解析数论基础

（下）

（积性数论）

解析数论基础

（下）

（积性数论）

原著：H. Davenport

修订：H. L. Montgomery

译者：陆鸣皋

1981.12

目　录

§11 阶为1的整函数

在Riemann的开拓性的工作之后，ζ函数论中下一个重要进展是由Hadamard作出的，他在1890年发展了有限阶整函数的理论，并将它通过$\xi(s)$应用于$\zeta(s)$。他的这些结果被用在由他自己和de la vallee poussin给出的素数定理的证明中，虽然后来知道证明素数定理可以不用Hadamard的理论。

一个整函数$f(z)$称为有限阶是指存在一个数α使得当$|z|\to\infty$时，

$$f(z)=O(e^{|z|^{\alpha}}) \qquad (1)$$

除$f(z)$是一个常数的情形之外，我们有$\alpha>0$，具有性质(1)的数α的下确界称为$f(z)$的阶。

一个无零点的有限阶整函数必为$e^{g(z)}$这种形式，其中$g(z)$是一个多项式，它的阶就是$g(z)$的次数，即是一个整数。因为$g(z)=\log f(z)$能取单值，故它本身是一个整函数。在任何充分大的圆$|z|=R$上，有

$$\operatorname{Re} g(z)=\log|f(z)|<2R^{\alpha}$$

如果我们取

$$g(z)=\sum_{0}^{\infty}(a_n+ib_n)z^n$$

那末对$z=Re^{i\theta}$

$$\operatorname{Re} g(z)=\sum_{0}^{\infty}a_nR^n\cos n\theta-\sum_{1}^{\infty}b_nR^n\sin n\theta$$

不失一般性，如果我们假定$g(0)=0$，那末

$$\pi|a_n|R^n \le \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}g(Re^{i\theta})|\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{|\operatorname{Re}g(Re^{i\theta})| + \operatorname{Re}g(Re^{i\theta})\}\,d\theta < \delta\pi R^{\alpha}$$

这就推出，如果 $n>\alpha$，取 $R\to\infty$ 就有 $a_n=0$，对 b_n 也有类似的结果。这就证明了 $g(z)$ 是一个多项式，因此显然有 $f(z)$ 的阶等于 $g(z)$ 的次数。

进一步我们注意到，上面的论证中对 $f(z)$ 在 $|z|=R$ 上的估计只要对某个趋于无穷的 R 的序列成立就是够了，不需要对所有的充分大的 R 都成立。

现在假定一个有限阶 ρ 的整函数 $f(z)$ 具有零点 $z_1 z_2$，……（重零点重复计）。现提出这样一个问题：零点的分布和阶 ρ 间的关系如何？这个问题由 Jensen 公式非常容易回答。Jensen 公式是：如果 z_1，z_2，……，z_n 是 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内的零点，而在 $|z|=R$ 上没有零点，那末

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)| = \qquad (2)$$

$$= \log\frac{R^n}{|z_1|\cdots\cdots|z_n|}$$

（为方便起见，我们假定 $f(0)\ne 0$）。事实上，右边的表达式为

$$\int_0^R r^{-1}\,n(r)\,dr$$

其中 $n(r)$ 记 $|z|<r$ 中的零点数。因为如果取 $|z_j|=r_j$，积分之

但有

$$\log r_2/r_1+2\log r_3/r_2+\cdots+n\log R/r_n$$

$$=\log(R^n/r_1 r_2\cdots\cdots r_n)$$

将f(z)写成形式

$$(z-z_1)\cdots\cdots(z-z_n)F(z)$$

并对每个因子分别论证，则容易证明Jensen公式。

由Jensen公式得出，一个给定阶为ρ的整函数的零点不能有太大的密度。因为如果α > ρ，我们就有对所有充分大的R。

$$\int_0^R r^{-1}n(r)dr<R^{\alpha}-\log|f(0)|<2R^{\alpha}$$

因

$$\int_R^{2R} r^{-1}n(r)dr\geq n(R)\int_R^{2R}r^{-1}dr=n(R)\log 2$$

故即得

$$n(R)=0(R^{\alpha})$$

这个估计的一个推论是，如果β > α，那末级数$\Sigma r_n^{-\beta}$收敛，因此该级数当β > ρ时亦收敛。这是因为

$$\sum_1^{\infty} r_n^{-\beta}=\int_0^{\infty}r^{-\beta}dn(r)=\beta\int_0^{\infty}r^{-\beta-1}n(r)dr<\infty$$

我们现在能将f(z)表成一个由Weierstrass引进的简单的典型乘积。从现在起我们假定ρ = 1，因为我们今后只研究这种情形。这样我们有级数$\Sigma r_n^{-1-\varepsilon}$对任何ε > 0都收敛，特别级数$\Sigma r_n^{-2}$收敛。因此无穷乘积

$$p(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/z_n)e^{z/z_n}$$

对所有的 z 绝对收敛，在任何不包有任一点 z_n 的有界区域中一致收敛。由此 $p(z)$ 是一个零点为 z_1，z_2，……的整函数。如果我们取

$$f(z)=P(z)F(z) \tag{4}$$

那末 $F(z)$ 是一个无零点的整函数。

我们不能直接得出 $F(z)=e^{g(z)}$，其中 $g(z)$ 是一个多项式，因为 $F(z)$ 是否有限阶并不显然。证明这个结果的最直接的途径是在一个圆 $|z|=R$ 的序列上，得到 $|P(z)|$ 的一个下界，由此得到 $|F(z)|$ 的一个上界，然后引用前面已证明了的结果。R 的值可以选取得远离数 r_n 之值。因级数 $\sum r_n^{-2}$ 收敛，所以在实轴上所有区间 $(r_n-r_n^{-2},\ r_n+r_n^{-2})$ 的整个长度是有限的，因此存在任意大的 R，使得

$$|R-r_n|>r_n^{-2} \tag{5}$$

对所有的 n 成立。

取 $P(z)=P_1(z)P_2(z)P_3(z)$，这里 $P_1(z)$，$P_2(z)$，$P_3(z)$ 分别是 n 跑遍下面各类数值时构成的子积：

P_1： $|z_n|<\frac{1}{2}R$

P_2： $\frac{1}{2}R\leq|z_n|\leq 2R$

P_3： $|z_n|>2R$

对于 P_1 的因子，在 $|z|=R$ 上我们有

$$|(1-z/z_n)e^{z/z_n}|\geq(|z/z_n|-1)e^{-|z|/|z_n|}>e^{-R/r_n}$$

又因

$$\sum_{r_n<\frac{1}{2}R} r_n^{-1} < \left(\frac{1}{2}R\right)^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1-\varepsilon}$$

这就得到

$$|P_1(z)| > \exp(-R^{1+2\varepsilon})$$

对P_2的因子，由(5)我们有

$$|(1-z/z_n)e^{z/z_n}| \geq e^{-2} \quad |z-z_n|/2R > cR^{-3}$$

其中C是一个正常数。又由(3)，P_2的因子数小于$R^{1+\varepsilon}$。因此

$$|P_2(z)| > (CR^{-3})^{R^{1+\varepsilon}} > \exp(-R^{1+2\varepsilon})$$

最后，对P_3的因子，因$|z/z_n| < \frac{1}{2}$，故不等式

$$|(1-z/z_n)e^{z/z_n}| > e^{-C(R/r_n)^2}$$

对某个正常数C成立。我们又有

$$\sum_{r_n>2R} r_n^{-2} < (2R)^{-1+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1-\varepsilon}$$

因此

$$|P_3(z)| > \exp(-R^{1+2\varepsilon})$$

综合上述，在$|z|=R$上我们有

$$|P(z)| > \exp(-R^{1+3\varepsilon})$$

再由(1)和(4)

$$|F(z)| < \exp(R^{1+4\varepsilon})$$

由上所证，因这个不等式在一个趋于无穷的R的序列上皆成立，所以能推出$F(z)=e^{g(z)}$，其中$g(z)$是一个次数至多为1的多项

式 这样一来，我们就有

$$f(z)=e^{A+Bz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/z_n)e^{z/z_n} \tag{6}$$

其中A和B是常数。

我们已经知道级数$\sum r_n^{-1-\varepsilon}$对任何$\varepsilon>0$都收敛。而级数$\sum r_n^{-1}$可能发散，但如果它收敛，那末$f(z)$对某个常数C适合不等式

$$|f(z)|<e^{c|z|} \tag{7}$$

这是不难从不等式（对所有的ζ成立）

$$|(1-\zeta)e^{\zeta}|\leq e^{2|\zeta|}$$

得到，而这个不等式本身又可以从函数$(1-\zeta)e^{\zeta}$的幂级数展开得到。

这节的结果可综合如下：

一个阶为1的整函数必有(6)的形式。如果$r_n=|z_n|$，这里z_n是$f(z)$的零点，那末级数$\sum r_n^{-1-\varepsilon}$对任何$\varepsilon>0$收敛。又如果$\sum r_n^{-1}$收敛，那末$f(z)$适合不等式(7)。

§12 关于$\xi(s)$和$\xi(s,\chi)$的无穷乘积

我们将前节的结果用于整函数

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) \tag{1}$$

我们首先证明当$|s|\to\infty$时，不等式

$$|\xi(s)|<\exp(C|s|\log|s|) \tag{2}$$

对某个常数C成立；这即得到$|\xi(s)|$的阶至多是1。又因$\xi(s)=$

$\xi(1-s)$，故只要证明不等式(2)对 $\sigma\geq\frac{1}{2}$ 成立。显然[1]，

$$\left|\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\right|<\exp(C|s|)$$

及因 $-\frac{1}{2}\pi<\arg s<\frac{1}{2}\pi$ 能用 Stirling 公式得到

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\right|<\exp(C|s|\log|s|)$$

由此余下仅需估计 $\zeta(s)$，这可用 $\zeta(s)$ 的如下表达式。对 $\sigma>0$，

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_{1}^{\infty}(x-[x])x^{-s-1}dx$$

上面的积分当 $\sigma\geq\frac{1}{2}$ 时有界，因此当 $|s|$ 充分大时，

$$|\zeta(s)|<C|s| \tag{3}$$

这就完全证明了(2)。

我们进一步可以看到，当 s 沿实轴趋于 $+\infty$ 时，$\log\Gamma(s)\sim s\log s$ 及 $\zeta(s)\to1$，故不等式(2)实质上（除 C 的值外）是最优的。因此 $\xi(s)$ 不能满足前节的更精密的不等式(7)。

由此得到，$\xi(s)$ 具有无穷多个零点 ρ_1，ρ_2，…使得对任何 $\varepsilon>0$，级数

$$\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon} \tag{4}$$

收敛，而级数

$$\sum|\rho_n|^{-1} \tag{5}$$

发散，并且

$$\xi(s)=e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1-s/\rho)e^{s/\rho} \tag{6}$$

1) 每个地方的常数 C 不一定相同

$\xi(s)$ 的零点是 $\zeta(s)$ 的非无聊零点，因为在(1)中 $\zeta(s)$ 的无聊零点由 $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ 的极点相抵消，$\frac{1}{2}s\Gamma(\frac{s}{2})$ 无零点，且 $s-1$ 的零点与 $\zeta(s)$ 的极点相抵消。因此 $\zeta(s)$ 在 $0\leq\sigma\leq1$ 具有无穷多个零点，且它们满足(4)和(5)。

乘积公式(6)能导致将 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 表成部分分式和。将(6)取对数并求导，就得

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=B+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) \tag{7}$$

由此结合对(1)取对数求导，就给出

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=B-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}$$

$$+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) \tag{8}$$

这表明 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有一极点及在 $s=\rho$ 处为其非无聊零点，至于在 $s=-2,-4,\cdots$ 处的无聊零点都包含于 Γ 项中，这是因为对 § 10 注的(2)取对数求导，

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}=\frac{1}{2}\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right) \tag{9}$$

ζ'/ζ 的表达式(8)将是 $\zeta(s)$ 的以后许多工作的基础。

常数 A 和 B 虽然不很重要，但能求出。由(1)，

$$\xi(1)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{2}$$

注：这里及以后引用的节的序码保留原书原样。

于是$\xi(0)=\frac{1}{2}$，从而由(6)，$e^{A}=\frac{1}{2}$。

对于B，由(7)及函数方程$\xi(s)=\xi(1-s)$我们有

$$B=\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}=-\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}$$

由(1)

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}$$

又从(9)及$\log 2$的级数展开可得

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)}=\frac{1}{2}\gamma-1+\log 2$$

因此

$$B=\frac{1}{2}\gamma-1+\frac{1}{2}\log 4\pi-\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)$$

为估计上式中的极限，我们再借助§4之(7)：

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-sI(s)\ ,\ I(s)=\int_1^\infty(x-[x])x^{-s-1}dx$$

经过简单计算可有

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)=1-I(1)$$

而

$$I(1)=\int_1^\infty(x-[x])x^{-2}\,dx=\lim_{N\to\infty}\left(\log N-\sum_{n=1}^{N-1}n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\log N-\sum_{n=1}^{N}n^{-1}+1\right)=1-\gamma$$

因此

$$B = -\frac{1}{2}\gamma - 1 + \frac{1}{2}\log 4\pi \qquad (10)$$

我们能给出对B的另一种说法，虽然级数$\sum|\rho|^{-1}$发散，但如果将ρ与$\bar{\rho}$的项归并在一起，那末级数$\sum\rho^{-1}$收敛。这是因为如果$\rho = \beta + i\gamma$，那末

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \leq \frac{2}{|\beta|^2}$$

而我们已知级数$\sum|\rho|^{-2}$收敛。从(7)和$\xi(s)$的函数方程，

$$B + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = -B - \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

又因如果ρ是一个零点则$1-\rho$也是零点，所以含$1-s-\rho$的项可与含$s-\rho$的项消去。因此，

$$B = -\sum_{\rho}\frac{1}{\rho} = -2\sum_{\gamma>0}\frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \qquad (11)$$

B的数值是-0.023。

现对L函数作类似的研究。设χ是一个mod q的原特征，如§9的(13)所定义，

$$\xi(s, \chi) = (q/\pi)^{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}a}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right)L(s, \chi) \qquad (12)$$

这里a等于0或1取决于$\chi(-1) = 1$或$\chi(-1) = -1$。（注意，这里不需要有因子$s(s-1)$，在$\xi(s)$的定义中加进这个因子是将$\Gamma(\frac{1}{2}s)$在$s = 0$处的极点及$\zeta(s)$在$s = 1$处的极点消去）。如在§8中所见到的，$\xi(s, \chi)$是一个整函数且适合函数方程

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^a q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\,\xi(s, \chi) \qquad (13)$$

其中所乘的因子的绝对值大于1。

我们首先需要对$L(s,\chi)$当$|s|$充分大时作一估计，这可从§4之(8)出发，通过对$\zeta(s)$处理的同样方法而得。事实上，§4之(8)即是：对$\sigma>0$，

$$L(s,\chi)=s\int_1^{\infty}s(x)x^{-s-1}dx$$

其中$s(\chi)=\sum_{n\leq x}\chi(n)$。因$|s(x)|\leq q$，故对$\sigma\geq\frac{1}{2}$

$$|L(s,\chi)|\leq 2q|s| \qquad (14)$$

由此当$|s|$充分大时，

$$|\xi(s,\chi)|\leq 2q^{\frac{1}{2}\sigma+\frac{3}{2}}|s|\,|\Gamma(\frac{1}{2}(s+a))|<$$

$$<q^{\frac{1}{2}\sigma+\frac{3}{2}}\exp(C|s|\log|s|) \qquad (15)$$

由函数方程，对$\sigma\leq\frac{1}{2}$有类似的结果成立。又这个不等式当s沿实轴趋于$+\infty$时实质上最优，这是因为此时$L(s,\chi)\to 1$。因此象$\zeta(s)$一样，$L(s,x)$在带状区域$0\leq\sigma\leq 1$中有无穷多个零点ρ，它们具有性质(4)和(5)。我们又有

$$\xi(s,\chi)=e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1-s/\rho)e^{s/\rho} \qquad (16)$$

但A和B现在都与x有关。能取$e^{A}=\xi(0,\chi)$，这又能经$\xi(1,\bar{\chi})$即经$L(1,\bar{\chi})$来表达。

对(15)和(12)取对数求导而得的(8)的类似的关系式是

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a)}$$

$$+B(\chi)+\sum_{\rho}(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}) \qquad (17)$$

这些是后面许多工作的基础。

$B(\chi)$能根据L'/L按s幂的展开而求得，但是要对$B(\chi)$作为q的函数作好的估计似乎是非常困难的。（在以后的论证中$B(\chi)$常从上面的方程中消去）如象证明（11）一样来论证，我们得到

$$B(\chi)=\frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)}=-\frac{\xi'(1,\bar{\chi})}{\xi(1,\bar{\chi})}$$

$$=-B(\bar{\chi})-\sum_{\rho}\left(\frac{1}{1-\bar{\rho}}+\frac{1}{\bar{\rho}}\right)$$

因$L(s,\bar{x})$的零点能表成$\bar{\rho}$和$1-\rho$，所以

$$R_e B(\chi)=-\frac{1}{2}\sum_{\rho}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\bar{\rho}}\right)\leq 0$$

特别，如果χ是实特征，则$B(\chi)$非负的且能类似于（11）由零点ρ来表达。就我们所知，估计$B(\chi)$的困难与$L(s,\chi)$在$s=0$邻近具有零点这个事实有关。

我们注意，对复的χ，因$1-\bar{\rho}=\rho'$，故$L(s,\chi)$的零点关于直线$\sigma=\frac{1}{2}$对称，但关于实轴并不对称。

§13　$\zeta(s)$的无零点区域

1896年，Hadamard和de la Vallée Poussin独立地证明了，在直线$\sigma=1$上，$\zeta(s)\neq 0$。在他们的素数定理的证明中这是最关键的一步，直到1948年Selberg和Erdös给出素数定理的初等证明之前，在所有的证明中它仍然是最关键的一

步。

对 $\sigma>1$。我们有

$$\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-m\sigma}e^{-itm\log p}$$

如果 $\zeta(s)$ 在 $1+it$ 处为一零点，那末 σ 从右边趋于 1 时，$\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it)\to-\infty$。这启示我们，数 $\cos(tm\log p)$ 中多数接近于 -1，从而可以期望数 $\cos(2tm\log p)$ 中多数接近于 1，这将与 $\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+i2t)$ 当 $\sigma\to1$ 时有界相矛盾。

指出的论证思想由 Hadamard 和 de la Vallé e Poussin（有某些不同）给出了严谨的证明。从不等式

$$3+4\cos\theta+\cos2\theta\geq0 \tag{1}$$

对所有的 θ 皆成立（因左边是 $2(1+\cos\theta)^2$）这一事实出发，Mertens 给出一个更优雅的证明。将此不等式应用于

$$\mathrm{Re}\log\zeta(s)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-m\sigma}\cos(t\log p^m)$$

并相继取 t 为 0，t，$2t$，那末

$$3\log\zeta(\sigma)+4\,\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it)+\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+2it)\geq0$$

由此对 $\sigma>1$，

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|\geq1。 \tag{2}$$

当 $\sigma\to1$ 时，我们有 $\zeta(\sigma)\sim(\sigma-1)^{-1}$。如果对某个 $t\neq0$，$\zeta(1+it)=0$，那末当 $\sigma\to1$ 时，

$$|\zeta(\sigma+it)|<A(\sigma-1)$$

对某常数 A 成立。又因 $\zeta(\sigma+2it)$ 当 $\sigma\to1$ 时有界，故得出与不等

式(2)相矛盾。由此可见，证明的成功在于[illegible]的系数4大于系数3。

在1899年，de la Vallée Poussin推广了这个论证，证明了在$\sigma=1$的左边的窄区域中$\zeta(s)\neq 0$。这个区域的宽度当t充分大时与高t的比例是$(\log t)^{-1}$。在证明中，用函数$\zeta'(s)/\zeta(s)$比用函数$\log\zeta(s)$更为合适，因为后者要解析延拓到$\sigma=1$的左边显然有困难，而前者对$\sigma>0$仅以$\zeta(s)$的零点为极点。如§7之(4)，对Euler乘积取对数并求导，则有对$\sigma>1$，

$$-\mathrm{Re}\,\zeta'(s)/\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n)$$

因此由如前同样的论证，

$$3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right\}+4\left\{-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right\}$$

$$+\left\{-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right\}\geq 0 \qquad (3)$$

当σ从右边趋于1时，$-\zeta'(s)/\zeta(s)$的性状不难描述；因$\zeta(s)$在$s=1$处有一单极点，故有

$$-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)<\frac{1}{\sigma-1}+A$$

对$1<\sigma\leq 2$成立，其中A是一个正的绝对常数（每个场合不一定取同一值）

另外二个函数在$\sigma=1$邻近的性状显然受$\zeta(s)$在$\sigma=1$左边的、高（虚部）在t或$2t$附近的任何零点的影响。这个影响可由§12之(8)即一个部分分式公式