工程力学

第四篇

材料力学

（第六章——第十章）

成都农机学院力学教研組编

一九七三年九月

目 录

第六章　梁内应力

在第五章中我们已经知道如何计算梁中任意一截面上的内力——剪力和弯矩。为了解决梁的强度计算问题，我们不但要知道梁可能沿那个截面破坏，而且还要知道从那一点开始破坏。因此仅仅知道截面上内力的大小是不够的，还必须研究内力在截面上的分配规律，即必须研究梁截面上的应力情况，从而达到对梁进行强度计算的目的。

从前几章得知，应力是表示内力在截面上的集度，一般构件截面上的内力、总不外乎正应力和剪应力。对梁来讲也是一样。现在的问题即在于找出它们在梁截面上的分布规律，以及它们与剪力和弯矩之间的联系。下面我们以图 6－1 a 所示的简支梁为例，若自距左端为 x_1 处取一截面来看，从 Q 图及 M 图不难看出，此截面上同时存在有剪力 Q 及弯矩 M，这些内力可以看成是由各微面积 dF 上的微内力 PdF 所构成

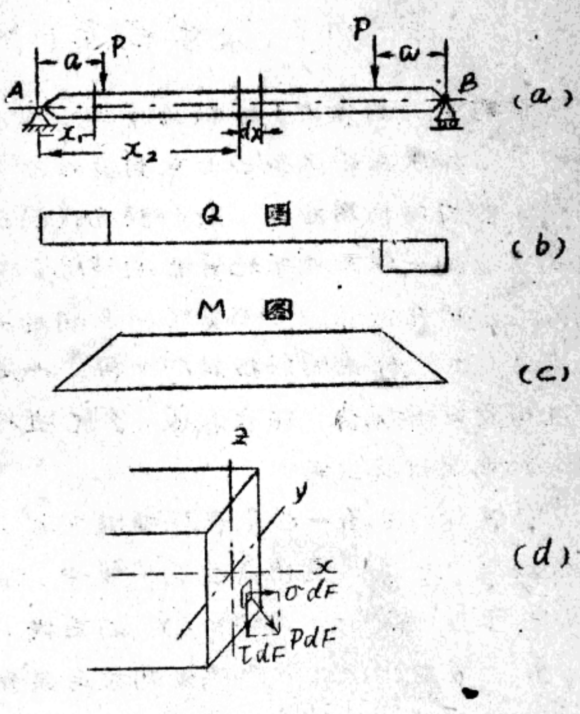


图 6－1

图 6－1 d 表示距梁左端为 x_1 处的截面，dF 是其中某一微面

积，其上的微内力PdF，它的方向与横截面斜交，因此又可分解为垂直于截面的σdF、和平行于截面的τdF，其中σ为截面上的正应力，τ为剪应力。

由于梁上的外力为一平面力系，所以截面上微内力的合力也必将在外力所在的平面内。根据平衡条件不难看出，σdF及其合力与剪力无关，因为它们的作用方向是互相垂直的；τdF及其合力与弯矩M无关，因为它与截面相切，对截面不可能有矩。可见弯矩M是由σdF构成，剪力Q是由τdF构成；因此，正应力σ只与弯矩M有关。即：

$$\sigma = f_1(M); \qquad \tau = f_2(Q)。$$

所以横截面上的正应力σ和剪应力τ，可以分开来研究。

§6—1　梁横截面上的正应力

根据上面的分析，梁截面上的正应力和剪应力我们可以分开来研究。如果在梁的截面上只有弯矩而无剪力，则该截面上也将只有正应力而无剪应力，这种情况我们称为纯弯曲。如图6—1所示梁之间一段即属于纯弯曲的情况。现在我们即先按照纯弯曲的情况来研究正应力σ与弯矩M之间的关系。研究的方法和以前讨论拉（压）杆或圆轴扭转时一样，也是建立在实验的基础上，通过观察变形现象，建立假设，然后进行理论推导等步骤，直到建立起强度计算公式。

研究应力的第一步则是作弯曲实验。例如图6—1所示的矩形截面梁。在梁上受纯弯曲的一段中，距载荷较远的侧表面上画出两条垂直于梁轴，相距为Δx的直线1—1和2—2（图6—2a），并在此两线间再画出两条与梁轴平行而分别靠近顶面和底面的直线ab和cd（图6—2a）。

当弯曲变形后，我们可以看到以下几种变形现象（图6—2b）：

1、直线1—1和2—2，仍为直线，不过相互倾斜成一个夹角$\Delta\alpha$。

2、线段ab和cd，变成为圆弧线，$\widehat{ab}$比原长缩短，$\widehat{cd}$比原长伸长。

3、梁的截面宽度在顶部略有增大，在底部略有缩小，似一扇形。

根据以上的变形现象我们可以建立下面几个假设：

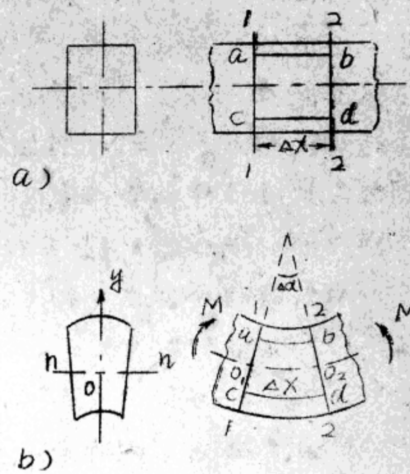


图6—2

1、平面假设——若将垂直于梁轴的直线1—1和2—2看作为两个平行的截面，由变形现象1）可建立变形前截面为平面、变形后仍为平面的假设，简称平面假设。

2、中性层及距中性层等远处纵向纤维变形相等的假设——若设想ΔX段是由很多条与梁轴平行的纤维组成，按照平面假设及变形现象2），则可以假定在梁内等高层上的纤维会发生同样大小的变形。由于各层纤维从顶面的缩短逐渐过渡到底面的伸长则中间必然经过一层既不伸长也不缩短的纤维层，称为中性层。现以$O_1—O_2$表示（图6—2b），$\widehat{O_1—O_2}=\Delta X$。中性层与横截面的交线，称为中性轴，现以$n—n$表示（图6—2b）。

根据上面的分析，说明在变形过程中梁的截面只绕其中性轴发生旋转，因此我们可以认为各纵向纤维的变形，只决定于它距中性层的距离，而与截面宽度无关。

3、纵向纤维只受纵向拉伸或压缩，彼此间无挤压作用假设——按照变形现象3）梁的宽度发生了变化，这个变化可以认为是由于纵向纤维的变形所引起的。矩形截面弯曲后成为扇形，可

以设想梁在侧向（横向）的变形是自由的，亦即梁在弯曲时，纵向纤维是处于简单拉伸或压缩的状态，而纤维之间并无挤压作用。

根据以上的变形现象和假设条件，我们就可以对梁截面上的正应力进行理论推导。推导的步骤，则是先根据变形条件找出它的分布规律，然后依平衡条件将它和已知的内力——弯矩连系起来，从而决定出它的数值。

下面我们根据梁的平衡条件，物理条件及力学条件来分析梁内任一截面上的正应力。

首先考虑变形条件：

为了分析方便起见，先确定一坐标系：以截面上的中性轴为 y 轴，截面的对称轴为 z 轴，以沿中性层并与 y 和 z 正交的轴为 x 轴，各轴的方向如图（6－3a）所示。这样，xy 平面即为中性层平面，xz 平面即为载荷作用的平面，简称载荷平面。

现由梁上截取长度为 dx 的微段如图（6－3b），图中1－1和2－2代表此微段的两个截面，$\overline{O_1O_2}$ 是中性层上的一段纤维，$\overline{cd}$ 是距中性层为 z 的一段纤维，

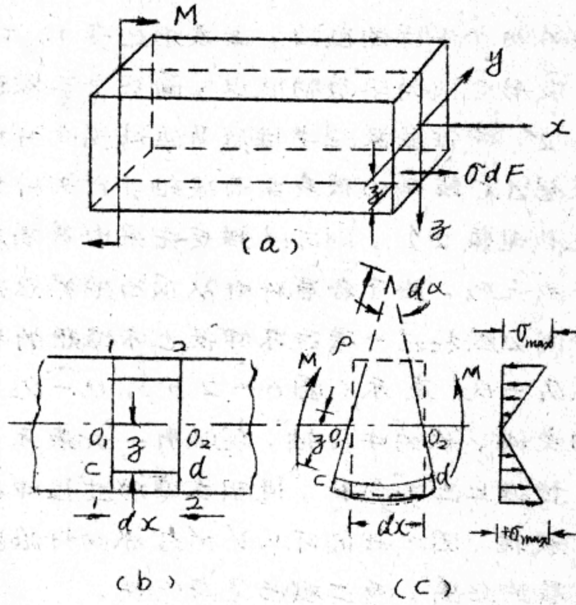


图6－3

当梁发生弯曲变形时，两截面1－1和2－2各绕其中性轴旋转而成一夹角 $d\alpha$，

$\overline{O_1O_2}$及$\overline{cd}$均成为弧线，不过$\widehat{O_1O_2}$仍保持原长dx，而$\widehat{cd}$则较原长$\overline{cd}=dx$略有伸长。今假定$\widehat{O_1O_2}$的曲率半径为ρ，则由图6—3c可得：

$$\widehat{O_1O_2}=dx=\rho d\alpha,$$
$$\widehat{cd}=(\rho+z)d\alpha。$$

所以纤维$\overline{cd}$的单位变形（相对变形）为

$$\varepsilon=\frac{\widehat{cd}-\overline{cd}}{\overline{cd}}=\frac{(\rho+z)d\alpha-\rho d\alpha}{\rho d\alpha}$$
$$=\frac{z}{\rho} \qquad (6-1)$$

上式表示梁弯曲时纵向纤维变形沿梁截面高度的变化规律。它说明某一纤维的单位变形ε与它到中性层的距离z成正比，而与曲率半径成反比。

考虑物理条件：

由假设（3）可知，纵向纤维只受轴向拉压），如材料处在弹性范围之内，就可根据简单拉伸（压缩）时的虎克定律$\sigma=E\varepsilon$，可得截面上的正应力σ为：

$$\sigma=E\frac{z}{\rho} \qquad (6-2)$$

（6—2）式表示出梁横截面上正应力的变化规律，由于E和ρ是常另，所以正应力就与纤维到中性轴的距离z成正比，即正应力沿截面高度按直线规律分布。其正负值随各点的坐标z而定，在中性轴上（$z=0$处）正应力为零，在横截面上下层的正应力最大（因z最大）。

式（6—2）告诉我们梁截面上正应力沿截面高度的变化规律，但是，关于σ的具体数值还无法决定，因为中性轴y的位置还不知道，故（6—2）式的z无法确定，同时曲率半径ρ也还不知道，因此上述问题还必须通过力学条件把这些未知因素与已知

内力——应把联系起来。

考虑力学条件：

从图6—3，考虑dx段的平衡。由于截面上任意微面积dF上的微内力σdF将构成一空间平行力系，所以平衡方程式：$\Sigma y = 0$，$\Sigma z = 0$，和$\Sigma M_x = 0$必然满足，这样，我们只需研究其他三个平衡方程式。

由 $\Sigma x = 0$， 得：$\int_F \sigma dF = 0$

以式（6—2）代入则得：

$$\frac{E}{\rho}\int_F z\,dF = 0 \qquad (6—3)$$

式中$\frac{E}{\rho}$不可能为零，必然$\int_F z\,dF = 0$，此积分式我们称为截面对y轴（即中性轴）的面积矩，用S_y表示。（由于y轴两边所取微分积的座标有着相反的符号，所以S_y即可能为正值或负值，亦可能为零）。若$S_y = 0$，则y轴（即中性轴）必定通过截面的形心。根据前面的规定，由于z轴为截面的对称轴，必然通过截面形心，所以y轴和z轴的交点即为截面形心的位置，而x轴即为梁轴。

由 $\Sigma M_z = 0$，得：

$$\int_F y\sigma dF = 0$$

以式（6—2）代入，则得：

$$\frac{E}{\rho}\int_F yz\,dF = 0 \qquad (6—4)$$

这里只有$\int_F yz\,dF = 0$。此积分式$\int_F yz\,dF$称为截面对y轴和z轴的惯性积，用J_{yz}表示。由于所取微面积的座标有着不同的符号，所以J_{yz}的值可能为正或负，也可能为零。这里由于z轴已定为对称轴，（所以我们总可以在z轴两边距y轴等远的地方找到距z也等远但座标符号相反的微面积），这样惯性积J_{yz}必然为零，而式（6—4）即变为恒等式了。

由 $\Sigma M_y = 0$，得：

$$\int_F z\sigma dF = M$$

以式（6－2）代入得：

$$\frac{E}{\rho}\int_F z^2 dF = M \qquad (6-5)$$

式中 $\int_F z^2 dF$ 称为截面对 y 轴的惯性矩（简称惯矩），用 J_y 表示，它表示截面的每一个微小面积与它离中性轴 Oz 的距离的平方的乘积之和。代入上式即可写成：

$$\frac{E}{\rho} J_y = M,$$

或

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_y}。 \qquad (6-6)$$

式（6－6）说明，在一定大小的弯矩作用下，截面的惯性矩愈大，则梁的曲率半径也愈大，即梁的弯曲变形愈小，同样，材料的弹性系数 E 愈大，梁的弯曲变形愈小。所以 EJ_y 代表梁抵抗弯曲变形的能力，我们称它为梁的抗弯刚度。

将式（6－2）与式（6－6）联立消去 ρ，则得：

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J_y} \qquad (6-7)$$

式（6－7）是梁在纯弯曲时横截面上任一点正应力的计算公式。该式指出：梁截面上任一点的正应力与截面上的弯矩 M 和该点到中性轴的距离 z 成正比，而与截面对中性轴的惯矩 J_y 成反比。当 $z = 0$ 时（在中性轴上），$\sigma = 0$，当 $z = |z_{max}|$ 时，σ 最大，应力分布情况如图 6－3 C 所示。

式(6－7）虽是由矩形截面梁在纯弯矩情况下推导出来的，但实验和进一步理论分析（弹性理论）证明，它也可以应用于一般非纯弯曲的梁，换句话说，当梁上同时有 M 和 Q 作用时也可用

上述正应力公式来计标梁横截面上正应力的大小。

§6—2 梁弯曲时的強度计标

由式（6—7）可知，梁横截面上的最大正应力发生在弯矩最大的截面上，而且发生在该截面距中性轴最远的点上，即：

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot z_{max}}{J_y} \qquad (6—8)$$

如令 $W_z = \frac{J_y}{z_{max}}$，当梁截面形状和尺寸确定以后，则 W_y 为一定值，我们称它为梁的抗弯截面系数（或抗弯断面模量），W 值的确定将在下节讨论。将 $W_z = \frac{J_y}{z_{max}}$ 代入式（6—8）得到

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \qquad (6—9)$$

根据式(6—9）及材料弯曲的许用应力就可以写出梁的強度条件。若梁的材料抗拉抗压性能相同，即许用应力 $[\sigma]_{拉} = [\sigma]_{压} = [\sigma]$。则強度条件为：

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leqslant [\sigma] \qquad (6—10)$$

现在我们就可以根据（6—10）式进行梁的強度计标：

(1) 梁的強度校核；

即使：

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leqslant [\sigma] \qquad (6—11)$$

(2)：梁的截面选择；

即使：

$$W_y \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]} \qquad (6—12)$$

(3)：决定梁的许可弯矩；

即使：

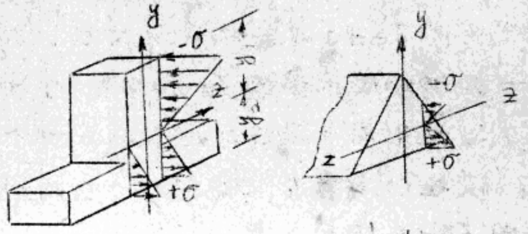
$$M_{max} \leqslant W_y [\sigma] \qquad (6—13)$$

如果梁的横截面只有一个对称轴，同时截面的中性轴又不与

此对称轴重合（如图6－4）。使用上述公式时，就应该按如下两种情况来考虑：

第一种情形：

材料的抗拉，抗压性质相同时，由于截面与中性轴不对称，设上下边缘到中性轴的距离分别为y_1、y_2



（a）　　（b）

图6－4

则：

$$W_{z1}=\frac{J_z}{y_1}\quad;\quad W_{z2}=\frac{J_z}{y_2}$$

因较小的W_z会引起较大的σ，如$y_1>y_2$，则$W_1<W_2$，故强度条件应为

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_{z1}}\leqslant[\sigma]\qquad(6-14)$$

第二种情形：

材料的抗拉、抗压性质不同，即$[\sigma]_{拉}\neq[\sigma]_{压}$，这时我们就应对拉应力和压应力分别进行计算，即：

$$\sigma_{max拉}=\frac{M_{max}}{W_{z2}}\leqslant[\sigma]_{拉}$$

$$\sigma_{max压}=\frac{M_{max}}{W_{z1}}\leqslant[\sigma]_{压}\qquad(6-15)$$

另外在设计截面时，还应该把截面的形状和尺寸选择成这样，即使W_1和W_2都应该满足强度条件的要求。

§6—3 简单平面图形的惯矩及抗弯截面系数的计算

前面推导正应力（σ）公式和建立强度条件的过程中，我们遇到了惯矩 J_z 和抗弯截面系数 W_z，因此有必要知道一些常见平面图形的 J_z 和 W_z 的计算方法。下面，我们介绍两种平面图形——矩形和圆形截面 J_z 和 W_z 的计算方法。

1、矩形对于通过其形心的一对对称轴的惯矩

设矩形高为 h，宽为 b，O 为形心，Oz、Oy 为对称轴（如图 6—5 所示）。

取微面积 $dF = b\,dy$，则根据前面所述的惯矩定义得到：

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_F y^2 b\,dy$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b y^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{bh^3}{12}$$

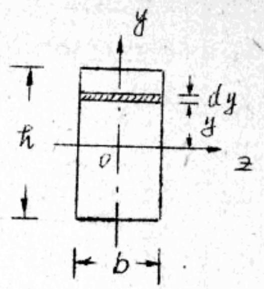


图 6—5

同理，如要求此矩形对 y 轴的惯矩，可得：

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

由抗弯截面模数的定义可知：

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

同理可得：

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

2、圆轴对于任一直径的惯矩

设圆的直径为 d，半径为 r，O 为圆心，Oz，Oy 为通过形心的任意轴（也就是对称轴）。

如图6—6取微面积 $dF=b(y)dy$，则：

$$J_z=\int_F y^2 b(y)dy$$

由于圆的上半部和下半部是一样的，所以计算 J_z 只要计算上半部，然后把结果加倍，就是整个截面的 J_z，故

$$J_z=2\int_0^r y^2 b(y)dy$$

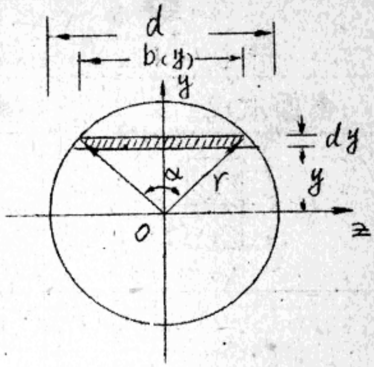


图6—6

为了积分方便，引入一个新的变量 α，

显然：
$$y=r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$dy=-\frac{1}{2}r\sin\frac{\alpha}{2}d\alpha$$

$$b(y)=2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

相应的积分限变动为

$y=0$ 时，$\alpha=\pi$；$y=r$ 时，$\alpha=0$

故
$$J_z=-2\int_\pi^0 2r^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}d\alpha$$

$$=\frac{r^4}{2}\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}$$

由于圆形的特性，任一通过形心的轴都是对称轴，故 $J_y=J_z$，

又因圆形 $y_{max}=\frac{d}{2}$，

所以
$$W_z=W_y=\frac{J_z}{y_{max}}=\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{32}$$

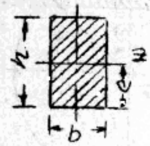
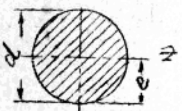
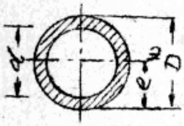
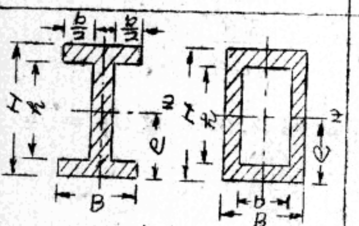
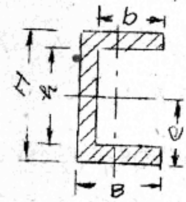
由上面的计算看出，惯性矩和抗弯截面系数恒为正值。惯性矩的常用单位为 cm^4 或 mm^4；抗弯截面系数的常用单位为 cm^3

或mm³。

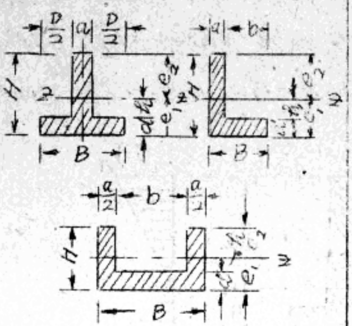
为了便于应用，在表6—1中给出了一些常用截面的几何性值J_z和W_z的计标公式。

如果梁是采用的国家生产的型钢（如工字钢、槽钢、T型钢等），这些型钢的截面几何性质，都可由有关设计手册中直接查得，这里就不作介绍。

表6—1　常用截面的几何特性

截面状况	重心位置e	惯性矩J_z	抗弯截面模量W_z
	$e=\frac{h}{2}$	$J_z=\frac{bh^3}{12}$	$M_z=\frac{bh^2}{6}$
	$e=\frac{d}{2}$	$J_z=\frac{\pi d^4}{64}$	$W_z=\frac{\pi d^3}{32}$
	$e=\frac{D}{2}$	$J_z=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$W_z=\frac{\pi}{32D}(D^4-d^4)$
 	$e=\frac{H}{2}$	$J_z=\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$W_z=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$

（续）表6—1　常用截面的几何特性

截面状况	重心位置e	惯性矩J_z	抗弯截面模量W_z
	$e_1=\frac{aH^2+bd^2}{2(aH+bd)}$ $e_2=H-e_1$	$J_z=\frac{Be_1^3-bh^3+ae_2^3}{3}$	$W_{z_1}=\frac{J_z}{e_1}$ $W_{z_2}=\frac{J_z}{e_2}$

§6—4　梁截面的合理形状

由§6—1中已经知道，在梁截面上分布的正应力，只能在上下边缘处达到最大值，靠中性轴愈近就愈小，在中性轴处为零。这说明，矩形梁有相当一部分材料没有充分发挥作用。如果我们将截面的形状改变一下，把靠近中性轴处的材料移到边缘上去（如图6—7），使得梁截面上的大部分材料都能承受较大的正应力，那么，虽然梁横截面的面积大小没有改变，而梁所承担的荷载即可增加。这是因为截面形状经过合理的处理后，使得它的惯性矩J_z和抗弯截面模量W_z都增大了，因此，可以承担的$M_{max}=[\sigma]W_z$也增大了。同样，我们可以得出，对于承受同样荷载的梁，如果采用合理的截面形状，所需的截面面积就可减少（也就是说所需的材料较少）。在实际工程设计中，一般梁常采用工字形和空心圆形截面，就是这个原因。

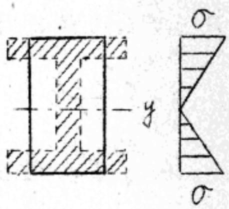


图6—7

另外，为使截面形状合理，最好使梁边缘上的最大拉应力与最大压应力同时达到材料的许用拉（压）应力。所以对抗拉、抗压强度相同的材料，所选择的截面的中性轴必须与两个边缘等距离，例如矩形，工字形截面，对于抗拉、抗压强度不同的材料，则由中性轴到两个边缘的比值、应等于它们的许用应力的比值，例如对于铸铁梁，就应采用图6—8所示的T形梁截面，并且使

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma]_{拉}}{[\sigma]_{压}}$$

这样就能使材料的最大拉（压）应力同时达到许用应力。

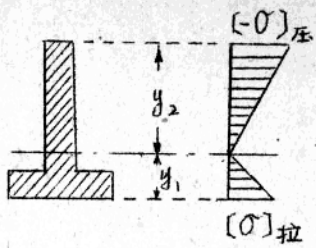


图6—8

必须注意，上面的讨论，仅仅是从力学观点出发的。实际上影响设计的经济与否不仅着眼于力学观点，还必须考虑制造是否可行（如对于木材所制的梁如果根据上述要求片面地追求工字形或空心圆截面形式，则耗费的人工将抵不上所节省的材料）以及使用条件等々，只有全面地考虑各方面的因素，才能决定出真正经济合理的截面形式。

§6—5 梁的计算实例

下面我们举一些例题来说明梁的强度计算：

例6—1 试校核图6—9a所示机车车厢轮轴强度。轴的直径 $d=16^{cm}$，$d_2=13^{cm}$，$l=1.58^{M}$，$P=6.25^{T}$，$a=0.267^{M}$，$b=0.160^{M}$，$[\sigma]=600^{Kg}/cm^2$。

解：作梁的计算简图如图6—9b所示。

1）求支座反力

$$R_{Ay}=R_{By}=6.25^{T}\ (\uparrow)$$