射影变换

陈谷新 编著

北京农业机械化学院制图教研室

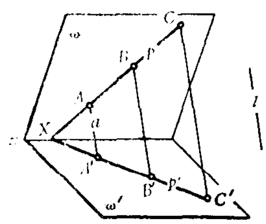
目　　录

第一章　平面场的仿射变换

§1.　两平面的透视仿射对应

一． 首先我们来观察将一个平面的点向另一平面平行投影的情形。

设空间有两平面ω及ω'，两者交于直线x（图1—1），投影方向由直线l决定，它与两已知面均相交。在平面ω上给出任意一点A，过A作直线a′平行于l，用A′表示a与ω'的交点，则点A′即为A的投影。由于过A只能作一条平行于l的直线，因此在投影方向确定的条件下，平面ω上任一点的投影唯一确定。



图—1

显然，我们也可以把点A看做是点A′的投影。在平行投影中，它们所处的地位是完全平等的。这就是说A与A′互为投影。对于这种情形，以下我们将用“对应”这一词来表达，如说：“A与A′相对应”，“A′是A的对应点”等。从以上所述可知，通过平行投影的方法，可以在两平面间建立起一一对应关系：平面ω的一个点对应于平面ω'一个点，反之亦然。

利用平行投影法在两个平面之间建立起来的这种对应关系，就叫做**两个平面的透视仿射对应**。

如果我们把由已知平面的一个ω变为另一个ω'的过程中看做是单方面的，那么就叫做平面ω到平面ω'的变换。若把由ω到ω'的变换叫做**正变换**，则由ω'到ω的变换叫做**逆变换**。

二． 透视仿射对应的基本性质

1．　一平面上一点对应于另一平面一点，两平面交线x上的点自相对应。

与自身相对应的点叫做**二重点**，如图1—1中点X。直线x上的一切点均为**二重点**，这条直线叫做**二重直线**，也称为透视仿射对应的轴。

2．　一平面上一直线对应于另一平面的一直线，两对应直线的交点必在轴x上。如图1—1直线p与p′交轴于点X。

点变换成点，直线变换成直线，这种性质简称为**同素性**。

3．　如果点A属于直线p，则其对应点A′属于p的对应直线p′。这就是说，点与直线的**从属性**在变换中保持不变。

4．　一直线上三个点的简比，等于对应直线上三对应点的简比。

设A、B、C为直线p上任意三个点（图1—1），这三个点的简比是用下面的公式来定义的：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}\ 。$$

在此式中，点A、B叫做**基础点**（或底点），点C叫做**分点**，三个点A、B、C的简比用

记号（ABC）表示。由以上公式可知，简比（ABC）是分点与基础点所决定的线段长度之比，简比值的正负取决于分点的位置：若点C为AB之内分点，则简比为负；若C为AB的外分点，则简比为正。在透视仿射对应中，由于AA′，BB′，CC′互相平行，故：

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}，即（ABC）=（A'B'C'）。$$

综上所述，在透视仿射对应中的基本特性有三：**同素性，从属性**及**等简比**。根据这些基本特性可进一步作出一系列其他性质，下面仅列举三点。

1．互相平行的直线变换后仍互相平行（平行性）。

设直线a，b互相平行（图1—2），其对应直线为a′，b′。由于由aa′组成的平面与bb′组成的平面有两对相交直线互相平行，故两平面平行，因而直线a′//b′。

2．两平行线段之比值变换后不变。

设已知线段$AB:CD=K_1$，其对应直线$A'B':C'D'=K'_1$，应有$K'_1=K_1$。

在AB上取点E，使BE＝DC（图1—2）于是

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{EB}=（AEB）。$$

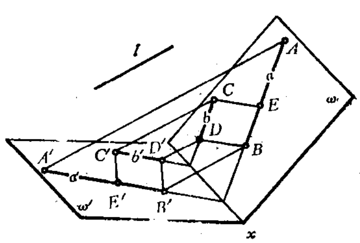


图1—2

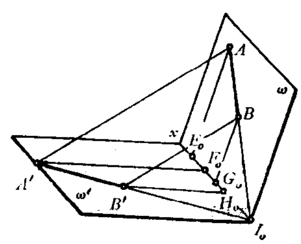


图1—3

设E′为E的对应点，根据等简比性知：

$$（A'E'B'）=（AEB）。$$

注意到 $$（A'E'B'）=\frac{A'B'}{E'B'}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

故 $$AB:CD=A'B':C'D'。$$

3．任意一对对应点A，A′到轴线x的距离之比为一常数。

设A，A′及B，B′为任意两对对应点（图1—3），它们与轴x的距离分别为AE_0，BG_0，$A'F_0$，$B'H_0$，有

$$AE_0:A'F_0=BG_0:B'H_0。$$

三．确定两平面透视仿射对应的条件

我们已经知道，两平面透视仿射对应可由两个平面及投射方向l决定，由于空间的一平面可由不属于一直线的三个点决定，因此，若在空间给出三对对应点，且其对应点连线互相平行，由此便确定一透视仿射对应。

设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的对应点连线AA'，BB'，CC'互相平行（图1—4），则由这两个三角形决定一个透视仿射对应。

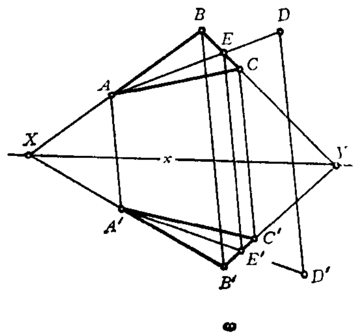


图1—4

设由$\triangle ABC$所决定的平面用ω表示，平面ω上的点和直线的全体称为**场**ω，同样，由$\triangle A'B'C'$决定的平面ω'上的点和直线的全体称为**场**ω'。场这一概念是和一定的坐标系相连系的，在此处也就是和一定的三角形相连系。在同一平面上可以有不同的场。

现在我们来分析场ω的任一已知点D的对应点D'的作法。

连AD，因D属于ω，故AD与BC相交，设用E表示其交点。过E作$EE'//AA'$，在直线$B'C'$上得点E'，E'即E的对应点。$A'E'$即为AE的对应直线。过D引DD'平行于AA'，

$$DD' \times A'E' = D' \text{（符号“}\times\text{”表示相交）},$$

点D'即为D的对应点。

我们再来求其对应轴线。

设$AB \times A'B' = X$，　$BC \times B'C' = Y$，

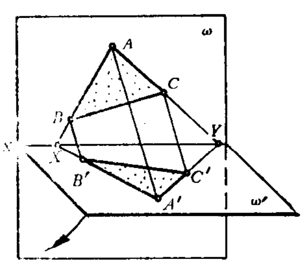
则X，Y为二重点。因此其连线x即为透视对应轴线。这时两个场的每对对应直线的交点均应在轴x上。

§2. 亲　似　对　应

一． 在以上研究透视仿射对应时，我们一直假定场ω和ω'是处在两个平面上，现在我们来研究它的特殊情形，即当ω与ω'处于同一平面上。

设由两个对应的$\triangle ABC(\omega)$和$\triangle A'B'C'$（ω'）确定一透视仿射对应（图1—5a），现将其中一平面ω不动，令另一平面ω'绕二重直线x旋转到与平面ω重合，重合后的情形如图1—5b所示。很明显，改变一平面的位置并不破坏两个场的一一对应关系。

注意到点X，Y在二重直线上，故旋转后仍保持不动。



(a)

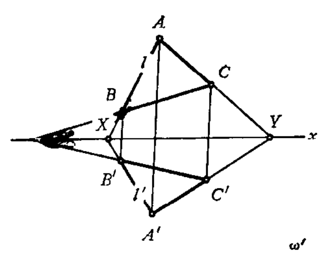


图1—5　(b)

其次，由于一直线上三点的简比相等这一性质不变，重合后的图中仍有$(ABX) = (A'B'X')$，$(ACY) = (A'C'Y')$，因而对应点的连线AA'，BB'，CC'仍互相平行。

这表明，重合后二个场的对应图形仍具有透视仿射的基本特性。

在同一平面上建立的两个场的透视仿射对应称做亲似对应。*

在亲似对应中，两个场处在同一平面上，故平面上的每个点既可以作为场ω的，亦可以作为场ω'的，为了明确一已知点属于那个场的，必须在标注符号时加以区别，我们规定：

凡属场ω的元素在字母上不加撇，如点A，B，C……；直线a，b，c……。

凡属场ω'的元素在字母上均加撇，如点A′，B′，C′……；直线a′，b′，c′……。

对应元素用同样字母：如A—A′，a—a′。

二．确定亲似对应的条件

我们知道，两个场的透视仿射对应可由不属于一平面的两个对应的三角形确定，因此不难断言，两个场的亲似对应可由属于同一平面的两个对应的三角形确定。

同一面上△ABC和△A′B′C′，若三对对应点连线AA′，BB′，CC′互相平行，则由这两三角形决定一亲似对应。

设△ABC及△A′B′C′为给出的一对对应三角形（图1—5b）。这时，其对应直线的交点属于一直线x，x即为亲似对应轴线。**

两个场的亲似对应可由亲似对应轴线x及一对对应点A—A′决定。

察看图1—5b，x为亲似对应轴线，A—A′为已知的一对对应点。这时对于平面上任一点B（场ω），总可以作出唯一的对应点B′（场ω'）。连AB得直线l，$l\times x=X$为二重点。连A′X即得直线l的的对应直线l′。过B作直线BB′平行于AA′，它与l′的交点B′即为B的对应点。

如果在平面上给出场ω'的点，按上述同样的方法可以作出其对应点。由此可见，给出轴线及一对点后，两个场的亲似对应便唯一确定。

三．亲似似对应的一些性质

亲似对应与透视仿射对应本质上相同，因而亲似对应同样具有同素性，从属性及等简比等基本特性。

根据这三个基本性质可进一步导出其它一些性质：

（1）一个场的平行直线变换后仍平行（平行性）。

（2）两平行线段之比值在变换后保持不变。

以上两点与上节透视仿射对应中所述相同。

（3）任意一对对应点被轴线x所分割的两线段之比为一定值。

设场ω与ω'的亲似对应由轴x及一对点A—A′确定。$AA'\times x=A_0$。我们称$\frac{A'A_0}{AA_0}=\lambda$，为由场$\omega$到$\omega'$变换的仿射比。若$AA_0$与$A'A_0$同向，则其值为正；两者异向，则其值为负。所示图例仿射比应为负值。现在我们来证明，仿射比λ与所取点对无关。

设B—B′为所设亲似对应中另一对对应点，BB′交x于点B_0，应有$\frac{B'B_0}{BB_0}=\lambda$（图1—6）。

由$\triangle X_0B'B_0\backsim\triangle X_0A'A_0$，

注：* 在一般著作中对这两种情况并不在名称上加以区别。

** 证明见第五章笛沙格定理。

得: $\dfrac{B'B_0}{A'A_0}=\dfrac{X_0B'}{X_0A'}$。　　　　（1）

由 $\triangle X_0B'B \backsim \triangle X_0A'A$,

得 $\dfrac{X_0B}{X_0A'}=\dfrac{X_0B}{X_0A}$。　　　　（2）

由 $\triangle X_0BB_0 \backsim \triangle X_0AA_0$,

得 $\dfrac{X_0B}{X_0A}=\dfrac{BB_0}{AA_0}$。　　　　（3）

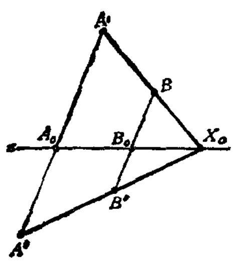


图1—6

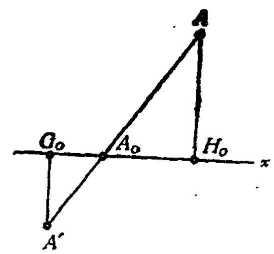


图1—7

由（1），（2），（3）式可得: $\dfrac{B'B_0}{A'A_0}=\dfrac{BB_0}{AA_0}$,

即　　$\dfrac{B'B_0}{BB_0}=\dfrac{A'A_0}{AA_0}=\lambda$ 。

（4）任意一对对应点到轴线x的距离之比等于仿射比（图1—7）。

设A—A′为已知对应点对，AH_0及$A'G_0$为点到x轴的垂线，这时 有

$$\frac{A'G_0}{AH_0}=\frac{A'A_0}{AA_0}=\lambda\ 。$$

（5）任意一对对应线段A B，A′B′的各端点与轴x的距离分 别为AG_0, BH_0, $A'I_0$, $B'J_0$，则它们的距离差之比等于仿射比λ,

即　$\dfrac{A'I_0-B'J_0}{AG_0-BH_0}=\dfrac{h'}{h}=\lambda$ （图1—8）。

由于　$\dfrac{A'I_0}{AG_0}=\lambda$，$\dfrac{B'J_0}{BH_0}=\lambda$，

∴　$A'I-B'J_0=\lambda\ (AG_0-BH_0)$，

故　$\dfrac{h'}{h}=\lambda$ 。

（6）任意两个对应图形的面积比等于仿射比。

设已知图形Φ由任意曲线围成，其对应图形为Φ′，应有面积$S':S=\lambda$ （图1—9a）。

我们先研究一特殊情况。设在场ω给出一矩形ABCD，边AB平行于轴x（图1—6b），其对应图形为一平行四边形$A'B'C'D'$。

矩形ABCD的面积$S = AB \cdot AD$，

四边形$A'B'C'D'$的面积$S' = A'B' \cdot A'H'$。

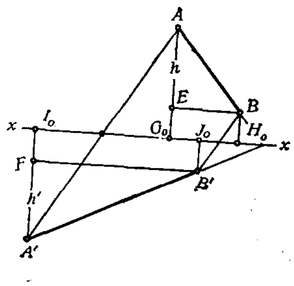


图1—8

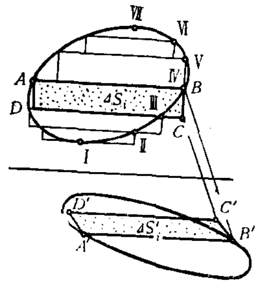


图1—9a

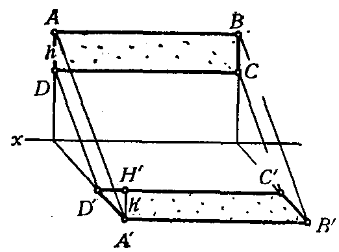


图1—9b

根据性质(5)知 $\dfrac{A'H'}{AD} = \lambda$，

$$\therefore \quad S' = A'B' \cdot \lambda AD = \lambda \cdot AB \cdot AD = \lambda \cdot S,$$

即 $\dfrac{S'}{S} = \lambda$。

对于场上由任意曲线围成的图形Φ我们可以把它分成若干块矩形，使矩形的一边平行于轴x，设每块小矩形的面积分别为$\triangle S_1$，$\triangle S_2$，$\triangle S_3$……它们的对应图形为平行四边形，其面积为$\triangle S'_1$，$\triangle S'_2$，$\triangle S'_3$……。

图形Φ的面积S近似地等于矩形面积之和

$$S \approx \triangle S_1 + \triangle S_2 + \triangle S_3 + \cdots\cdots,$$

而图形Φ′的面积S近似地等于相应的平行四边形面积之和，即

$$S' \approx \triangle S_1' + \triangle S_2' + \triangle S_3' + \cdots\cdots,$$

根据上面的证明知：

$$\triangle S_1' = \lambda \triangle S_1,\ \triangle S_2' = \lambda \triangle S_2,\ \triangle S_3' = \lambda \triangle S_3 \cdots\cdots,$$

$$\therefore \quad \frac{S'}{S} = \frac{\lambda \triangle S_1 + \lambda \triangle S_2 + \lambda \triangle S_3 + \cdots\cdots}{\triangle S_1 + \triangle S_2 + \triangle S_3 \cdots\cdots} = \lambda \text{。}$$

如果我们把图形Φ分得愈小，各矩形面积之和S越接近图形Φ的面积S；对应的平行四边形面积之和S′越接近Φ′的面积S′。在极限情况下两者一致，即得

$$\frac{S'}{S} = \lambda \text{。}$$

四． 亲似对应的两种特殊情况

根据亲似对应的方向与轴线的相对位置，我们可以把亲似对应分成一般和特殊二种情况。在以上讨论中，我们一直假设亲似方向 l 与轴线x成任意角度，这就是一般情况。特殊情况指以下两种：

亲似方向AA′与轴线x垂直，称作**正亲似对应**（图1—10）；

亲似方向AA′与轴线x平行，称作为**切移**（图1—11）。

1.正亲似对应

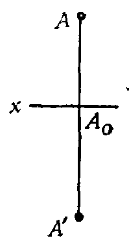


图1—10

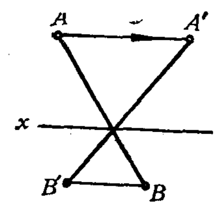


图1—11

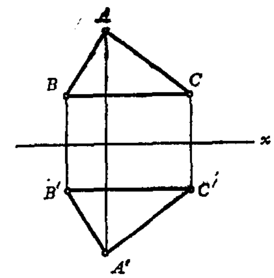


图1—12

正亲似对应根据仿射比λ的不同又可分为两种：反射及压缩。

若$\lambda=-1$，亦即当$\frac{A'A_0}{AA_0}=-1$，$A'A_0=-AA$。叫做反射。反射变换将一个图形变换成一个与之反向合同的图形，如图1—12中△ABC与△A′B′C′。

若$\lambda\neq1$，这种正亲似对应叫压缩。压缩变换可以将一个正方形变换成矩形（图1—13）。有时变换后实际上是伸张的情况，那时可看做是负的压缩。

注意在正亲似对应中，若仿射比$\lambda=1$，场上每个点均为二重点，因而每个图形变换成自身。

2.切　移

设亲似对应由轴x及一对点AA′决定，而AA′//x，这时即为切移。

在切移时，仿射比λ恒等于1。因为AA′与轴x的交点A_0离已知点越远，$A'A_0$与AA_0之长便越接近，当A_0在无限远，其比值即为1。

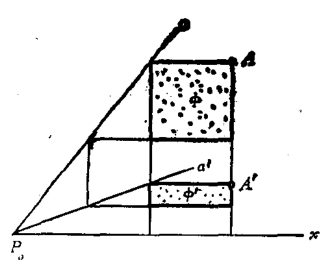


图1—13

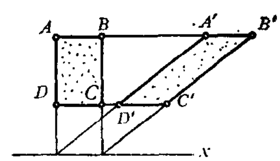


图1—14

在切移变换下，正方形ABCD变成平行四边形A′B′C′D′（图1—14）。由于切移时仿射比$\lambda=1$，故两个对应图形的面积恒相等。

下面我们仍回到对一般情况的讨论。

五． 亲似变换中的合同方向。

在一般的亲似变换中，场ω的任一线段AB的长度与其对应线段A′B′的长度不等，但是存在某特殊方向，这时A′B′＝AB，使A′B′与AB具有等长的方向称为亲似对应的**合同方**

向。

显然，当$AB//x$时，其对应线段$A'B'=AB$，故x轴方向为合同方向。

还存在另一对合同方向。

设亲似对应由A—A′及轴x决定（图1—15），M为AA′中点，过点M作$MN_0 \perp AA'$，N_0为它与轴x的交点，连N_0A及N_0A'，有

$$N_0A=N_0A'。$$

N_0A及N_0A'分别为场ω及ω′的合同方向，显然，场ω中平行于N_0A的线段CD将变换成与自身等长的线段$C'D'$。

由此可见，在一般情况下亲似对应中存在两对合同方向，一对与轴平行；另一对与轴相交。

特特情况：在反射变换中，场ω的任意一线段变换成与之合同的线段，因而一切方向均为合同方向。

六. 亲似变换的主向

一对互相垂直的直线d_1，d_2，若变换后所得直线d_1'，d_2'仍垂直，则由d_1，d_2及d_1'，d_2'决定的方向分别叫做场ω及ω′的**主向**。

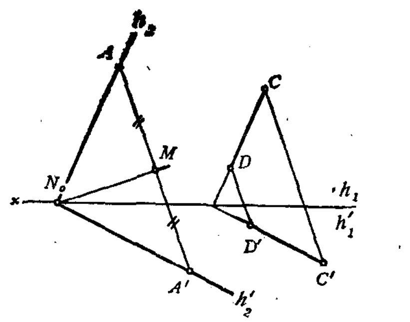


图1—15

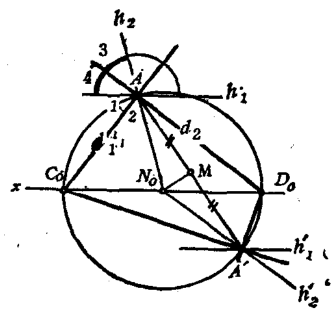


图1—16

设亲似对应由轴线x及A—A′决定（图1—16），N_0为AA′的中垂线与x的交点，以N_0为中心，N_0A为半径作圆k交x于点C_0，D_0，于是得两对对应直线AC_0—$A'C_0$及AD_0——$A_0'D_0$。因为C_0D_0为圆k的直径，故$C_0A \perp D_0A$，$C_0A' \perp D_0A'$。由此可知，所作的二对直线AC_0，AD_0及$A'C_0$，$A'D_0$即为场ω及ω′的主向。

从作图中可以看出，一般情况下，每个场只有一对主向。在反射下，主向成为不定，即可以任一对垂直方向为主向。

主向与合同方向之间具有一定的关系。

在图1—16中，直线h_1（$//x$）及h_2（$=N_0A$）为场ω合同方向，d_1，d_2为主向，可以证明：直线d_1，d_2分别为直线h_1h_2构成的夹角的平分线。

$\because N_0A=N_0C$，$\therefore \angle 2=\angle N_0C_0A$；

$\because h_1//x$，$\therefore \angle 1=\angle N_0C_0A$；

$\therefore \angle 1=\angle 2$。

同理：$\angle 3=\angle 4$。

故场ω的两主向正是两合同方向构成的夹角的内外分角线。

§3. 圆的亲似对应图形

一. 椭圆—圆的对应图形

大家知道，在平行投影下，圆的投影为一椭圆，而亲似变换把一个场的图形变换成另一场的图形，相当于平行投影，因而，圆的亲似对应图形为一椭圆。

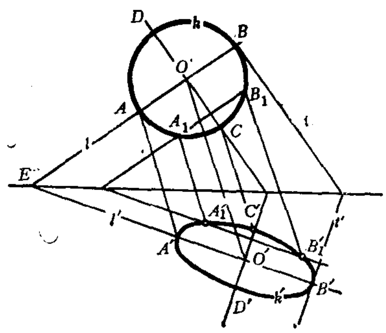


图1—17

设已知亲似轴 x 及一对对应点O—O′，k 为以O为中心，OA为半径的圆，我们来研究其对应椭圆的作法（图1—17）。

可以把圆k 看做是由若干点组成的，作圆的对应图形归结为求作这些点的对应点。图1—17示出作A，B，C，D，A_1，B_1 等点的对应点的情形。将所得的点A′，B′，C′，D′，A_1'，B_1'连成一光滑的曲线即得所求椭圆。

二. 椭圆的仿射性质

一个圆通过亲似变换后成为一椭圆，这时圆的某些性质在椭圆中已不复存在，例如圆周上的点与中心距离相等，而椭圆上的点便不具有这种性质；但是圆的某些性质则依然存在，这些性质我们就叫做椭圆的仿射性质。

把圆变成椭圆时，圆的所有不变的性质就是椭圆的仿射性质。

1.椭圆的**中心**。园心O的对应点O′称为椭圆的中心。众所周知，圆心是这样的点，它平分一切通过它的弦，这一性质在亲似变换后并未改变，因而椭圆的中心也就是平分所有通过它的弦的点。

通过椭圆中心O′的弦叫做椭圆的**直径**。

2.共轭直径：圆的一对互相垂直的直径（圆的共轭直径）变换后所得的一对直径称为椭圆的共轭直径。由于在亲似变换下，一对垂直的直线变换后一般不再垂直，故椭圆的任一对共轭直径一般并不垂直。垂直这一性质不属于仿射性质。但圆的任何两个互相垂直的直径具有这样的性质，其中每一个都能平分另一个的平行弦。例如，$A_1B_1 \parallel AB$，$CD \perp AB$，因而A_1B_1被CD平分（图1—17）。这一性质是仿射的，在亲似变换后，弦$A_1'B_1'$被A′B′的共轭轴C′D′所平分。

这一特性可利用来作出已知椭圆的任一对共轭直径。设已知椭圆k′（图1—17），欲作已知直径A′B′的共轭直径C′D′。为此，任作一平行于A′B′的弦$A_1'B_1'$，将$A_1'B_1'$的中点与O′相连，它与椭圆k′交于点C′，D′。直径C′D′即为A′B′的共轭直径。

在椭圆的共轭直径中存在一对互相垂直的，这对垂直的共轭直径称为椭圆的**主直径**或**轴**。根据上节讨论可知，当园的一对共轭直径方向与主向一致时，其对应的共轭直径即为椭圆的主直径。

3.切线。当直线 t 与圆k相切时，其对应直线t′与椭圆k′也相切（图1—17）。如AB与

CD为圆的一对共轭轴，显然，直径AB端点B的切线t平行于AB的共轭轴CD，由此可知：

过椭圆直径A′B′的端点B′的切线t′，平行于A′B′的共轭直径C′D′。

这一性质可利用来作出椭圆上任一点的切线。例如作点B′的切线t′，可先引直径A′B′，再利用与A′B′平行的弦$A_1'B_1'$确定A′B′的共轭轴C′D′，然后过B′作C′D′的平行线，即得所求切线t′（图1—17）。

三．椭圆的作图

1.已知椭圆的一对共轭直径作椭圆。

设AB，CD为椭圆的一对共轭直径（图1—18）。为了作出该椭圆，我们设法使AB，CD与圆的一对共轭直径A′B′，C′D′建立亲似对应，这样圆的对应图形即为所求。

为简便起见，我们使A′B′与AB重合，并作另一直径C′D′⊥A′B′。于是由亲似轴AB（A′B′）及一对对应点C—C′可确定两个场的亲似对应，圆k′的对应图形k即为所求的椭圆。

2.已知椭圆的共轭直径求其主直径。

在上例中，若作出圆k′的一对共轭直径与场的主向平行，这时其对应共轭直径即为椭圆k的主直径（图中未示）。但这种方法辅助作图较多，不够简便，因此我们要研究另一种更简便的方法。

我们先研究根据已知椭圆的长短轴作椭圆的一对共轭直径的问题。

设已知椭圆s的长短轴AB，CD及中心O(图1—19)。按上例方法，作一圆s′与s成亲对应。其中圆s′的直径A′B′，C′D′的方向分别与AB，CD重合，以AB为亲似轴线，C—C′为一对对应点。设M′为圆s′的任一点，其对应点为M，根据亲似对应的**特性**可知

$$\frac{M'E}{ME}=\frac{C'O}{CO}=\lambda\text{，}$$

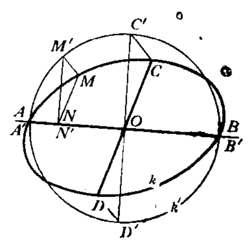


图1—18

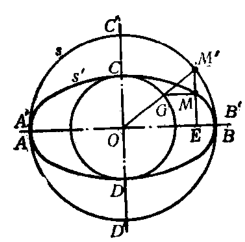


图1—19

根据这一比例关系，可以得这样的作M的方法：以短轴OC为半径作一圆，连OM′与该圆交于点G，过G作GM//OB，GM与MM′的交点M即为M′的对应点。事实上，这时有：

$$\frac{M'E}{ME}=\frac{M'O}{GO}=\frac{C'O}{CO}\text{。}$$

用这种方法可以作出椭圆的任一对共轭半径。作出圆的一对共轭半径OM′及ON′（图1—20），求出M′，N′的对应点M，N。则OM，ON即为椭圆k的一对共轭半径。

我们的目的是要解决与上述相反的问题，即由椭圆的共轭半径来求其主轴AB，CD。

试分析△GM′M与△HN′N的情况。由于两者均为直角三角形，且N′H＝M′G，故

$\triangle GM'M \cong \triangle N'NH$。

现将$\triangle N'NH$绕中心O按顺时针方向转过90°，这时ON'与OM'重合，点N达N_1位置，直线ON_1为椭圆半径ON转过90°后的位置。$\triangle GN_1M'$与$\triangle GMM'$合成一个矩形。此矩形的一边N_1M'与椭圆的长轴AB方向一致，边N_1G与椭圆短轴的方向一致。同时OM'，OG分别与椭圆的长短半径等长。这样，我们便得到一种根据已知椭圆的共轭半径作出长短轴的方法，作图步骤如下：

（1）将已知共轭半径之一ON转过90°达ON_1。

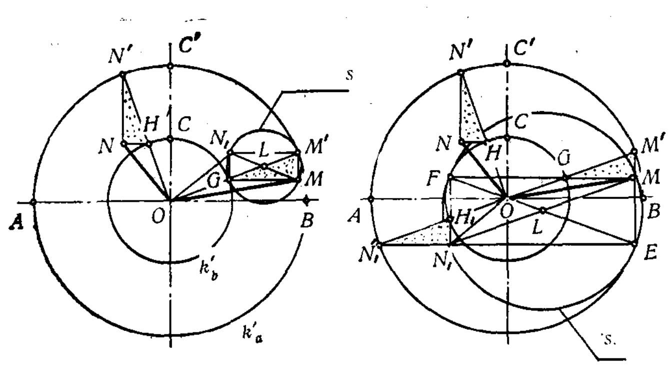
（2）取N_1M的中点L，连接直线OL。

（3）在OL上作LM'及LG等于LM；这时OM'及OG分别与所求长短半径相等，而N_1M'与N_1G分别与所求长短半径的方向一致（动径的端点N_1与决定长轴大小的端点M'的连线决定长轴方向）。

（4）过中心O作$OB//N_1M'$并取$OB=OM'$即为长半径；作$OC//N_1G$并取$OC=OG$即所求短半径。

从图1—20（a）中可以看出，矩形$GMM'N_1$的外接圆s与圆k_a'和k_b'相切。设椭圆的长短半径分别为a，b，圆s的直径为d，于是可写出等式：$d=a-b$。

所作的圆s称为主径圆*，在所设条件下，主径圆的**直径**等于椭圆的**长半径和短半径之差**。以上讨论中我们令ON按顺时针方向旋转90°，如果我们将图1—20（a）中的$\triangle N'NH$绕中心O按逆时针方向转过90°，用同样的作图方法可确定椭圆长短轴的大小和方向。图1—20（b）示出按逆时针方向旋转的情况：矩形N_1EMF中，边N_1E，N_1F分别确定椭圆长短轴方向，OE和OF分别决定椭圆长短半径a，b。



a.　　　　b.

图1—20

矩形N_1EMF的外接圆s为主径圆，这时其直径d为椭圆的长短半径之和：

$$d=a+b。$$

由此可见，按不同的方向旋转可以得到不同的主径圆，将两个结果合在一起可得：**主径圆的直径为椭圆长短半径的代数和。**

主径圆在解决许多实际作图问题中可使作图得以简化，这将在后面作进一步说明。

注：* “主径圆”这一名称由北京航空学院于长江先生命名，见《仿射对应场成亲似对应的条件及其亲似位置的确定》63.9

§4. 仿 射 变 换

一． 仿射变换与透视仿射变换是一般和特殊的关系。所谓"透视的"，是指两个场的对应点连线互相平行；一般的仿射变换也就是非透视的仿射变换，对应点的连线不再存在平行关系。

假设有两个透视仿射对应的平面，将其中一个平面作任意移动，或将其中一个按比例放大（或缩小），或者既移动又放大。这样，两个平面场之间的透视关系便遭到破坏。但这些改变不会破坏透视仿射对应中存在的三个基本性质——同素性，从属性，等简比。如图1—21，场ω与ω'的△ACD与$A'C'D'$互相对应。将平面ω先移到ω_1的位置，然后按比例放大将△ACD变成△$A_1C_1D_1$。在这种改变后，场ω'与ω_1之间的透视关系完全破坏，但ω'与ω_1之间的对应仍保持了三个基本性质。

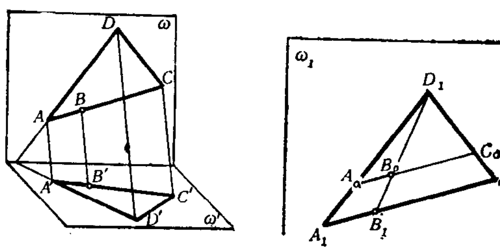


图1—21

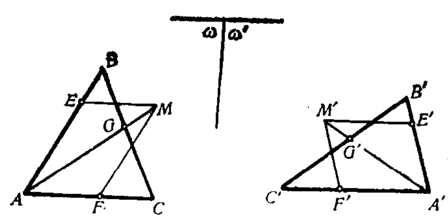


图1—22

两个场之间保持同素性、从属性及等简比的变换称为仿射变换。

在仿射对应中场ω和ω'可以处在一个平面上，也可以不在一个平面上。

二． 若给出两个对应的三角形，则两个场的仿射对应便唯一确定。

设△ABC及△$A'B'C'$为给出的两个对应的三角形（图1—22）。M为场ω的任一点，连AM交BC于点G。根据从属性及三个点的简比相等，我们可以在直线$B'C'$上确定一点G'，使满足：

$$(B'C'G') = (BCG)。$$

然后连接$A'G'$，再根据

$$(A'G'M') = (AGM)，$$

在直线$A'G'$上作出一点M'。点M'即为M的对应点。因为M'是唯一的，可知两个对应的三角形使两个场的仿射对应唯一确定。

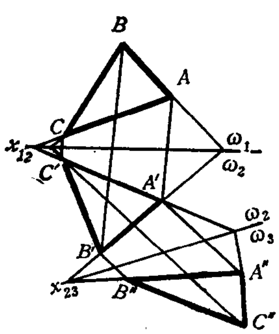


图1—23

三． 设亲似变换Q_{12}，将场ω_1变成ω_2；亲似变换Q_{23}将场ω_2变成场ω_3，则场ω_1与ω_3之间构成仿射对应（图1—23）。以F_{13}表示场ω_1至ω_3仿射变换，则上述关系可写成：

$$F_{13} = Q_{12} \cdot Q_{23}。$$

用文字表示即：仿射变换F_{13}为亲似变换Q_{12}与Q_{23}之积。

这一结论是显而易见的。因为每个亲似变换始终保持了同素性，从属性及等简比，因

而ω_1与ω_3成仿射。

§5. 使两个仿射对应的平面达到亲似对应位置

一． 使两个仿射对应平面达到亲似对应位置的问题，在绘图理论中具有重要的意义。下面通过两个定理来说明这个问题。

定理一：相似变换并移动仿射对应场之一，就可以使两个场达到亲似对应位置。

设两个仿射对应场由$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$决定(图1—24)。现将$\triangle A'B'C'$相似变换成$\triangle A_1'B_1'C_1'$，使一边$A_1'B_1'=AB$。将$\triangle A_1'B_1'C_1'$移到$\triangle A_1''B_1''C_1''$的位置，其中$A_1''B_1''\equiv AB$。于是$\triangle A_1''B_1''C_1''$与$\triangle ABC$便处于亲似对应位置：$AB$（$A_1''B_1''$）为亲似轴线，$CC_1''$为亲似对应方向。

由此可见，使两个仿射对应场达亲似对应，必须先作出一对对应的合同线段，然后将对应的合同线段移到重合位置。显然，我们可以通过相似变换使任一对对应线段成为合同线段。因此，也就是可以用任意一对直线为亲似对应轴线使两个场达到亲似对应。在所示图例中，为了以AB作为轴线，我们将$A'B'$放大至AB；AB与$A'B'$之比称为相似变换系数。当用不同的直线作为亲似轴时，其相似变换系数也不同。如果两个仿射对应场存在一对对应的合同线段XY和$X'Y'$，则以XY为轴线，只需移动一个场就可使两者达到亲似对应位置。

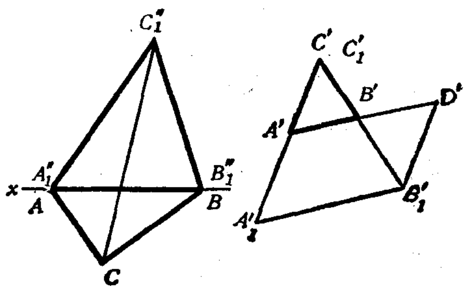


图1—24

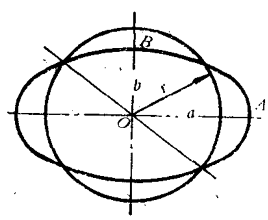


图1—25

并不是在一切情况下两个仿射对应场总存在一对对应的合同线段。现在我们来分析，在什么条件下，两个仿射对应场中具有一对对应的合同线段。

设场ω与ω'成仿射对应，在ω场任作一圆（称为尺度圆），在ω'场作出其对应椭圆（称为尺度椭圆）。移动场ω使圆心O与椭圆中心O′重合（图1—25），这时可能有三种情况：

①圆与椭圆相交；

②圆与椭圆相切；

③圆与椭圆无公共点。

在第①，②两种情况下，两个场存在对应的合同线段，因而只需移动一个场就可使两个场达到透视位置。第③种情况时，两个场不存在对应合同线段，这时只有通过相似变换其一，才能使两个场达到亲似对应位置。

设尺度圆的半径为r，尺度椭圆的长短轴半径为a，b，共心的尺度圆与尺度椭圆具有公共点的条件可表示成：

$$a\geq r\geq b。$$

根据以上讨论可得如下定理：

定理二，在场ω与ω'的仿射对应中，若ω的尺度圆半径 r 小于或等于 ω' 的尺度椭圆长半轴，而大于或等于它的短半轴，则只需移动一个场便可使两者达到亲似对应位置。

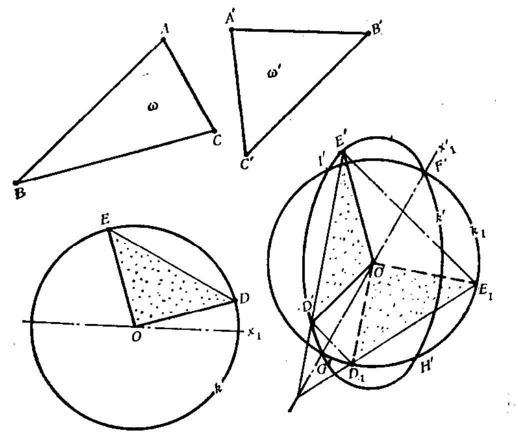


图1—26

二．下面我们来研究具体的作图方法。

假设场ω与场ω'的仿射对应，由△ABC及△A'B'C'确定(图1—26)，其中A'B'＜AB，A'C'＞AC因此场ω与ω'只需移动其一便可使两个场达到亲似对应。由以上讨论可知，为使两个场达到亲似，必须使场ω与ω'的一对对应合同线段处于重合位置，因此基本的作图方法是：

1.在场ω作一尺度圆k：可以场ω的任一点O为中心，任意长的线段OD（r）为半径作圆（实际作圆时应以作图方便为原则）。

2.在 k 上取一对垂直的半径OD，OE，在场ω'作出其相应的直线O'D'及O'E'。以OD'，O'E'为共轭半径所确定的椭圆k'即为尺度椭圆。

3.以O'为中心作一大小等于k 的圆k_1，k_1与k'交于四个点F'，G'，H'，I'，由此确定直线x_1'（F'G'）及x_2'（H'I'）即为仿射对应中场ω'的合同方向。

4.作出x_1'及x_2'在ω的对应直线x_1，x_2即为场ω的合同方向（x_1、x_2在图中未作出）。

5.将场ω搬动，使O与O'重合，x_1与x_1'重合，并将场ω的任一已知点，例如点D 同时搬到新位置得点D_1，D_1和D'即为所求亲似对应的一点对。D_1D'的方向必与圆 k_1 和k'的一公切线方向一致。

由二重直线x_1'及一对对应点D'—D_1所决定的亲似对应即为所求。在此亲似对应中与△A'B'C'对应的图形即为△ABC搬动后的图形。

上述作图方法有一个不足之处，那就是需要先画出椭圆k'，然后借助它与圆k的交点来确定两个场的合同方向。这样作图比较繁且难以作准确。是否可以不通过作椭圆而直接确定所求的亲似对应呢？可以。这只要利用上面所谈到的主径圆便可实现这一点。这种方法简称为主径圆法。下面就来说明这种方法。

三． 主径圆法

假设仿射对应由一对对应的三角形ABC及A'B'C'确定，如同上述，我们先在场ω作一尺度圆k的共轭半径OD，OE，在场 ω'作出其对应的尺度椭圆的共轭半径O'D'，O'E'(图1—26)，这时，若使△O'D'E'与等腰直角三角形ODE成亲似，则问题便解决了。为此，我们按如下步骤作图：

1.根据已知共轭半径O'D'，O'E'作出主径圆 s；将O'E' 按顺时针方向转过 90° 达O'E_1'（图1—27a），以D'E_1'为直径作圆即所求主径圆。

2.以O'为中心，OD之长为半径作弧，该弧与主径圆相交于两点，设D为其中一交点，以D为D'的对应点（另一点则为另一解）。

3.将OD按逆时针方向转过90°（OD的转向与O'E'的转向相反）达OE位置，OE即为