微分方程論叢

I

常微分方程通論

李國平
齊民友 合編

一九五四年暑期綜合大學教學研究座談會印

北京

I．一級常微分方程解的存在與唯一性問題

1、常微分方程式論的基本問題之一是：已知一個常微分方程，比方說，一個一級常微分方程。

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

要求一個函数 $y=\varphi(x)$ [解] 使得

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f[x,\varphi(x)]$$

而且要滿足初始條件 $y_0=\varphi(x_0)$．在微分方程式論發展的歷史上，很長一段時期内，人們的注意力集中在如何用一种方法来实際地找出 $\varphi(x)$ 来，並且把它寫成有限多個初等函数的組合、但是 Liouville 在 1841 年即已指出，像 Riccati 方程．

$$y'=ay^2+by+C$$

這樣簡單的一級常微分方程，它的解就已經不可能用初等函数来表示了、因此，若要解這一些微分方程，就只好去求近似解、但是，在求近似解前有一個問題必須解决，即是，這樣的微分方程究竟有没有解存在呢？如果解本身不存在，那末求近似解就是没有意義的了，這樣提出了解的存在性问題，而且我們将會看到，微分方程解的存在问題是與近似計算有密切联系的。

除了存在性問題以外，另一個需要解决的问題是解的唯一性问題，這一個问題在实際應用上是很重要的，如果我們确定了上述微分方程有解存在，而且实際上找到這個解，或者是求出了它的近似值，還不能認為问題即已解决，因為我們不知道是否還有其他的函数 $y=\psi(x)$ 滿足這個方程與這個初始條件 $y_0=\psi(x_0)$．如果有這樣的解存在的話，我們就不能認為我們的问題已經全部解决，特別是，不能确定，我們所求到的解 $\varphi(x)$

是不是實際問題所恰好需要的解，因此，又產生一個問題，即上述微分方程在什麼條件下有唯一的解存在？即解的唯一性問題。總之，我們要討論的問題即是：

「設有常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

在什麼條件之下，上述微分方程有解 $y=\varphi(x)$ 存在，滿足初始條件。

$$y_0=\varphi(x_0),$$

以及在什麼條件之下，滿足這一初始條件的解是唯一的？」

在以下　　　　　　　　　　我們要介紹解決這個問題的兩种基本原則即 Cauchy 的优級數法（這种方法适用於複变數範囲）以及 P: Card 的逐步接近法（這种方法适用於实变數範囲，但也可以推廣到複变數範囲中去），並把這兩种方法應用到較普遍的情况下去，在最後則給出更廣泛的存在與唯一性问題的解决。

2、用以解决解的存在與唯一性問題的第一個原則是 Cauchy 的优級數法。在介紹這個方法之前先介紹优級數的概念。

設有兩個冪級數：

$$(a)\quad \sum_{m,n,\cdots p=0}^{\infty} a_{mn\cdots p}x^m y^n\cdots z^p$$

$$(A)\quad \sum_{m,n\cdots,p=0}^{\infty} A_{mn\cdots p}x^m y^n\cdots z^p,$$

若 $|a_{mn\cdots p}|\leq A_{mn\cdots p}$ 就說 (A) 是 (a) 的优級數，設(A) 收斂於 $F(x,y,\cdots,z)$，則說 $F(x,y,\cdots,z)$ 是 (a) 的优函數，這一個關係可以表示為

$$(a)\ll(A)$$

优级数有两個性質：

1、若 (a) ≪ (A)，而 (A) 在某一境域上是廣義一致收斂（當然也絶对收斂），則 (a) 在同一境域上也是廣義一致收斂與絶对收斂．

這一點很容易証明．

2、若 (a) ≪ (A)，而 $P(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 是 (a) 的係数的係数多項式，則

$$|P(a_1, a_2, \cdots, a_k)| \leq P(A_1, A_2, \cdots, A_k)$$

$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 (A) 中相當於 (a) 中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的係数．

其次要証明：

若 (a) 在 $\overline{D}$：$|x| \leq r$，$|y| \leq s$，$\cdots$，$|z| \leq t$ 上絶对收斂且一致收斂，且其和是 $(\overline{D})$ 上的解析，$(\overline{D})$ 上連續的函数 $F(x, y, \cdots, z)$，令其最大模為 M，則

$$M\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{s}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{z}{t}\right)^{-1};$$

$$M\left(1-\frac{x}{r}-\frac{y}{s}-\cdots-\frac{z}{t}\right)^{-1}$$

都是 (a) 的优函数．

証明是很簡单的，由 Cauchy 不等式：

$$|a_{mn\cdots p}| \leq M r^{-m} s^{-n} \cdots t^{-p}$$

可知 $\sum M r^{-m} s^{-n} \cdots t^{-p} x^m y^n \cdots z^p = M\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{s}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{z}{t}\right)^{-1}$ 是 (a) 的优函数，又 $M\left(1-\frac{x}{r}-\frac{y}{s}-\cdots-\frac{z}{t}\right)^{-1}$ 的 Taylor 展式之係数大於 $M\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{s}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{-1}$ 的相當係数，因此它也是 (a) 的优函数．

利用优級数就可以証明

BAM4 / 0.3

存在定理 I．設 x, y 都是複变数，而 $f(x,y)$ 是在

$$\overline{D}: \quad |x-x_0|\leqslant r, \quad |y-y_0|\leqslant s$$

上的解析函数，則微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

必有唯一的解 $y=y(x)$，满足 $y_0=y(x_0)$，且解析於 $|x-x_0|<\rho\left(\rho=r\left(1-e^{-\frac{s}{2rM}}\right),\ M=\max_{\overline{D}}|f(x,y)|\right)$上．

我們可以設 $x_0=y_0=0$ 而不失普遍性，因為這只要作一個变换 $X=x-x_0$，$Y=y-y_0$ 就可以了．因此在以下的討論中都設 $x_0=y_0=0$．

設 $f(x,y)$ 的 Taylor 展式為

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n,$$

如果 (1) 真有解析於 $x=0$ 附近的解，則這個解應該是

$$y=(y')_0 x+\frac{(y'')_0}{2!}x^2+\cdots+\frac{(y^{(n)})_0}{n!}x^n+\cdots$$

這些係数完全可以由 (1) 求出：

$$\begin{cases}(y')_0=f(0,0)\ \ =a_{00} \\ (y'')_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 f(0,0)\ \ =a_{10}+a_{01}a_{00} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (y^{(n)})_0=P_n(a_{00};a_{10},a_{01};\cdots;a_{n0}\cdots,a_{n0})=P_n\end{cases} \tag{2}$$

其中 P_n 顯然是 $a_{00};\cdots,a_{n0}$ 的正係数多項式．從而即得

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n}{n!}x^n \tag{3}$$

因此可知，如果方程 (1) 在 $x=0$ 近鄰果然有满足 $y(0)=0$ 的

解析解的話，這樣的解只能有一個．

如果這樣做出的(3)在$|x|<\rho$内的确是收斂，因而是廣義一致收斂的，則$y(x)$當然是(2)的解析解，而且$y(0)=0$．在Cauchy以前，人們一直認為這是不証而自明的事實、但是实際上我們很容易舉出例子来否定這一点，例如对方程

$$x^2y'=y-x，及初始條件\ y|_{x=0}=0，$$

按上法求得者是

$$y=x+x^2+2!x^3+\cdots+(n-1)!x^n+\cdots。$$

但這一級数却除在$x=0$外是處之發散的、由這個例子可見，(3)的廣義一致收斂性是只有在一定條件下才是有的。

在上述的例子中，容易看到$f(x,y)=\frac{y-x}{x^2}$、故$x=0$，$y=0$是一個奇異點，而所得出的級数是發散的($x=0$除外)、如果$x=0$，$y=0$是$f(x,y)$解析域内的一個点，則這种情况是不可能發生的．在這個條件之下(3)在$|x|<\rho$為廣義一致收斂的嚴格証明是Cauchy給出的。

我們知道$f(x,y)$的优函数是

$$\varphi(x,y)=\frac{M}{(1-\frac{x}{r})(1-\frac{y}{s})}$$

以$\varphi(x,y)$的係数代$f(x,y)$的係数，則变P_n為Q_n．從而可以構成另一冪級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n}{n!}x^n, \tag{4}$$

它一定是(3)的优級数、Q_n既然是由以$\varphi(x,y)$代$f(x,y)P_n$而得，則自然可用與(2)相同之法自

$$\frac{dY}{dZ}=M\left(1-\frac{Z}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{Y}{s}\right)^{-1}\ 以及初始條件\ Y(0)=0 \tag{5}$$

中求出．

如果（5）有一個使 $Y(0)=0$ 的解，而且解析於 $x=0$ 附近，則這個解必然就是（4）、因之（4）在 $x=0$ 附近是收斂的，也是廣義一致收斂的、但（1'）之有解是容易証明的：

$$\left(1-\frac{Y}{S}\right)dY=\frac{M\,dx}{1-\frac{x}{r}}$$

$$Y(x)=S-S\sqrt{1+2r\frac{M}{S}\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{r}\right)}$$

其中取 $\operatorname{Log}1=0$ 的一　以及 $\sqrt{1}=1$ 的一　容易看到 $Y(0)=0$，$1+2r\frac{M}{S}\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{r}\right)$ 之零点是 $\rho=r\left(1-e^{-\frac{S}{2rM}}\right)<r$. 故在 $|x|<\rho$ 内 $Y(x)$ 是解析的，故知（4）在 $|x|<\rho$ 内亦是廣義一致收斂的，而（3）的收斂性也就証明了

現在還要証明，當 $|x|<\rho$ 時 $|y(x)|\leq S$. 否則以 $y(x)$ 代入 $f(x,y)$ 會使後者沒有意義，但

$$|y(x)|\leq Y(|x|)$$

又因 $Y(x)$ 的 Taylor 展式只有正係數，故當 $|x'|>|x|$ 時 $Y(|x'|)>Y(|x|)$，故

$$\max_{|x|\leq\rho_1<\rho}|y(x)|<Y(\rho_1),$$

但 $Y(\rho_1)<S$，故

$$\max_{|x|\leq\rho_1<\rho}|y(x)|<S$$

$$|y(x)|\leq S\qquad |x|<\rho.$$

3．現在來介紹在解決一級常微分方程解的存在與唯一性問題的第二個原則—Picard 的逐步接近法．

設微分方程（1）：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\tag{1}$$

有一個解 $y=y(x)$ 通過 (x_0,y_0)，則這個解又必然滿足積分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,y(x)]dx \tag{5}$$

反之，積分方程(5)的連續解 $y=y(x)$ 又必定滿足微分方程(1)；及初始條件 $y_0=y(x_0)$。因此我们可以不直接証明微分方程(1)有滿足初始條件的解的存在與唯一性，而去証明積分方程(5)有唯一連續解存在，為此，我们需要假設 $f(x,y)$ 在境域 D：$|x-x_0|\leq a$，$|y-y_0|\leq b$ 上是連續的，而且对 y 滿足 Lipoclity 條件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<K|y'-y''|.$$

首先，我们可以取 $y=y_0$ 作為第一近似解

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,y_0]dx \tag{6}$$

$\varphi_1(x)$ 顯然是連續函数，與以 $\varphi_1(x)$ 作第二近似解而作

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,\varphi_1(x)]dx \tag{7}$$

仿照這樣就可以依次作出：

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,\varphi_2(x)]dx\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,\varphi_{n-1}(x)]dx\\ \cdots\cdots\cdots\end{array}\right. \tag{8}$$

而得到一個近似解序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 設 $\max|f(x,y)|=M$，以及 $h=\min(a,\frac{b}{M})$ 我们首先証明在 $|x-x_0|\leq h$ 上這樣的作法是可能的，因為

$$|\varphi_1(x)-y_0|<M|x-x_0|\leq Mh\leq b,$$

所以以$\varphi_1(x)$代入$f(x,y)$時是可能的，而

$$|\varphi_2(x)-y_0|<M|x-x_0|\leq Mh\leq b,$$

因此又可能作$\varphi_3(x)$．一般地說，如果作出了$\varphi_n(x)$則

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leq\int_{x_0}^{x}|f[x,\varphi_{n-1}(x)]|dx\leq M|x-x_0|\leq Mh<b.$$

因此，又可作出$\varphi_{n+1}(x)$，總之$\{\varphi_n(x)\}$在$|x-x_0|\leq h$時是完全在R中的，其次我们要証明在$|x-x_0|\leq h$上$\{\varphi_n(x)\}$一致收斂於某函数$\varphi(x)$．為此我们估計級数

$$\varphi_0(x)+[\varphi_1(x)-\varphi_0(x)]+\cdots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]+\cdots \quad (9)$$

之各項．設$x\geq x_0$

$$\varphi_0(x)=y_0 \quad |\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leq\int_{x_0}^{x}|f(x,y_0)|dx\leq M|x-x_0|$$

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leq\int_{x_0}^{x}|f[x,\varphi_1(x)]-f(x,y_0)|dx\leq K\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(x)-y_0|dx$$
$$\leq MK\frac{|x-x_0|^2}{2!}$$

而一般地則有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leq MK^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

又因$|x-x_0|\leq h$，故

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leq\frac{M}{K}\frac{(Kh)^n}{n!}$$

但是$\frac{M}{K}\sum\frac{(Kh)^n}{n!}$是收斂的，因此級数(9)在$|x-x_0|\leq h$一致收斂，又因(9)的部分和即是序列$\{\varphi_n(x)\}$，故此序列在$|x-x_0|\leq h$上一致收斂于$\varphi(x)$．因$\varphi_n(x_0)=y_0$，故$\varphi(x_0)=y_0$．又因$\varphi_n(x)$皆為連續函数，故$\varphi(x)$也是連續函数、而且$|\varphi(x)-y_0|\leq b$用一致收斂性而在(8)之積分量下求極限即有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[x,\varphi(x)]dx$$

$$y=b-b\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Ma}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

它在 $|z|<\rho$ 内 $\left[\rho=a\left(1-e^{\frac{-b}{(n+1)Ma}}\right)\right]$ 是解析的，上面的根號表示當 $x=a$ 時其值為 $+1$ 的一枝，而且當然也很容易証明，當 $|x|<\rho$ 時，$|y|<b$. 由此即可得到存在定理 II 之証明。

至於高級微分方程式，則很容易地化為一級微分方程組，例如

$$y^{(n)}=f(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

就可以化為方程組：

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\quad \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x;y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}).$$

因此又有：

存在定理 III、設有 n—級常微分方程式：

$$y^{(n)}=F(x;y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{5}$$

其中 x,y 是複變数，而 F 是 $x;y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 在 $|x-x_0|\le a$, $|y^{(i)}-y_0^{(i)}|\le b$ 內的解析函数，則方程式 (5) 必有唯一的解 $y=y(x)$，在 x_0 附近是解析的，而且

$$y_0=y(x_0),\ \cdots,\ y_0^{(i)}=y^{(i)}(x_0)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

以上所述的定理，实際上都只是局部性质。但是我们很容易仿照 1 中的方法来做解析开拓。

3、現在我们把第一原則應用到線性微分方程組去。

存在定理 IV、設有一級線性微分方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=A_i(x)+\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(x)y_j\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

Ⅱ、一級常微分方程式與組（高級常微分方程）的解之存在與唯一性問題

（一）第一原則的應用

1．前面已經証明，对於一級微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 為解析，則它必有唯一解 $y=\varphi(x)$，解析於 x_0 附近，且致 $y_0=f(x_0)$．但是．上述存在定理只在 (x_0,y_0) 附近適用，因而只是局部性質的，即只断言當 $|x-x_0|<\rho$ 時 $y=\varphi(x)$ 是(1)之解，但 $\varphi(x)$ 之Taulor級数收斂半径 r_1，未必即是 ρ，而可能大於 ρ．此時，在 $\rho\le|x|<r_1$ 内，$y=\varphi(x)$ 是否仍是(1)之解這一问題并未解决．

現在將 $\varphi(x)$ 解析開拓而得一(W)解析函数 $\Phi(x)$，解析于其Riemann曲面 S_y 上的一個通連境域 $D(S_y)$ 内．又將 $f(x,y)$ 解析開拓而得一解析函数 $F(x,y)$，解析於其四度空间Riemann．曲面 $\mathcal{S}_f$ 上一通連境域 $\mathcal{D}(\mathcal{S}_f)$ 内。

現在，在 $D(\mathcal{S}_y)$ 上取相當於 $[x_0,\varphi(x_0)]$ 之点，並向 $D(\mathcal{S}_y)$ 之任一可内接界点 P_0 作一全在 $D(S_y)$ 内（P_0 除外）之連續曲線 (P)，命 (γ) 為 (Γ) 在 x 平面上之 影，而 Ξ_0 為 P_0 之 影，則 (γ) 為 x 平面上之連續曲線、將 $\varphi(x)$ 沿 (γ) 自 x_0 開拓到 Ξ_0，則得 $\Phi(x)$ 之一枝 $\Phi_1(x)$，而 Ξ_0 為其異點，$\Phi_1(x)$ 解析于包含 (γ) 在内之一多頁或单頁通連境域 D_1 中，而其值則成為另一多頁或单頁的通連境域 D_2．當 x 在 D_1 内時、$(x,\varphi(x))$ 之集合即成四度空间 $\bar{S}(x,y)$ 中之一多頁或单頁通連境域 D'，而當 x 沿 γ 变动時，$(x,\Phi_1(x))$ 就描出 D' 中之一連續曲線 (Δ)，而其起点為 $(x_0,\varphi(x_0)$。自 (x_0,y_0) 起沿 (Δ) 解析開拓 $f(x,y)$．假設最初遇到的異点是 (Ξ_0,Y_0)；於是得到 $F(x,y)$ 之一枝 $F_1(x,y)$，

而其存在區域為一多頁或单頁的通連境域（$\mathscr{D}'$），（z_0'，$\Phi_1(z_0')$）為其界点．（△）之弧（Δ_1）$\widehat{(x_0,y_0)(\Delta)(z_0'\ \Phi_1(z_0'))}$相應於（$\gamma$）之弧（$\gamma_1$）：$(\widehat{x_0(\gamma),z_0'}$．$F_1(x,y)$及$\Phi_1'(x)$都解析於（$\gamma_1$）上（$z_0'$除外），但$\Phi_1'(x)-F_1(x,y)$在$x_0$之近鄰恒等於0，故在（$\gamma_1$）之近隣（$z_0'$除外）全等於0，即是說$y=\Phi_1(x)$是

$$\frac{dy}{dx}=F_1(x,y)$$

的解．於是可以将前面的存在定理Ⅰ擴張如下：

存在定理I_1：設$F(x,y)$為一（Ⅳ）解析函数，(x_0,y_0)是它的解析區域中的有限遠点，則有一個而且只有一個（Ⅳ）解析函数$y=\Phi(x)$存在，$y_0=\Phi(x_0)$，它是

$$\frac{dy}{dx}=F_1(x,y)$$ （取$F(x,y)$在(x_0,y_0)的一個元素然後解析開拓） （I_1）

之解．

乙、現在将第一原則推廣到一級常微分方程組以及高級常微分方程上去．而得

存在定理Ⅱ、設有一級常微分方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)\ (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2)$$

其中x與y_i都是複変数，而且$f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)$是境域$D(a,b)$：$|x-x_0|\le a$；$|y_i-y_{i0}|\le b$内的解析函数．此時，必有（2）的一組且只有一組解$y_i=y_i(x)$，在$x_0$之近隣是解析函数，而且$y_{i0}=y_i(x_0)$．

這個定理的証明與以上定理Ⅰ之証明完全類似，只要把f_i展為其Taylor級数，並且把$y_i(x)$寫成具有未定係数的冪級数：$y_i(x)=y_{i0}+a_{i1}(x-x_0)+\cdots$，則當用這些冪級数代入（2）時即可完全地确定其係数．而且，這些係数只能唯一地确定．

解析的，而且在這一点上 φ_i 以及 $\frac{\partial \Phi_K}{\partial x_i}$ 之值恰好就是 y_i° 以及 $p_i^{K\circ}$.（Ковалевекая）

現在再來考慮一級常微分方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(9)$$

我们可以認為 y_i 是 x,x_0,y_{i0} 的函数，而将上面的方程式寫成偏微分方程組：

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)\,(i=1,2,\cdots,n)\qquad(10)$$

我们想要得到這方程的一組解 $y_i=y_i(x;x_0;y_{i0})$，$x=\alpha,x_0=\alpha$，$y_{i0}=\beta_i$ 的附近是解析的，而且當 $x=x_0$ 時，這一組解变為 y_{i0}.

但是這樣的起始條件顯然不合上述的形式，因此，我们引入兩個新的变数 $u=x+x_0$，$v=x-x_0$，而把上面的方程組化為

$$\frac{\partial y_i}{\partial v}+\frac{\partial y_i}{\partial u}=f_i\left(\frac{u+v}{2};y_1,y_2,\cdots,y_n\right)\qquad(11)$$

這時，我们要想找它的一組解，使之在 $u=2\alpha$，$v=0$，$y_{i0}=\beta_i$ 附近是解析的，而且當 $v=0$ 時，它的值变為 y_{i0}，顯然，這時就可以應用上面的定理，而知這一個偏微分方程組必有惟一一組解

$$y_i=\varphi_i(x,x_0;y_{10},\cdots,y_{n0})$$

解析於 D：$|x-\alpha|\le r$，$|x_0-\alpha|\le r$；$|y_{i0}-\beta_i|\le r$ 之内，由得到這個解的方法看來，當 x_0,y_{i0} 都看作常数時，它顯然就是 (9) 之解、由我們得到這個解的條件看來，φ_i 的展開式一定是

$$y_i=y_{i0}+(x-x_0)P(x,x_0,y_{i0})$$

其中 $P(x,x_0;y_{i0})$ 仍是解析函数．這時由隱函数之一般理論可知，從上之方程中必定可以解出 y_{i0} 如下：

$$y_{i0}=\psi(x,x_0;y_i)\qquad(12)$$

而且這函数也是解析的、我们可以証明 $\psi(x,x_0;y_i)$ 恒等於

$$y=b-b\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Ma}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

它在 $|z|<\rho$ 内 $\left[\rho=a\left(1-e^{\frac{-b}{(n+1)Ma}}\right)\right]$ 是解析的．上面的根號表示當 $x=a$ 時其值為 $+1$ 的一枝．而且當然也很容易証明，當 $|x|<\rho$ 時，$|y|<b$．由此即可得到存在定理 II 之証明．

至於高級微分方程式，則很容易地化為一級微分方程組．例如

$$y^{(n)}=f(x;y;y',\cdots,y^{(n-1)})$$

就可以化為方程組：

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\quad \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x;y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}).$$

因此又有：

存在定理 III、設有 n——級常微分方程式：

$$y^{(n)}=F(x;y',\cdots,y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

其中 x,y 是複变数，而 F 是 $x;y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 在 $|x-x_0|\leq a$，$|y^{(i)}-y_0^{(i)}|\leq b$ 内的解析函数，則方程式 (5) 必有唯一的解 $y=y(x)$，在 x_0 附近是解析的，而且

$$y_0=y(x_0),\ \cdots,\quad y_0^{(i)}=y^{(i)}(x_0)\quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

以上所述的定理，实際上都只是局部性質．但是我们很容易仿照 I 中的方法来做解析開拓。

3、現在我们把第一原則應用到線性微分方程組去：

存在定理 IV．設有一級線性微分方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=A_i(x)+\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(x)y_j\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (6)$$

其中 A_i 與 B_{ij} 都是 x 在 $|x-x_0|\le\rho$ 内的解析函数，則方程組（6）必有唯一的解 $y_i=y_i(x)$ 在 $|x-x_0|\le\rho$ 内是解析函数，而且 $y_{i0}=y_i(x_0)$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

証明：不妨害普遍性可設 $y_{10}=y_{20}=\cdots=y_{n0}=y_0$. 令 $M=\max\limits_{|x-x_0|\le\rho}\{|A_i(x)|,\ |B_{ij}(x)|\}$，則可以用

$$\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{\rho}}(1+y_1+\cdots+y_n)$$

来作（6）式右方的优函数．依方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{\rho}}(1+y_1+\cdots+y_n)$$

容易看到它们满足 $y_0=y_i(x_0)$ 的解 $y_i(z)$ 间彼此恒等，因而只須考慮方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{\rho}}(1+ny).$$

但這個方程式有解

$$y=\left[(1+ny_0)\left(1-\frac{z-x_0}{\rho}\right)^{-nM\rho}-1\right]/n$$

而且 $y(x_0)=y_0$，解析於 $|x-x_0|<\rho$ 内．其中負指数是指當 $z=x_0$ 時其值為 $+1$ 的一枝．由此即可完全地証明存在定理Ⅳ.

特别重要的是研究（6）的解的解析開拓问题．現在自 x_0 沿着某一連續曲線（γ）解析開拓 $A_i(x)$ 與 $B_{ij}(x)$ 而得 $A_i(x)$，$B_{ij}(x)$ 之另一元素 $A_i'(x)$，$B_{ij}'(x)$ 而其收斂圆 $C_x':|x-x_1|\le\rho_1$ 且 $x_1\in C_x:|x-x_0|<\rho$．按上述定理知道線性方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=A_i'(x)+\sum_{j=1}^{n}B_{ij}'(x)y_j\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{7}$$

必有唯一解析解 $y_i'(x)$ 而且 $y_i'(x_1)=y_i(x_1)$．但是，由解的唯

一性容易看出，在 $C_x'\cap C_x$ 内，

$$y_i'(x)\equiv y_i(x),$$

因此 $y_i'(x)$ 為 $y_i(x)$ 開拓後的元素，於是有：

存在定理Ⅳ$_1$，線性方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=A_i(x)+\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(x)y_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (8)$$

中 $A_i(x)$ $B_{ij}(x)$ 為（Ⅳ）解析函數，而 $(x_0\ y_{i0})$ 是它们的解析域中的任一有限點，於是上之方程組有唯一的（Ⅳ）解析解 $y_i(x)$ 而且 $y_i(x_0)=y_{i0}$。

我们可以把解 $y(x)$ 的異点分為两類、一類是随 (x_0,y_0) 而变动的，称為动異点。另一類是則只由方程式右端决定的，称為定異点。由上之定理可知，(8) 之解 $y_i(x)$ 只可能以 $A_i(x)$，$B_{ij}(x)$ 之異点為異点，因此

線性方程組之解只可能有定異点，而不能有动異点。

4、從上面所述可以看到，常微分方程之解不只由方程的右端决定，而且是依賴於起始值：$y_{i0}=y_i(x_0)$。以下，我们来研究解对起始值的依賴関係，為了說明這一问題、我們需要用到下面的定理、這個定理的証明將在以下講到。

定理：設有一組一級偏微分方程

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}=f_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_p;\frac{\partial y_1}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial y_p}{\partial x_2};\cdots;\frac{\partial y_1}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial y_p}{\partial x_n}\right)\ (i=1,2,\cdots,p) \qquad (9)$$

其中 f_i 是 $x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_p$，$P_i^x=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$，在 x_i^0，y_i^0，P_i^{k0} 附近的解析函数，此方程式必有唯一的一組解：$y_i=y_i(x_1,\cdots x_n)$，在 x_i^0 附近為解析的，而當 $x_1=x_1^0$ 時化為先給好的 p 個函数 $\phi_i(x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 這些 ϕ_i 在 $(x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 附近是

解析的，而且在這一点上 ϕ_i 以及 $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}$ 之值恰好就是 y_i^0 以及 p_i^{k0}.（Ковалевская）

現在再来考慮一級常微分方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n) \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (9)$$

我们可以認為 y_i 是 x,x_0,y_{i0} 的函数，而将上面的方程式寫成偏微分方程組：

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)\,(i=1,2,\cdots,n) \qquad (10)$$

我们想要得到這方程的一組解 $y_i=y_i(x;x_0;y_{i0})$，$x=\alpha$，$x_0=\alpha$，$y_{i0}=\beta_i$ 的附近是解析的，而且當 $x=x_0$ 時，這一組解变為 y_{i0}.

但是這樣的起始條件顯然不合上述的形式，因此，我们引入兩個新的变数 $u=x+x_0$，$v=x-x_0$，而把上面的方程組化為

$$\frac{\partial y_i}{\partial v}+\frac{\partial y_i}{\partial u}=f_i\left(\frac{u+v}{2};y_1,y_2,\cdots,y_n\right) \qquad (11)$$

這時，我们要想找它的一組解，使之在 $u=2\alpha$，$v=0$，$y_{i0}=\beta_i$ 附近是解析的，而且當 $v=0$ 時，它的值变為 y_{i0}，顯然，這時就可以應用上面的定理，而知這一個偏微分方程組必有惟一一組解

$$y_i=\phi_i(x,x_0;y_{10},\cdots,y_{n0})$$

解析於 D：$|x-\alpha|\leq r$，$|x_0-\alpha|\leq r$；$|y_{i0}-\beta_i|\leq r$ 之内．由得到這個解的方法看来，當 x_0,y_{i0} 都看作常数時，它顯然就是 (9) 之解．由我們得到這個解的條件看来，ϕ_i 的展開式一定是

$$y_i=y_{i0}+(x-x_0)P(x,x_0,y_{i0})$$

其中 $P(x,x_0;y_{i0})$ 仍是解析函数．這時由隐函数之一般理論可知，從上之方程中必定可以解出 y_{i0} 如下：

$$y_{i0}=\psi(x,x_0;y_i) \qquad (12)$$

而且這函数也是解析的．我们可以証明 $\psi(x,x_0;y_i)$ 恒等於