

平面几何

第一册

清华附中翻印

1979.7.

目 录

第一章 緒論	1
I 引言.....	1
II 綫段、射綫和直綫.....	1
III 圓和弧.....	12
IV 角.....	15
V 定义、公理和定理.....	35
第二章 平行綫	43
I 平行綫的判定.....	43
II 平行綫的性质.....	57
III 实习作业.....	74
第三章 三角形	78
I 三角形和它的內角和.....	78
II 全等三角形.....	93
III 綫段的垂直平分綫的性质和角的平分綫的性质	117
IV 三角形的边角关系.....	124
V 三角形的作图.....	142
第四章 四边行	156
I 多边形的概念.....	156
II 平行四边行.....	160
III 軸对称和中心对称.....	188
IV 梯形.....	195
V 多边形的面积.....	203

第一章 緒 論

I 引 言

在生产建設中，到处都要用到关于图形的知識，例如制造生产工具和生活用具、建造厂房和住宅、修造桥梁、兴修水利、鋪設铁路等等，都要先根据客观条件和实际需要（形状、大小、位置等等）进行測量、設計、画好图样，然后再按照图样施工。在学习数学和其他学科以及从事科学研究工作的时候，也都常常要接触到許多图形。因此，为了参加祖国的社会主义建設，为了进一步学习数学和其他科学技术，我們必須很好地掌握图形的一些基本性质和运用这些性质解决实际問題的技能。几何就是研究有关物体的形状、大小以及它們相互位置关系的一門学科。

II 綫段、射綫和直綫

1. 点、綫段、射綫和直綫 用削尖的鉛笔任意画两条相交的綫，在它們相交的地方就得到一个点；用笔尖在紙上輕輕一点也可以画出一个点来。例如，在一个长方体中，它們每三条棱交会的地方都是点(图 1)。在这本书里，凡是单独的一个点，我們都用两段相交的綫来表示。为了便于簡單

而确切地指明某一个点的位置，我們还在点的旁边标上一个大写的拉丁字母，并且在同一个图形中，不同位置的点要用不同的字母来标注。例如在图 1 中，我們分別用 A 、 B 、 C ...

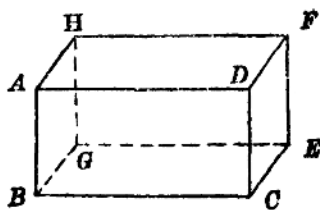


图 1

...这些字母来标注图中的各个点，这样，当我们說“点 A ”的时候，就是指长方体的前面左上角的点，而不会和其他的点相混淆。

在紙上任意画两个点，然后使直尺的边通过这两个点，再用鉛笔沿着直尺的边把这两点連結起来，就画出一条綫段，这两点叫做綫段的端点(图 2)。如图 1 中长方体的各棱都是綫段；再如黑板的边緣、长方形桌面的棱等等，它們也都是綫段。

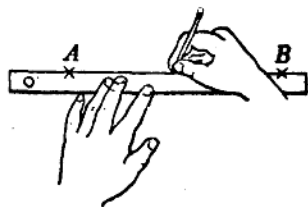


图 2

一条綫段可以用表示它的两个端点的大写字母来表示，例如“綫段 DE ”(图 3)；也可以用小写字母来表示，例如“綫段 b ”(图 4)。



图 3

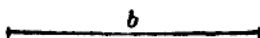


图 4

應該注意：画綫段的时候，應該用左手按住尺的中間，鉛筆杆要向右略微傾斜，从左向右画(图 2)。

把 A 、 B 两点用不同形状的綫連起来(图 5)，可以看到：在連結两点的綫中，綫段最短。我們把連結两点的綫段的长叫做这两点間的距离。



图 5

利用直尺，我們可以把一条綫段延长到任意长。例如，我們可以从 B 点把綫段 AB 延长到 C (图 6a)，也可以从 A 点把綫段 BA 延长到 C (图 6b)。前一种情形，我們說延长 AB 到 C ；后一种情形，我們說延长 BA 到 C ，或者說是反向延长 AB 到 C 。延长的部分叫做原綫段的延长綫(图中用虛綫画的綫段)。

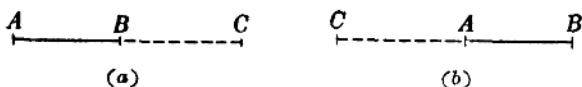


图 6

如果沿着直尺，把綫段向一方延长，并且設想这种延长的过程无限地繼續下去，这样就得到一条射綫。射綫只有一个端点。象探照灯和手电筒所发出的光綫，是由一个点向一个方向发出的，它們都是射綫。一条射綫可以用表示它的端点和射綫上另外一点的两个大写字母来表示，并且要把表示端点的字母写在前面，例如“射綫 OO ”(图 7)。

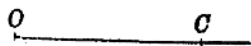


图 7

如果沿着直尺，把綫段向兩方延長，並且設想這種延長的過程無限地繼續下去，這樣就得到一條直綫。直綫是沒有端點的。一條直綫可以用表示它上面任意兩個點的大寫字母來表示，例如“直綫 AB ”(圖 8)；或者用一個小寫字母來表示，例如“直綫 a ”(圖 9)。



圖 8

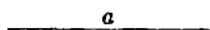


圖 9

從上面可以看出：綫段有兩個端點；射綫只有一個端點，另一方是無限伸長的；直綫沒有端點，兩方都是無限伸長的。綫段和射綫都是直綫的一部分。

直綫有一個基本性質，就是：經過兩點只能引一條直綫。這個性質的應用很廣泛，例如，利用這個性質可以檢查尺的邊緣是否平直，方法是：先選定兩個點，把尺的邊緣靠緊兩點，過這兩點沿着尺的邊緣畫一條綫；再把尺放在這兩點連綫的另一側，過這兩點沿着尺的邊緣再畫一條綫，如果兩次畫的綫重合，就可以確定這支尺的邊是平直的(圖 10a)，

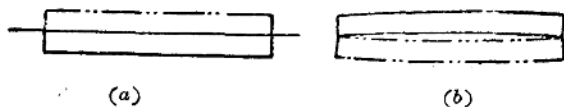


圖 10

否則就不平直(圖 10b)。再如，建築工人鋪磚的時候，首先在地上釘兩個木樁，再經過這兩個木樁拉一條綫，然後沿着這

条綫去鋪(图 11), 这也利用了直綫的基本性质。



图 11

2. 綫段的相等和不等 前面讲过的綫段、射綫和直綫以及在小学里讲过的三角形、四边形、圆、长方体和圆柱等等, 都叫做**几何图形**。几何图形不論怎样移动位置, 只要不改变它的形状和大小, 就还是原来的图形。如果改变形状和大小, 就不是原来的图形。我們在研究几何图形的性质的时候, 有时要移动图形的位置, 因此我們规定: **在移动几何图形的位置时, 不能改变图形的形状和大小。**

要比較两条綫段 AB 、 CD 的大小, 可以把其中的一条綫段 AB 放到另一条綫段 CD 上, 使 A 和 C 重合, 并且使綫段 AB 順着綫段 CD 落下, 如果 B 和 D 也重合(图 12), 那么

綫段 AB 和綫段 CD 就相等。这时可以写成：

$$AB = CD \text{ 或者 } CD = AB.$$



图 12

如果 B 点落在 C 、 D 两点之間(图 13)，綫段 AB 就小于綫段 CD ，可以写成：

$$AB < CD \text{ 或者 } CD > AB.$$

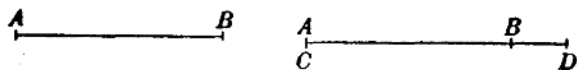


图 13

如果 B 点落在綫段 CD 的延长綫上(图 14)，綫段 AB 就大于綫段 CD ，可以写成：

$$AB > CD \text{ 或者 } CD < AB.$$



图 14

3. 綫段的度量 比較綫段的大小，还可以用直尺去量。在算术里我們已經学会了用直尺度量綫段的长度的方法，但是要想更准确地度量綫段，应当用两脚规（两脚都是尖針的圓规），先把两脚规的两个尖端分別放在綫段的两个端点上(图 15a)，然后不改变两脚规的张度，把它移到直尺上，使它的一个尖端指在直尺的記着“0”的刻度上，这时另一个尖端就指出所要量的綫段的长度(图 15b)。

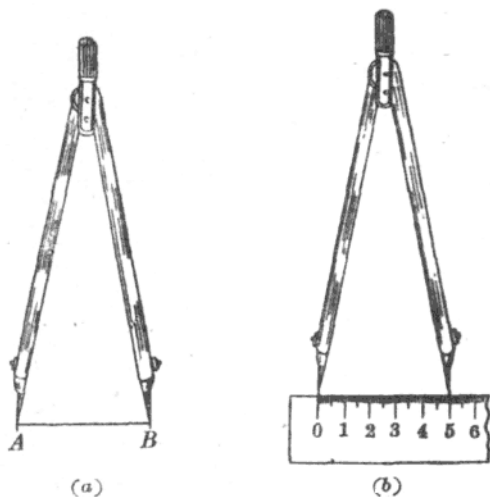


图 15

反过来，用两脚规(或圆规)和直尺可以作出或截取适合我们需要的长度的线段。例如，要在一条直线上截取一条长

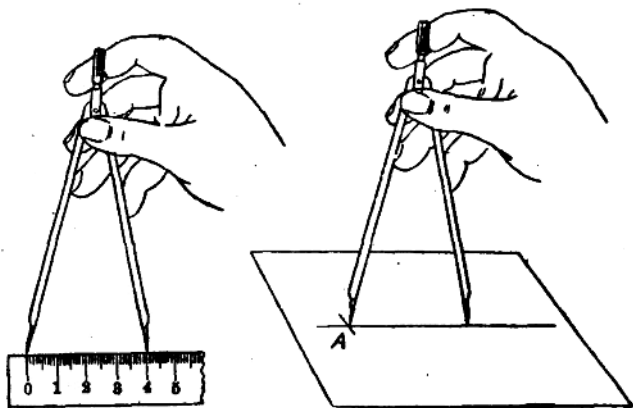


图 16

为4厘米的线段，可以按图16所示的方法去作。

应用截取线段的方法，还可以作出等于几条线段的和或者两条线段的差的线段。例如，要作一条线段使它等于三条已知线段 a 、 b 、 c 的和，可以先作一条射线 AE ，然后在射线 AE 上，用圆规顺次截取 $AC=a$ ， $CD=b$ ， $DB=c$ ，那么 $AB=a+b+c$ (图17)。如果要作一条线段使它等于两条已知线段

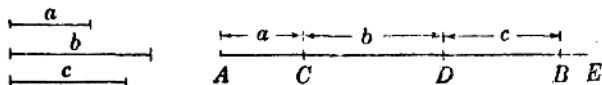


图 17

d 、 e ($d > e$) 的差，也是先作一条射线 AE ，在射线 AE 上用圆规截取 $AC=d$ ，然后在 AC 上截取 $CB=e$ ，那么 $AB=d-e$ (图18a)。如果在 AC 上从 A 点截取 $AB=e$ ，那么 $BC=d-e$ (图18b)。

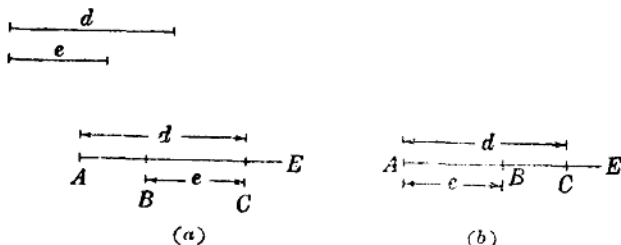


图 18

用圆规和直尺也可以作出或截取一条线段使它等于已知线段的2倍、3倍、4倍等等。例如，我们要作一条线段使它等于已知线段 a 的3倍，可以这样去作：先作一条射线 AE ，然后在射线 AE 上顺次截取 $AB=a$ ， $BC=a$ ， $CD=a$ ，那么，

$AD = a + a + a = 3a$ (图 19).

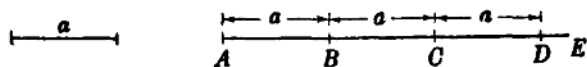


图 19

用圆规和直尺还可以等分线段，方法是：先量出这条线段的长度，用除法计算出每一等分的长度，再按这个长度用圆规去分割原线段。用这种方法等分线段的时候，如果线段的长度不能被恰好除尽，我们就只能找到近似的分点。

平分一条线段的点叫做这条线段的中点。如图

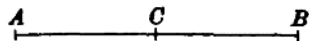


图 20

20 中，C 点就是 AB 的中

点，并且，通常用“ $AC = CB$ ”、“ $AC = \frac{1}{2}AB$ ”（或“ $BC = \frac{1}{2}AB$ ”）来表示 C 是 AB 的中点。

使用两脚规（或圆规）的时候，应当注意检查两尖是否并齐（图 21）。



图 21

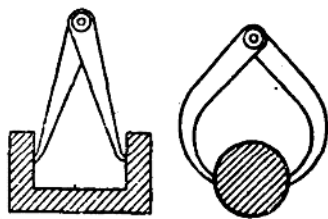


图 22

度量实物中的某一部分的长度，还常用卡钳。卡钳的使用方法与两脚规类似（图 22）。

例 任意作两条线段 a 、 b ($a > b$)，用圆规和直尺作线

段，使它等于：

(1) $a+2b$; (2) $2a-b$.

作图：

(1)

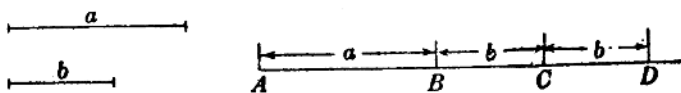


图 23

$AD = a + b + b = a + 2b$ (图 23).

(2)

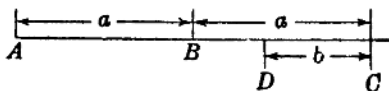


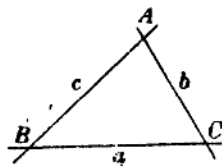
图 24

$AD = a + a - b = 2a - b$ (图 24).

注意：最后作出的线段，要用大写字母在两端标明，同时要用式子把它的长度表示出来。

习 题 一

1. (口答) 图中直线 a 和直线 b 相交于什么点？ b 和 c 呢？ c 和 a 呢？分别用两个大写字母表示直线 a 、 b 和 c 。



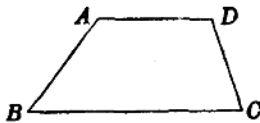
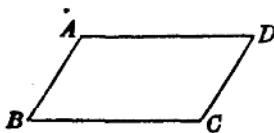
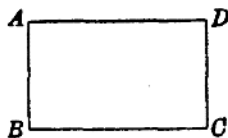
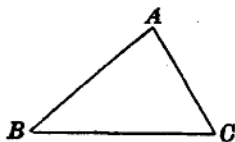
第 1 题

2. (口答) 两点间的距离指的是什么？

3. 画一条直线和一条线段，分别用字母把它们表示出来。

4. 在紙上画一点 O ，以 O 为端点画两条射綫，用大写字母表示这两条射綫。

5. 用圆规和直尺量出下列各图形每边的长(精确到 1 毫米)。



第 5 題

6. 用圆规和直尺作出下列长度的綫段: 3 厘米; 5.5 厘米; 4.8 厘米; 2.3 厘米。

7. 作一条射綫 OE ，然后从端点 O 起，在射綫上順次截取 $OA=2.4$ 厘米， $AB=1.9$ 厘米。

8. 作一条射綫 OF ，然后从端点 O 起，在射綫上順次截取 $OA=2.5$ 厘米， $AB=1.5$ 厘米， $BC=2.2$ 厘米。

9. 作出长 2.5 厘米的綫段 AB ，延长 AB 到 C 点，使 $BC=1.5$ 厘米，再延长 BA 到 D 点，使 $AD=1$ 厘米。

10. 作出长 1 厘米的綫段 AB ，延长 AB 到 C 点，使 $BC=1.3$ 厘米，再反向延长 AB 到 D 点，使 $AD=1.7$ 厘米。

11. 作一条綫段 AB ，用刻度尺求出它的中点 C ，并用式子表示 C 是 AB 的中点。

12. 已知綫段 AB 等于 4.8 厘米，在 AB 上用刻度尺求一

个点 C , 使 $AC = \frac{1}{4}AB$.

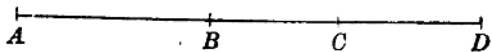
13. 根据下面的图形, 填写空白:

(1) $AC = AB + (\quad)$;

(2) $CD = AD - (\quad)$;

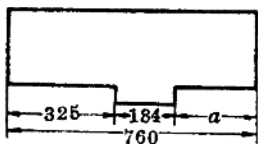
(3) $BC = (\quad) - AB$;

(4) $AC + CD = (\quad) + BD$.

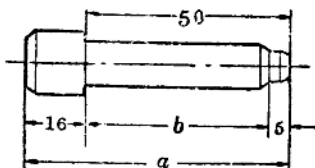


第 13 题

14. 根据图中所给的尺寸(单位是毫米), 计算零件里 a 和 b 的长度.



第 14 题(1)



第 14 题(2)

15. 任意作三条线段 a 、 b 、 c ($a > b > c$), 用圆规和直尺作线段, 使它等于:

(1) $a + b$;

(2) $a - c$;

(3) $a + b - c$;

(4) $5c$;

(5) $2b - c$;

(6) $3a - b + c$.

III 圆和弧

4. 圆 在小学里, 我们曾经学过怎样用圆规来画圆.

圆可以看做是这样构成的：当射线 OA 绕着它的端点 O 旋转一周的时候，射线上的点，例如 A ，就画出一条封闭的曲线(图25)，这条曲线叫做圆， O 点叫做这个圆的圆心。连结圆心和圆上任意一点的线段叫做圆的半径(如图25中的 OB 、 OC ……)。因为圆上所有的点与圆心的距离都相等(都等于 OA)，所以同圆的半径相等。

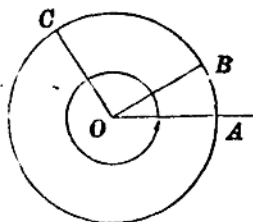


图 25

圆可以用符号“ \odot ”来表示，以 O 为圆心的圆可以记做“ $\odot O$ ”。

5. 弦、直径和弧 连结圆上任意两点的线段叫做圆的弦，如图26中的线段 AB 。过圆心的弦叫做圆的直径，如图26中的线段 CD 。

因为在一个圆中，每一条直径都等于两条半径的和，而同圆的半径相等，所以同圆的直径相等。

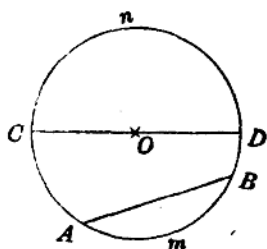


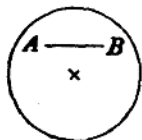
图 26

圆的直径把圆分成相等的两部分，每一部分都叫做半圆。圆上任意两点间的部分叫做弧。通常用符号“ $\widehat{\quad}$ ”来表示弧。如图26中的弧 AmB 和 AnB ，分别记做 \widehat{AmB} 和 \widehat{AnB} 。小于半圆的弧叫做劣弧，大于半圆的弧叫做优弧。以后，在不加说明的情况下，通常所说的弧总是指的劣弧。劣弧也可以只用表示弧的两个端点的字母来表示，例如图26中的

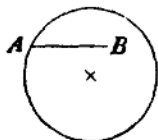
\widehat{AmB} , 可以記作 \widehat{AB} .

习 题 二

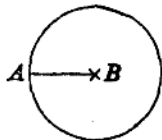
1. 用圆规画一个半径等于 2 厘米的圆。
2. 任意取两个点 A 和 B 。分别以 A 和 B 为圆心，线段 AB 为半径画两个圆，并用表示圆的符号表示这两个圆。
3. 指出下列各图中的线段 AB ，哪些是弦，哪些不是弦。



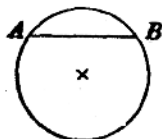
(1)



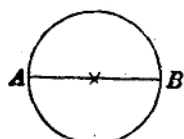
(2)



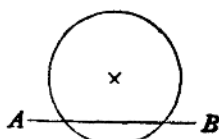
(3)



(4)



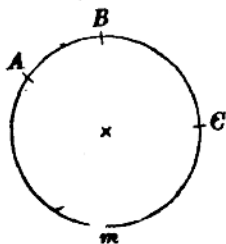
(5)



(6)

第 3 题

4. 用表示弧的符号，表示图中的弧 AB 、 BC 、 AC 和 \widehat{AmC} 。



第 4 题

IV 角

6. 角 有一个共同端点的两条射线所组成的图形叫做角(图 27)。这两条射线的共同端点(O)叫做角的顶点, 这两条射线(OA 、 OB)都叫做角的边。

我们也可以把一个角看成是由一条射线 OA , 绕着它的端点 O , 从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB 而形成的(图 27)。例如时钟的分针, 从指着“12”的位置转到

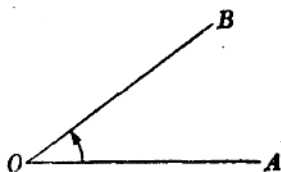


图 27

指着“2”的位置, 它的原来位置和下一个位置就形成一个角。

如果射线顺着一个方向继续旋转, 转到和原来的位置构成一条直线(图 28a), 这时所得到的角叫做平角: 再旋转下去(图 28b), 到这条射线回到它原来的位置(图 28c), 这时所得到的角叫做周角。

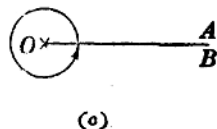
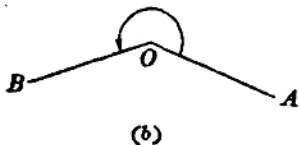
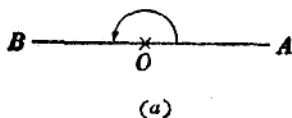


图 23