维应变。如果在材料中一点到另一点的位移均沒有变化，那么只有刚体运动而无应变。因此，应变只不过是位移的空间变化，它不涉及材料的性能。应变和位移有关，二者均为几何量。

从应变的定义出发，我们就能作出应力-应变关系式。应力-应变关系式中的常数就是复合材料的刚度。这个方法和通常的材料是一样的。

设　Δu = 沿 x 轴的无限小的相对位移

　　Δv = 沿 y 轴的无限小的相对位移

根据图 1.7 我们可定义

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1.1)$$

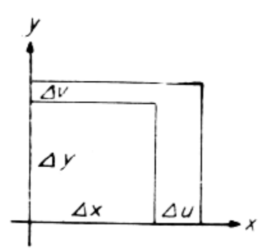

图 1.7　正应变和位移的关系

由于位移是 x 和 y 两坐标的函数，故使

用偏微分。应变象应力一样是一种局部性能。通常，它在材料中随不同点是变化的。只是在特殊情况下应变或应力是不变的；我们称这种情况为均匀应变或均匀应力。这种特殊情况是与性能测试有关的，因为做试验我们总要力求产生一种简单的均匀应变或应力。

注意正应变分量是与无限小单元体的长度改变有关的。发生正应变的矩形单元体尽管它的长度和宽度可能改变，但依然是矩形。正应变分量不会引起畸变。畸变要用角的变化来度量。原来的矩形单元体可畸变为平行四边形。在几何上，这种变形相当于拉长一个对角线和压缩另一个对角线。此组合作用即产生畸变，而用剪应变来度量这种畸变。图 1.8 表示引起（1.1）式正应变的相同位移的组合作用。需求的剪应变是：

$$\varepsilon_S = a + b \tag{1.2}$$

式中：

$$a = \tan a \cong \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$b = \tan b \cong \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.3}$$

由此得到应变、位移的关系是

$$\varepsilon_S = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.4}$$

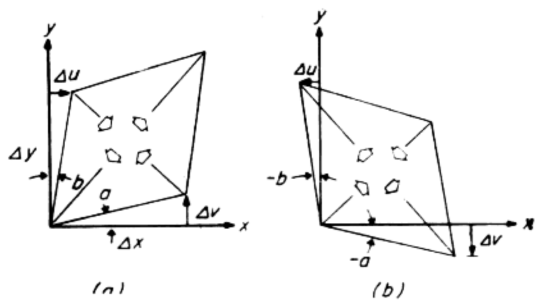

图 1.8 剪应变的应变-位移关系。箭头表示对角线的拉伸和压缩。在图（a）中剪应变为正，在图（b）中剪应变为负

这是工程剪应变，其为张量剪应变的两倍。因为工程剪应变是测量直角的总变化量，或者在棒材扭转下测量总的扭转角，故采用这工程剪应变较方便。因子 2 往往是两种剪应变发生混淆的根源。当有怀疑时，最好用（1.4）式的应变-位移关系来澄清一下。

应变分量象应力一样，也可采用缩写符号。通常的或张量的应变分量和缩写的应变分量之间的转换表列入表 1.3 中。

表 1.3 应变分量缩写符号

通常的或张量的应变				缩写符号
ε_X	ε_{XX}	ε_1	ε_{11}	ε_X 或 ε_1
ε_Y	ε_{YY}	ε_2	ε_{22}	ε_Y 或 ε_2
$2\varepsilon_{XY}$	$2\varepsilon_{XY}$	$2\varepsilon_{12}$	$2\varepsilon_{12}$	ε_S 或 ε_6

应变矢量也可在应变空间中描述。因为正应变分量之间有耦合作用，即所谓泊松效应，对单轴应力的反应将产生双轴的应变状态。例如，通常材料和单向材料如果作用为单轴拉伸应力，则产生纵向伸长与横向缩短的耦合。在图 1.9 中，我们将给出单位应变矢量。在（a）和（b）中的这种单位应变矢量，是分别由单轴纵向拉伸和单轴横向拉伸所引起的结果，如果所作用的是压缩应力，则所有应力和

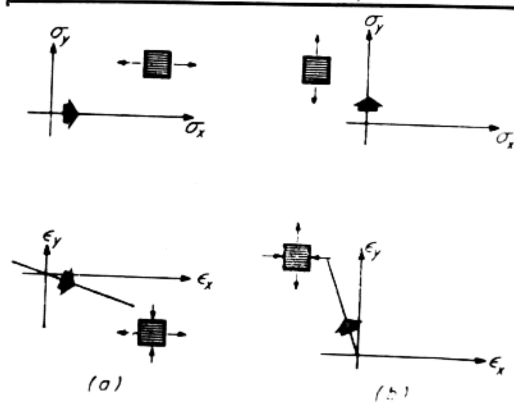

图 1.9 单轴应力引起的单位应变矢量
(a) 单轴应力（1，0，0）引起的双轴应变（1，－ν，0）；
(b) 单轴应力（0，1，0）引起的双轴应变（－ν，1，0） ⟶

应变单位矢量的方向均应相反。

3. 应力-应变关系

本书讨论的复合材料限于线弹性材料。这种材料在应力或应变作用下的特性曲线直至失效都是线性的。由于假设为线性的，我们可以利用一个非常有用的工具，即叠加原理。例如两种应力状态组合的结果正好是两种应力状态各自结果的和，不多也不少。而与应力作用的顺序是无关的。我们可以在任意选择的应力和应变状态中组合或分解应力和应变分量，而并不影响最后的结果。组合应力是单轴应力简单的叠加。叠加是指分量和分量之间的相加。其次，弹性是意味着完全的恢复性。对于这种弹性材料，我们加载、卸载或重复加载都不会产生任何的永久应变或滞后现象。弹性还意味着材料的响应是瞬时的。沒有时间的滞后，即与加载时间或速度无关。

用实验观测复合材料的性能，发现复合材料几乎比所有的金属和未增强的塑料要更接近线弹性。因此，对复合材料的这种线弹性假设看来是合理的。如果我们抛弃线性假设，例如引入非线弹性，塑性，或粘弹性，则所增加的复杂性将超出本书的范围。

对于单向复合材料用叠加法能够推出它的应力-应变关系。对于单向复合材料我们必须考虑到其存在两个对称的正交平面：一个平面是平行于纤维方向的，而另一个平面是垂直于纤维方向的。当材料结构在这平面的一侧是另一侧的镜象时，则该材料就存在对称性。两个正交平面由图 1.10 所示，图中 x 轴是沿纤维的纵向， 而 y 轴是沿纤维的横向。当参考轴 x-y 与材料的对称轴重合时， 我们称为正轴向。本章的应力-应变关系限于这种特殊情况。偏轴向将在第三章內讨论。

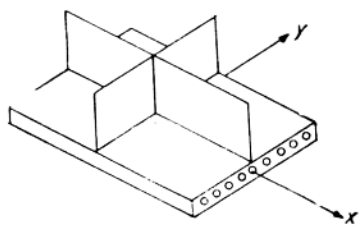

图 1.10 单向复合材料两个正交的对称平面。x-y 轴与纤维的纵向和横向重合。这种材料的对称性为正交各向异性和正轴性

按照叠加原理用如下一些简单试验的结果就可推出正轴向的应力-应变关系。

a. 纵向单轴试验

在图 1.9(a) 中给出了作用的单轴应力和由此引起的双轴应变。关于这种试验的应力-应变曲线由图 1.11 给出，从此图中我们可以建立如下的应力-应变关系：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_X}\sigma_X \\
\varepsilon_Y &= -\frac{\nu_x}{E_x}\sigma_X = -\nu_X\varepsilon_x
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

式中 E_x = 纵向杨氏模量

ν_X = 纵向泊松比 $= -\dfrac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_x}$

（也称为主泊松比，用 ν_{LT}，ν_{12} 来表示，有时也用 ν_{21} 来表示。）

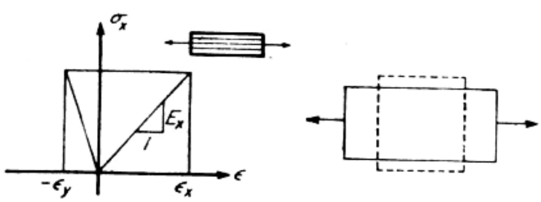

图 1.11 纵向单轴拉伸试验。正方形变成矩形

b. 横向单轴试验

在图 1.9(b) 中给出了作用的单轴应力（垂

直于纤维方向）和由此引起的双轴应变。这种试验的应力-应变曲线示于图 1.12 中。从此图中可以建立如下的应力-应变关系：

$$\begin{aligned}\varepsilon_Y &= \frac{1}{E_Y}\sigma_Y \\ \varepsilon_x &= -\frac{\nu_y}{E_Y}\sigma_Y = -\nu_Y\varepsilon_Y\end{aligned} \tag{1.6}$$

式中 E_Y = 横向杨氏模量

ν_Y = 横向泊松比 $= -\dfrac{\varepsilon_X}{\varepsilon_Y}$

（也称为次泊松比，用 ν_{LT}，ν_{21} 来表示，有时也用 ν_{12} 来表示。）

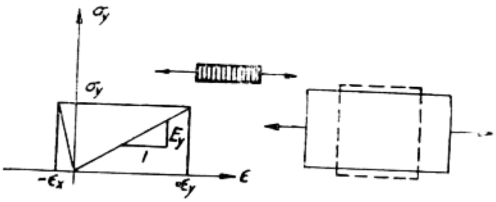

图 1.12 横向单轴拉伸试验

c. 纵向剪切试验

现在我们用另一种简单的应力状态，即单向复合材料为纯剪切状态，由图 1.13 给出。得到的应力-应变关系是

$$\varepsilon_S = \frac{1}{E_S}\sigma_S \tag{1.7}$$

式中 E_S = 纵向剪切模量

（也称为纵-横剪切模量，并用 G_{LT} 或 G_{12} 表示。）

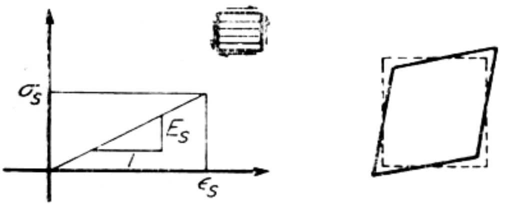

图 1.13 纵向剪切试验。矩形畸变成平行四边形

利用叠加原理我们就能够把关系式(1.5)、(1.6)、(1.7)中每个应力分量的作用加起来以得到合成的应变分量。从而得到的单向复合材料的应力-应变关系是

$$\begin{aligned}\varepsilon_X &= \frac{1}{E_X}\sigma_X - \frac{\nu_y}{E_y}\sigma_Y \\ \varepsilon_Y &= -\frac{\nu_X}{E_X}\sigma_X + \frac{1}{E_Y}\sigma_Y \\ \varepsilon_S &= \frac{1}{E_S}\sigma_S\end{aligned} \tag{1.8}$$

这是单向复合材料的正轴应力-应变关系式，也就是说，材料在正交各向异性的对称方向的应力-应变关系式。通常的材料具有同样的函数关系。

这联立方程可排成一矩阵乘法表，在此表中，每一行标题的量等于该行各列的数与相应各列标题量乘积之总和。如果我们比较一下表 1.4 的第一行和方程(1.8)的第一式，则这个规律就自明了。这表和以后所有的表，当用这种矩阵乘法规则时，都将用斜体字*给出。

表 1.4 中所示的应力-应变关系的所有材料常数叫做工程常数。它们是通常材料习惯上所使用的常数，其中用附加下标来表示性能的方向性。结构元件的许多设计公式都是用工程常数给出

*因受印刷条件所限，译文中未用斜体字。—译注

的。因此，使用工程常数将往往可以使复合材料在结构上应用更为便利。然而，这种做法是现代设计方法上的一种退让，反而可能导致设计过程更为复杂化。事实上，复合材料用工程常数是不合适的，应该用柔量分量和模量分量来代替。表 1.4 中的工程常数符号可以用直接取代变成表 1.5 中的柔量分量。

表 1.4 单向复合材料用工程常数表示的正轴应力-应变关系

	σ_X	σ_Y	σ_S
ε_X	$\frac{1}{E_X}$	$-\frac{\nu_Y}{E_Y}$	0
ε_Y	$-\frac{\nu_X}{E_X}$	$\frac{1}{E_y}$	0
ε_S	0	0	$\frac{1}{E_S}$

表 1.5 用柔量表示的单向复合材料的正轴应力-应变关系

	σ_X	σ_Y	σ_S
ε_X	S_{XX}	S_{XY}	0
ε_Y	S_{yx}	S_{YY}	0
ε_S	0	0	S_{SS}

这两组弹性常数之间的关系是：

$$S_{xx} = \frac{1}{E_X} \qquad S_{YY} = \frac{1}{E_Y} \qquad S_{SS} = \frac{1}{E_S}$$

$$S_{YX} = -\frac{\nu_X}{E_X} \qquad S_{XY} = -\frac{\nu_Y}{E_Y} \tag{1.9}$$

或相反

$$E_X = \frac{1}{S_{xx}} \qquad E_y = \frac{1}{S_{YY}}$$

$$\nu_X = -\frac{S_{yX}}{S_{XX}} \qquad \nu_Y = -\frac{S_{Xy}}{S_{YY}} \tag{1.10}$$

$$E_S = \frac{1}{S_{SS}}$$

根据（1.8）式我们可以得到以应变表示的应力为下式：

$$\begin{aligned} \sigma_X &= mE_X\,[\varepsilon_X + \nu_Y\varepsilon_Y] \\ \sigma_Y &= mE_Y\,[\nu_X\varepsilon_X + \varepsilon_Y] \\ \sigma_S &= E_S\varepsilon_S \end{aligned} \tag{1.11}$$

式中 $m = [1 - \nu_X\nu_Y]^{-1}$。

为了在应力-应变关系式中消除不适用的工程常数，我们在表 1.6 中引入模量分量。工程常数和模量分量之间存在如下关系：

$$\begin{aligned} Q_{XX} &= mE_X & Q_{YY} &= mE_Y \\ Q_{YX} &= m\nu_X E_Y & Q_{XY} &= m\nu_Y E_X \\ Q_{SS} &= E_S \end{aligned} \tag{1.12}$$

表 1.6 用模量表示的单向复合材料的正轴应力-应变关系

	ε_X	ε_Y	ε_S
σ_X	Q_{xx}	Q_{XY}	0
σ_Y	Q_{Yx}	Q_{YY}	0
σ_S	0	0	Q_{SS}

或相反

$$E_X=\frac{Q_{XX}}{m}\qquad E_Y=\frac{Q_{YY}}{m}$$
$$\nu_X=\frac{Q_{YX}}{Q_{YY}}\qquad \nu_Y=\frac{Q_{XY}}{Q_{XX}}\tag{1.13}$$
$$E_S=Q_{SS}$$

式中，

$$m=\left[1-\frac{Q_{XY}}{Q_{XX}}\ \frac{Q_{YX}}{Q_{YY}}\right]^{-1}$$

我们已经看到三组材料常数，其中任何一组都能完全描述单向复合材料的正轴向刚度。每一组的特点概括如下：

• 模量是用于从应变计算应力。这是计算多向层合板的刚度所必需的一组基本常数。

• 柔量是用于从应力计算应变。这组常数是计算工程常数所必需的，然而对于计算多向层合板的刚度是不需要的。

• 工程常数是由通常材料引进来的。老的设计人员认为设计工作中用工程常数设计较合适。

如前所述，从一组常数可很容易求得另一组，它们是完全等效的。模量和柔量之间有一个直接关系式，彼此是互逆的。我们以后将讨论它们之间的变换程序。

4. 柔量和模量的对称性

我们想证明，柔量的耦合分量和模量的耦合分量分别是相等的，或者用矩阵代数的术语，就是说柔量矩阵和模量矩阵都是对称的。因为至此我们看到的仅仅是泊松比的耦合，所以在对称条件下泊松比的耦合分量是相等的：

$$S_{XY}=S_{YX},\quad Q_{XY}=Q_{YX}\tag{1.14}$$

我们可以根据一个物体受到应力和应变时所贮存的弹性能来证明这些等式的正确性。设正交各向异性体内一点所贮存的弹性能是

$$W=\frac{1}{2}[\sigma_X\varepsilon_X+\sigma_Y\varepsilon_Y+\sigma_S\varepsilon_S]\tag{1.15}$$

将表 1.5 中以柔量表示的应力-应变关系式代入方程（1.15），

$$W=\frac{1}{2}S_{XX}\sigma_X^2+\frac{1}{2}\ (S_{XY}+S_{YX})\ \sigma_X\sigma_Y+\frac{1}{2}S_{YY}\sigma_Y^2+\frac{1}{2}S_{SS}\sigma_S^2\tag{1.16}$$

对这能量进行微分，我们将又得到应力-应变关系式为

$$\frac{\partial W}{\partial\sigma_X}=S_{XX}\sigma_X+\frac{1}{2}[S_{XY}+S_{YX}]\sigma_Y=\varepsilon_X$$
$$\frac{\partial W}{\partial\sigma_Y}=\frac{1}{2}[S_{XY}+S_{YX}]\sigma_X+S_{YY}\sigma_Y=\varepsilon_Y\tag{1.17}$$

这关系式中的系数和表 1.5 中的类似系数之间必须相同，为此只有满足如下条件：

$$S_{XY}=S_{YX}\tag{1.18}$$

利用表 1.6 中的模量关系式代入方程（1.15）还可得到

$$Q_{XY}=Q_{YX}\tag{1.19}$$

这后两个等式说明了泊松耦合的对称性或互等性。类似的对称条件也可用于工程常数。例如，由（1.19）式可得出

$$\nu_X E_Y = \nu_Y E_X \tag{1.20}$$

或

$$\frac{\nu_X}{\nu_Y} = \frac{E_X}{E_Y} \tag{1.21}$$

由于这些对称条件，所以正轴的正交各向异性的单向复合材料的独立常数数目减少一个，在表1.4～1.6 中由五个减为四个。假如存在附加的对称条件，还可以进一步减少独立常数的数目。特别是，存在这样的两种情况：

· 正方对称材料

如果纵向和横向的性能是相等的，即

$$\begin{aligned} Q_{XX} &= Q_{YY} \\ S_{XX} &= S_{YY} \\ E_X &= E_Y \end{aligned} \tag{1.22}$$

我们是有这么一种正方对称材料的。由于有（1.22）的附加关系式，其独立常数的数目只是三个，比正交各向异性材料要少一个。正交铺层层合板在层合板的平面里是一种正方对称材料。许多纺织布也是正方对称的。

· 各向同性材料

大家知道，各向同性材料只有两个独立常数，因为在上述三个独立常数中还有另一个关系式，即

$$\begin{aligned} Q_{SS} &= (Q_{XX} - Q_{XY})/2 \\ S_{SS} &= 2(S_{XX} - S_{XY}) \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

这关系式是由纯剪状态和等拉压状态之间的等效性推导出来的。这种等效性仅仅对各向同性材料才是正确的。这关系式的推导将在以后讨论。

总的说来，决定各种材料刚度的应力-应变关系式对于单向复合材料象通常材料一样具有相同的形式。沒有附加项或更复杂的关系式。不同之处仅仅是独立常数的数目：复合材料的独立常数为四个，而通常材料为二个。然而在概念上和运算上是沒有什么障碍的，即在研究复合材料时沒有不同于通常材料的实质性困难。事实上，一旦我们熟悉了复合材料，我们就会自然而然地把通常的材料看作为复合材料的一种特殊情况。

5. 典型单向复合材料的刚度数据

a. 几种单向复合材料测试得到的工程常数列在表 1.7 中。表中还列出了纤维体积含量和比重。这些工程常数通常由简单试验直接得到。它们不是应力-应变关系式的系数。

b. 与表 1.7 中同样的复合材料的柔量分量列在表 1.8 中。这些柔量分量是根据表 1.7 利用（1.9）式计算出来的。柔量分量是应力-应变关系式中应力分量的系数。我们要用这个应力-应变关系式去把应力变为应变。