

有限单体法及其 在船体结构分析上的应用

(译文集之一)

上海交通大学

1972.12

毛 主 席 语 录

为了反对帝国主义的侵略,我们一定要建立强大的海军。

我们必须打破常规,尽量采用先进技术,在一个不太长的历史时期内,把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

对于外国文化,排外主义的方针是错误的,应当尽量吸收进步的外国文化,以为发展中国新文化的借镜;盲目搬用的方针也是错误的,应当以中国人民的实际需要为基础,批判地吸收外国文化。

目 录

1. 结构力学中的有限单体法 R.W.克劳夫 (1)
2. 解板壳问题的有限单体法 O.C.齐基威茨 (22)
3. 应用有限单体法计算船舶板架 B.A.巴斯诺夫等 (37)
4. 应用有限单体法计算船舶结构强度 B.B.考兹略柯夫等 (45)
5. 运用有限单体技术于复杂船体结构的分析 J.R.宝林 (54)
6. 船体结构分析的自动化 H.A.卡美尔等 (77)

结构力学中的有限单体法

R. W. 克劳夫

有限单体法的原理

1 引言

有限单体法实质上为标准的结构分析法的一个推广。所谓标准的结构分析法，就是它能够由分析一般框架结构所用的同样的方法来计算二维和三维结构（例如板、壳、以及其它弹性连续体）中的应力与挠度。这种方法（有限单体法）原先是在飞机工业中由于要对极复杂的飞机框架结构能够提供一个较精确的解而发展起来的⁽¹⁾。然而就航空结构工程师方面来说，这一创举不仅应归于工业上的需要，而且也因在航空工程部门有自动数字计算机设备可用的缘故。一台大容量的电子计算机乃是应用有限单体法不可缺少的附件。绝大部分关于有限单体概念的文章是出现在航空工程的刊物中。然而这种方法也能够同样地用来解任何方面的结构力学问题，而且关于有限单体法在其它工程领域中应用的文章目前正在加速出版中^{(2),(3),(4)}。

结构的矩阵变换理论的建立^{5,6}可作为发展有限单体法直接的背景，因为即使在有限单体法的分析中理论上并没有使用矩阵法的必要，但是它们对编排计算的程序无疑将提供最实用的手段。一般地说，有限单体法和结构矩阵分析法的基本概念即是每一个结构可当作是单独的结构组成部分或单体的集合。结构必定是由有限个单体组成的，这些单体则在有限个节点处相互连接起来。这就是结构连接性的“有限”特征，这样就使得我们有可能用代数联立方程（或矩阵方程）来进行分析，并使一个结构系统与连续体力学的问题有所区别。

如同在图 1(a) 中可以看到的那样，“单体集合”的概念很自然地用之于一个普通的框架结构。此时所用的结构单体为简单的梁、杆、桁材。这些单体可能是标准的等直构件，也可能是具有曲轴和变断面的构件。在任何情况下，它们都是分离的、仅在其两端互相连接起来的单体。在典型的框架结构理想化的图形中需要用到的唯一近似处即是结构单体性质上都是一维的，也就是说，其重要的弹性特征可表达成单一变量——即沿弹性线的位置“ s ”——的函数。

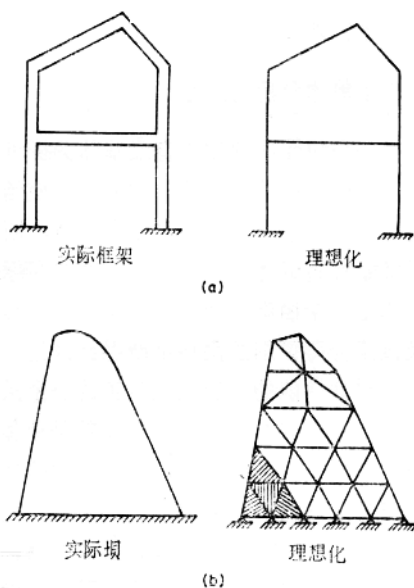


图 1 结构的有限单体理想化图形
(a)一维单体, (b)二维单体

有限单体法所引入的对普通结构分析法的一个重要引伸就是应用二维或三维的结构单体系统来表征一个弹性连续体。为同图 1(b) 所示的那样, 一个二维平面应力系, 例如重力坝的截面, 可表达成在有限个节点(角隅)处相互连接起来的二维平面应力单体的集合。二维单体的集合同样可用来表达任意形状的壳体和弯曲平板, 至于推广应用三维单体来表征弹性固体, 那就是十分显而易见的了。

当用这种方法把结构理想化而作为一个适当地成形的二维或三维单体的集合时, 我们就能够用标准的结构分析来分析这个弹性连续体。要注意的是, 在这种情况下所用的近似是属于物理性质的, 这就是用一个变换了的结构体系来代替实际的连续体。在这个替代系统的数学分析中是用不着近似的, 这一特点便使得有限单体法和有限差分法有了区别, 因为在有限差分法中, 真实结构系统的精确方程式是用数学近似法来求解的。

应当承认, 弹性连续体使之理想化而作的结构单体的集合, 这并不是一个新的设想。许多工程师都曾在用一维单体的集合来表征一个连续体这样的分析中使用了结构上的近似。在这方面可以举出的是: 把平板弯曲问题表征为正交梁系或网络系统⁽⁷⁾, 把壳体理想化当作空间的桁架系统⁽⁸⁾。事实上, 这就是对仑尼古夫-麦克亨利(Hrennikoff McHenry)关于表征平面应力系统的“网络比拟”^{(9), (10)}加以改进的结果, 这种网络比拟实系最早导致有限单体的概念的发展。

因此, 在有限单体法中新的设想并不是在对连续体的结构近似, 而是在使用了二维或三维的结构单体。由于使用这些单体, 只要把原来的连续体分为具有适当大小和形状的分块, 而在各个单体中仍然保留原系统的所有材料特性, 我们就能使结构理想化。举个例子来说, 假使材料是正交异性的弹性体, 那么在规定单体的性质时也可以保留同样的正交异性的特点; 如果材料是非线性弹性的, 或者是弹塑性的, 则同样的特性可用之于有限单体中。这种处理任何材料特性的能力仍是有限单体主要的标志之一。

2 有限单体分析的过程

一个弹性连续体的有限单体分析可以分成三个基本方面: 使结构理想化, 单体性能的计算, 以及单体集合的结构分析。使结构理想化只不过是把原来的体系分割成许多单独小块集合。在分割时要求作出判断, 因为随后的分析实际上是对替代结构进行的, 而其结果仅能有效至替代结构的性能模拟实际结构的相仿程度。然而一般地说, 这一理想化步骤并不是一个困难的问题, 分割得稍为粗糙一点也经常会得出良好的结果, 而且它们一般地通过用分得更细的网格不断得到改进, 就象我们能从直观上预料到的那样。

单体性能的计算则是分析的一个关键方面, 因此在本章下述各节中将略为详细地讨论它。现在只要指出, 这一特性就是单体的刚度或柔度。由于假定各个单体仅在有限个节点处相互连接, 因此一个单体根本的弹性特征即由加之于节点上的力以及由此而产生的挠度这两者之间的关系来体现。这个力与挠度的关系可以很方便地用单体的柔度或刚度矩阵表达出来。关于它们的推导将要放在后面加以讨论。

当单体特性确定了之后, 那么分析在单体集合中由于任何给定的荷重而生成的应力与挠度便是一个标准的结构问题。一俟它们的特性确定了后, 各个单体的构型便和分析不再发生关系; 同样的技巧适用于一维、二维或三维单体的系统或它们之中任何一种组合。如

象在任一个结构分析中，根本的问题就在于同时满足下述三项要求：

(a) 平衡条件；作用在每个节点处的单体内力必须和加之于节点上的外力平衡。

(b) 相容条件；单体的变形必须使其在荷重作用下继续于节点处保持连续。

(c) 力与挠度的关系；每个单体中的内力和内部位移必须按照单体各自的几何特性和材料特性所要求的那样发生关系。

结构分析的两种基本方法通常称为力法和位移法，任一种方法都可用于满足这些要求。一般地说⁽¹¹⁾、⁽¹²⁾，位移法能对极复杂的任意形状的结构在列出它的算式和编排计算机的程序时比较简单些，故这里所叙述的仅为此种方法。然而，有些仿者却仍旧宁可用力法来解决许多问题⁽¹³⁾、⁽¹⁴⁾，这种方法对有限单体分析的适用性也不应当小看了它。

用位移法来分析任何结构的基本运算在于：

(a) 计算各个单体的刚度特性，并用任何合适的局部（单体）座标系统予以表达。

(b) 把单体的刚度矩阵由局部座标的表达式变换成与整个结构集成的总体座标系统相关的形式。

(c) 将每个节点上的各单体刚度组合起来以求得总的集成的节点刚度矩阵 $[K]$ 。当所有单体的刚度都以同一个总体座标系统来表达时，这一步仅为简单的加法而已。

(d) 列出平衡方程并予以求解。此等平衡方程表征作用于节点的力 $\{R\}$ 与所产生的节点位移 $\{r\}$ 之间的关系，即：

$$(R)=[K]\{r\} \quad (1)$$

位移法的优点之一即是结构的刚度矩阵 $[K]$ 通常只有少数不等于零的元素存在，而且阵形是很有规则的。为要求得在大而复杂的结构系统中的节点位移，认清这些特征是很重要的。

(e) 根据运动条件从计算得到的节点位移来算出单体的变形；最后根据单体的变形用单体的刚度矩阵来求得单体的力。

这些运算对任何用位移法来进行的结构分析都是一样的。有限单体法独具的特点就是分析任意的二维及三维单体的刚度特性，这些将在下述各节中予以讨论。

3 有限单体的变形形式

在分析图 1(a) 所代表的在土木工程中大家所熟悉的框架结构时，结构单体的弹性特征可以用显易的方法来进行计算。举个例子来说，计算任何直梁的柔度可将构件中分离出来，在两端给以简支，并计算由梁端单位弯矩所产生的梁端的转角。反之，要求的梁的刚度可给以梁端单位转角并计算端点的弯矩。总之，象这种直截了当的做法对确定一维单体的刚度矩阵或柔度矩阵将提供最有用的方法。

然而二维和三维单体的刚度特性就不能用同样的程序来求得。其原因为二：第一，要想计算在任意的二维或三维单体中由引入的一个单位节点位移所产生的节点力是非常困难的（假如不是不可能求得的话）。第二，而且是更重要的一点，就是应用此法所规定的单体刚度特性，这样求得的结果会和真实的连续体中的应力及挠度大不相同。比如说，我们考虑图 1(b) 的平面应力系。假使堤坝的理想化图形是由仅在角隅处用销钉相互连接起来的许多独立的三角形板构成的，那么它在荷重作用下的性能和真实连续体比较起来显然只

会有极粗略的近似性。当荷重作用时，三角形板的变形将彼此毫不相关（节点处除外），而其间隙或搭叠现象则要沿着它们的边界发生；因此，理想化图形就要比连续体的柔性大得多。而且，严重的应力集中会在每一个节点处由于销钉的集中力而发展起来，从而理想化图形的应力分布便和实际堤坝面截中的应力很少相似。

为了使有限单体的理想化图形能够恰当地体现出一个实际的连续体，必须要求每个单体的变形能够和连续体相应范围内生成的变形相似。这一点是容易达到的，只要规定有限单体中可能生成的变形形式就可以了。因此，在规定一个单体的刚度矩阵时，基本的，同时也是关键的一道程序就是选择它可能被容许的变形特征。

在选择特征时要考虑的最重要的标准就是相邻单体间变形的相容条件。可以证明⁽¹⁵⁾，如果被指定的变形形式能够保证单体内部的相容条件，而且同时能获得沿着单体边界的位移的相容条件，那么在理想化图形中的变形将能代表真实连续体变形能的下限。同样，在网格的大小不断减小时，有限单体的解就会愈加接近于真正的解。因此，利用完全相容的单体的变形形式仍是建立可靠的有限单体分析的一个重要因素。

对于图1(b)中简单的三角形平面应力单体来说，要指定完全相容的变形形式是很容易的，只要限定内部的位移在两个垂直方向都成线性变化就是了。这样一来，在未曾变形的单体中的任何直线于变形过程中仍将是一直线。其结果则是所有单体的直线边界在单体畸变时仍将保持接触，因而由位移分析法所确立的节点的相容性将能保证节点间的全部边界相容性。

还应当注意的是，这一分析方法并不能担保沿单体边界的应力的平衡；一般说来，在相邻单体间的应力会是不一样的，只有经过人为地加上去的沿着边界分布的外力才能达成平衡。然而节点合力总的平衡是为位移分析法所提供的；因此这些人为的边界荷重系属局部的，自我平衡的效应，它们对于结构总的性能的影响是很小的。

4 有限单体的刚度分析

采用了假设的有限单体的变形形式后，一个任何形状、任何式样或任何材料性能的单体的刚度便可由标准的分析方法计算出来。在选择这些变形形式时，根本的目标在于求得如上所述的单体之间的边界相容性。然而除此以外，所选择的变形形式的数目必须和单体节点位移的自由度数目符合一致。（可以假定位移形式的数目多一些，并用雷利—里茨法（Rayleigh-Ritz）⁽¹⁷⁾使其减少自由度的数目，但这样通常不会得到改善单体刚度特性的效果。）

标准的单体刚度分析过程如下（这里是对二维单体说的，但是显然也可引伸于三维单体）：

(1) 用位移函数 M 来表示内部位移 v ：

$$\{v(x, y)\} = [M(x, y)]\{\alpha\} \quad (2)$$

位移函数应满足内部的相容条件，而且还要尽量保持单体间的边界相容性。一般地说，假使沿任何边界的位移能够只用边界每一端的节点位移来表示的话，则后一个条件就会付诸实现（对同样类型的单体而言）。诸位移函数的幅值用广义座标量 α 来表示，而且独立函数的个数应等于独立的节点位移分量的数目。

(2) 计算节点的位移分量 v_i ，用广义座标表达为：

$$\{v_i\} = [A]\{\alpha\} \quad (3)$$

矩阵 $[A]$ 只要把节点座标代入位移函数的矩阵 $[M]$ 便可求得。假使取位移函数的个数等于节点位移分量的数目，则该矩阵将是一方矩阵。

(3) 用节点位移来表达广义座标：

$$\{\alpha\} = [A^{-1}]\{v_i\} \quad (4)$$

在极少数场合中，矩阵 $[A]$ 可能是个奇异矩阵，因此需要调整单体的座标系统或变形的形式。然而一般情况，矩阵的逆运算仍是一个简单的计算机的过程。

(4) 计算单体的应变 ε ：

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B(x, y)]\{\alpha\} \quad (5)$$

矩阵 $[B]$ 是由 $[M]$ 将其位移函数作相应的微分而求得的。

(5) 计算单体的应力 σ ：

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} = [D][B(x, y)]\{\alpha\} \quad (6)$$

有限单体材料特有的弹性特征由应力——应变关系的矩阵 $[D]$ 来表示。它们可能是各向同性的，或者是正交异性的，或是弹塑性的，或者具有任何其它指定的特征。

(6) 计算单体的广义座标刚度 $\bar{k}$ 。应用虚位移原理，单体的任何微块 dV 的内力虚功 dW_1 是由实际的应力 σ 和微块移动所作的虚应变 $\bar{\varepsilon}$ 的乘积而求得的，于是*

$$dW_1 = \bar{\varepsilon}^T \sigma dV \quad (7)$$

利用方程(5)和(6)，上式可写作

$$dW_1 = \bar{\alpha}^T B^T D B dV \quad (8)$$

式中 $\bar{\alpha}$ 表示相应于 $\bar{\varepsilon}$ 的广义座标虚位移。因而总的内力虚功 W_1 可通过对方程(8)在单体的整个体积上进行积分来求的：

$$W_1 = \bar{\alpha}^T \left[\int_{vol} B^T D B dV \right] \alpha \quad (9)$$

这里 $\bar{\alpha}$ 和 α 从积分中提出来是因为它们和座标 x, y 无关。外力虚功相应于这广义座标虚位移 $\bar{\alpha}$ 则由下式决定：

$$W_E = \bar{\alpha}^T \beta \quad (10)$$

式中 β 代表与位移 α 相应的广义力。然后依次分别引用虚位移分量的单位值(即令 $\bar{\alpha} = I$)，并使外力虚功和内力虚功相等，即得

$$\beta = \left[\int_{vol} B^T D B dV \right] \alpha \quad (11)$$

根据定义，括号中的项于是就代表单体的广义座标刚度：

$$\bar{k} = \int_{vol} B^T D B dV \quad (12)$$

(7) 受换成需要的节点刚度 k ：

$$k = [A^{-1}]^T [\bar{k}] [A^{-1}] \quad (13)$$

* 除非为了清楚起见，此后将不再加用括号来表示矩阵

这仅仅是一个标准的座标变换。在此,变换矩阵 $[A^{-1}]$ 把广义座标 α 和节点座标 v_i 联系起来,就象方程(4)所表明的那样。

这个标准的程序将适用于规定任何形状的结构单体的刚度,不论单体是一维的、二维的或是三维性质的。用此种刚度矩阵来进行的结构分析通常只能得到近似的结果,当然,这是因为引入了对单体变形的约束的缘故。然而,如果变形的相容条件保持满足,那么求得的结果就可以借助于减小单体网格的大小而使之达到需要的精确度。一般地说,沿着单体的边界是不会保持平衡的,这一点在前面已经说过了,同样,假定的位移函数在单体中也不一定会保持平衡。这种缺乏平衡的现象即表征所作的近似程度。

虽然一维单体的刚度能用上述方法求得,但通常对此等情况这并不是最有效的途径。再者,这种方法在这类结构分析中可能得出极不精确的结果,除非变形形式选择得象满足相容条件一样,能够满足其内部的平衡条件。如果先假定力的形式,然后据此来计算单体的柔度,那么这一相反的运算步骤对分析一维单体是非常合适的,因为边界相容性的要求并不被包含在这些单体的集合内。

5 与连续体力学的方程的关系

虽然有限单体法曾是作为应用结构分析的方程来解决弹性体问题的一种方法而被提出来的,但如需要的话,它还可被给予较广泛的理解。例如,它不一定要把连续体分成离散的单体然后再使之集合。过种物理上的解释在对应用工程师说明概念时具有很大的价值,并且在建立对好几种结构成份所组成的复杂体系(例如支持在桁架上的壳体)的分析时不致发生困难。然而,譬如在分析一个简单的平面应力系时,则原来的连续体可以考虑为仅仅是被分成相当于有限单体的若干区域(如在图1(b)中所示的那样),但在形体上不予分离。于是假定的诸单体的变形形式就代表整个连续体内的一般位移,其中节点位移可取作为广义座标。用大家所熟悉的雷利—里茨法(Rayleigh-Ritz)来分析这个体系是和有限单体法完全相当的。贝塞林(J. S. Besseling)教授对表征有限单体法的矩阵方程和连续体力学的方程之间的类比⁽¹⁸⁾进行了全面的讨论,它指出有限单体方程和标准弹性力学方程的有限形式是全然等价的。

二维应力分析

6 引言

先前已指出过,有限单体法的最初发展是出于企图建立一个数值分析的方法来计算机翼表面内的二维应力状态。因此毫不奇怪,在非航空领域中这种方法的应用最早也是在研究平面应力和应变方面的。在土木工程中最先应用这种技术的,其中之一是曾在美国土木工程学会第二届电子计算机会议上所发表的一个报告²⁾。在那篇研究报告中所用的单体刚度及其推导方法,实际上就是第一篇有限单体法的论文¹中所报告的;而新论文的主要目的是要引起人们注意有限单体对于分析一般二维应力问题的应用。

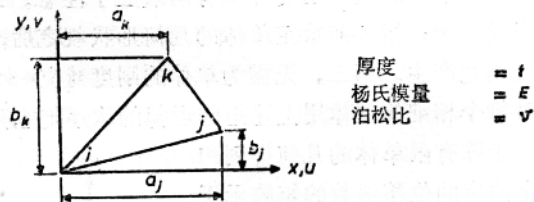
然而,为了使有限单体法在这些应用中具有实用的价值,那就必需设计一个数字计算机的程序,这种计算机程序能够把平面应力系(连同荷重一起)的基本记述受理为输入的数据,并能自动地对内部的应力和位移进行全部的分析。此外,计算机程序必须具有能够在适中

的计算时间内对几百个节点和单体的体系进行思考和容量。旨在发展这种计算机程序的一项研究项目在1960年初曾在加利福尼亚大学创始,并在同年年底这一计算机程序进入运算。由于以前曾经发表过关于这一计算机程序的一般说明及其实际应用的文章^{(3),(19),(20),(21)},故这里将仅讨论某些细节和几个特殊的示例。

7 平面应力单体刚度

在平面应力和平面应变的分析中²曾经使用过各种有限单体的形状。对于既定的节点形式来说,通常矩形单体(在适用之处)所求得的应力和挠度的近似值看来要比三角形单体求得的稍为好一点,因为矩形单体使用更较精密的近似变形。然而由于三角形单体在配合任意的边界几何形状方面具有较多的适应性,故三角形单体常是更加比较广泛地被采用于建立常用的分析程序。有少数程序是使用矩形单体与三角形单体的任意组合而制定的。过里将比较详细地讨论一个三角形平面应力单体的刚度分析,以此作为标准的分析技术的一个范例,但是也将对矩形单体提供适宜的位移函数。

一个典型的任意三角形单体连同所假定的位移函数一并示于图2中。可以注意到,这些函数表示在 x 和 y 方向线性的位移变化。因此每个边界在单体变形过程中仍旧保持一直线,单体单形的边界相容条件和内部相容条件便都有了保证。此外提供的六个独立的位移函数相当于节点的六个自由度。(三个节点,每个节点均有 x 和 y 向的位移)。



假设位移函数

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

图2 三角形单体平面刚度

该单体的矩阵 $[A]$ (见3式)是把节点坐标代入位移函数而求得的,其结果如下:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_j & b_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_k & b_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_j & b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

表达内部应变的矩阵 $[B]$ (见5式)是将位移函数作相应的微分而求得的:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

最后,单体的材料性质是由应力——应变矩阵 $[D]$ 所规定的(见6式)。下面这个众所周知的关系式用于在平面应力状态下的各向同性弹性材料:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6b)$$

对于平面应变情况,或者对于正交异性材料可立即写出一相当的表达式。非线性的材料性质也可以用增量法或迭代法来考虑,过将在下面予以阐述。

首先建立矩阵 $[B^T DB]$ (见12式),由此来着手单体的刚度分析,过个矩阵对三角形单体来说是 6×6 阶。然后把这个矩阵的每一项就单体的体积进行积分,在此这仅是一步简单的运算,因为矩阵的诸元系都是和 x 及 y 无关的。最后,我们用(13)式所示的矩阵 $[A]$ 的逆运算把过个广义座标刚度变换成需要的节点座标。其结果就是待求的 6×6 阶的单体的刚性矩阵。

关于单体的这一刚度计算有两点应予注意。第一,刚度完全是由 $[M]$ 和 $[D]$ 这两个矩阵来确定的;当任何给定单体的几何形状规定后,其刚度即运用此等输入矩阵基于标准步骤自动地产生。第二,无需为单体的刚度建立一个显示表达式——这一刚度宁可通过计算机对每个相继的单体用上述矩阵运算的次序把它列成数字的形式。

矩阵有限单体的几何排列和一个假定的位移函数的矩阵示于图3中。由于它有四个角隅,该单体便有八个自由度;因此就要在三角形单体所假定的位移函数上再添加两项。我们会看到,边界上的相容性在这一情况也是能保持的,因为单体的边缘仍旧是按直线移动的。

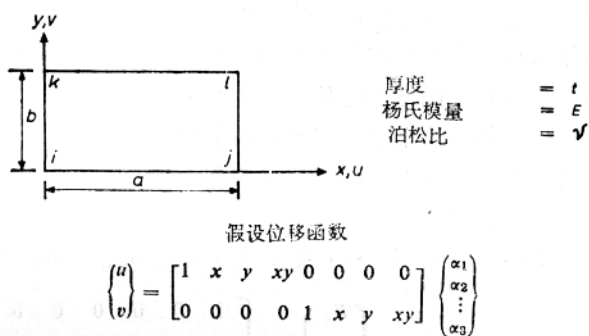


图3 矩形单体平面刚度

8 计算机分析步骤

为了分析任意平面应力系统而设计的计算机程序分为三个主要部分:(1)分析单体的刚度并集成成结构的整体刚度矩阵,(2)解节点力的联立平衡方程以求得节点位移,(3)计算各个单体中的应力。先输入数据——此为描述结构及其荷重的数据,然后产生输出——此为列出节点的挠度及单体的应力,这分析就在这样一个单一的通路中完成的。

需要输入的信息包括单体的数据(弹性特征及每个单体的节点数目)和节点的数据(每一节点的 x, y 座标及其对应的荷重分量)。计算机使用这些数据来计算单体的刚度,然后把相应的单体刚度分量叠加以求得每一个结构节点总的刚度。由于只有为数很少的节点直接由单体互相连接起来,故在整个结构最后的刚性矩阵中只有极少的偶合项存在。为了要利用矩阵中大量的零值,我们只要保留平衡方程的非零项,并用高斯-塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法来解联立方程。

高斯-塞德尔法(Gauss-Seidel 法)只是求介结构的平衡方程所用的一种有条理的 松弛的技巧。对结构的第 n 个位移分量的平衡方程可以写作:

$$R_n = \sum_{i=1, N} K_{ni} r_i = K_{n1} r_1 + K_{n2} r_2 + \dots + K_{nN} r_N \quad (14)$$

式中 R_n = 节点 “ n ” 处的外荷重,

r_i = 节点 “ i ” 的位移,

K_{ni} = 由节点 “ i ” 的单位位移而产生的在节点 “ n ” 处的结构力。

由于刚度矩阵中不等于零的元很稀少, 故在每个方程中只有极少的 K_{ni} 项存在。

对于松弛解法来说, 这个方程可重新写作:

$$R_n = \sum_{i=1, n-1} K_{ni} r_i + K_{nn} r_n + \sum_{i=n+1, N} K_{ni} r_i$$

于是有

$$r_n^{(S+1)} = K_{nn}^{-1} [R_n - \sum_{i=1, n-1} K_{ni} r_i^{(S+1)} - \sum_{i=n+1, N} K_{ni} r_i^{(S)}] \quad (15)$$

在此, 上标数字表示迭代的次数。这个方程含有这样的意思, 即在每个节点处, 新的位移值是不断用前一次在所有其它节点处求得值反复计算出来的。在用于平面应力问题程序的迭代法中, 每个节点处的两个位移分量是同时求得的, 因此在(15)式中的符号 R_n 及 r_n 就代表双元素的矢量, 而刚度矩阵 K_n 则为 2×2 阶。

为了要改善松弛法的收敛速度, 我们在计算机程序中使用一个过松弛因子 (over-relaxation factor)。为此须计算迭代一次所产生的位移变量 Δr_n :

$$\Delta r_n^{(S)} = r_n^{(S+1)} - r_n^{(S)} \quad (16)$$

把(15)式代入(16)式中, 得

$$\Delta r_n^{(S)} = K_{nn}^{-1} [R_n - \sum_{i=1, n-1} K_{ni} r_i^{(S+1)} - \sum_{i=n+1, N} K_{ni} r_i^{(S)}] \quad (17)$$

然后在加到前一次求得的值上去之前, 我们用过松弛因子 β 乘这个位移的变量, 即得到一个改进了的估计节点 “ n ” 的位移量; 于是

$$r_n^{(S+1)} = r_n^{(S)} + \beta \Delta r_n^{(S)} \quad (18)$$

过松弛因子的最有效值随结构的类型和加载情况而变化, 但是在绝大多数平面应力分析中, 看来 1.8~1.95 这样的值似乎能得出接近最佳的结果。

当节点位移一经得到满意的精度时, 根据前面已导得的应力关系即能容易地求得单体的应力。合并(6)式和(4)式, 任何单体中的应力均可直接用节点位移给出:

$$\{\sigma\} = [D][B][A^{-1}]\{v_i\} \quad (19)$$

式中 $\{v_i\}$ 表示联系该单体诸有关节点的位移。

从范围相当广泛的实例的经验都表明平面应力这种程序计算是分析一般二维弹性力学问题的一个很实用且有效的工具。没有遇到收敛性方面的困难, 就计算方便和精度这方面来说, 这种方法和其它解法比较起来是十分有利的。当使用 IBM 7090 计算机时, 任何问题的计算时间可按下述简单的关系式予以估算:

$$t = 0.002 \text{ mn} \quad (20)$$

式中 t = 时间, 秒,

m = 迭代的次数,

n = 节点数目。

通常迭代 75 次到 150 次就己能得到满意的结果, 因此计算的时间平均约为每一节点 0.15 到 0.30 秒。由是对具有 600 个节点这样一个最大的结构系统来说, 计算所需的时间就不到三分钟。IBM 7094 计算机的速度更要快二、三倍。

9 计算结果的精度

曾经就应力和挠度的结果做过一系列的比较, 其一是用有限单体法进行计算, 另外是用实验或其它分析法来求得应力和挠度的值。一般说来, 这许多比较都说明了用有限单体法来分析平面应力的精度要取决于单体中所假定的基本变形形式是否妥当; 也就是说, 凡假定的单体变形能逼真地反映相应区段中实际发生的变形, 那么算得的应力和挠度就会是非常精确的。

这里只举两个例子来说明该平面应力分析方法的精确性和通用性(这两个例子都取自参考文献[21])。第一个例子就是图 4 所示的很简单的厚壁圆柱体。该圆柱体为无限长, 并承受内压力的作用, 因此它实在是一个一维问题。图 4(a) 示一狭小片段所做成的二维有限单体, 我们用图 4(b) 中所示的 13 个单体组成的理想化图形来进行分析。今假定沿着边界设有滚动支座, 依靠这些支座来保持必须的轴对称位移条件, 而内压力则由作用在内缘节点处的两个集中荷重来代替。

图 4(c) 为分析结果与理论解的精确答案的比较。小圆圈代表节点处的应力值(系相邻单体应力的加权平均值), 而实线则表示理论计算的结果。在内缘边界上可以看到唯一有明显差别的点, 这是由于在这个边界上的两个集中荷重并不能很好地代表分布的内压力而造成。

本例所求得的值与理论计算符合一致, 这一点是不足为奇的。实际结构中的应力梯度并不十分严重。因此假定在每个单体中应力均匀分布就合理地近似于真实的情况。第二个例子——在厚度均匀的平板中围绕一椭圆孔的应力分布——对这种分析法提供了更严峻的考验。该结构系统及其有限单体的理想化图形示于图 5 中。关于使结构理想化这一点, 我们应当指出: 这次分析是作为对这一分析方法进行一次全面的考验。因此要求一个没有经验的学生来建立理想化的图形, 并对计算机准备数据卡片。给予他唯一的指导就是建议在高应力梯度范围内(围绕着开口处)要用小的单体, 而在别处则用较大的单体。这一建议多少已被照着做了, 但是很明显, 在远离开口的区域还可以取用更大的单体, 这样会减轻计算的烦冗程度而不致降低精确性。

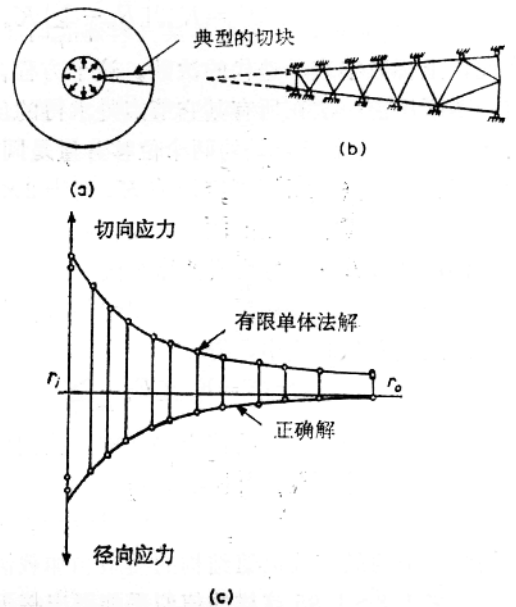


图 4 厚壁筒的分析, 图中: (a)初始系统 (b)有限单体的理想化 (c)应力分析

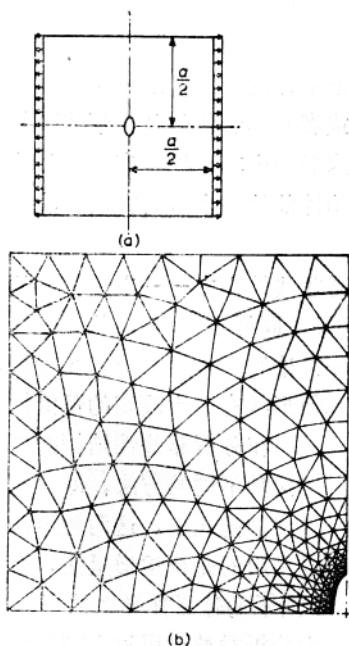


图 5 具有一椭圆孔平板的分析，图中：
(a) 板和负荷系统，椭圆长轴 $a=12$ ，
长轴：短轴=3，
(b) 单体的理想化

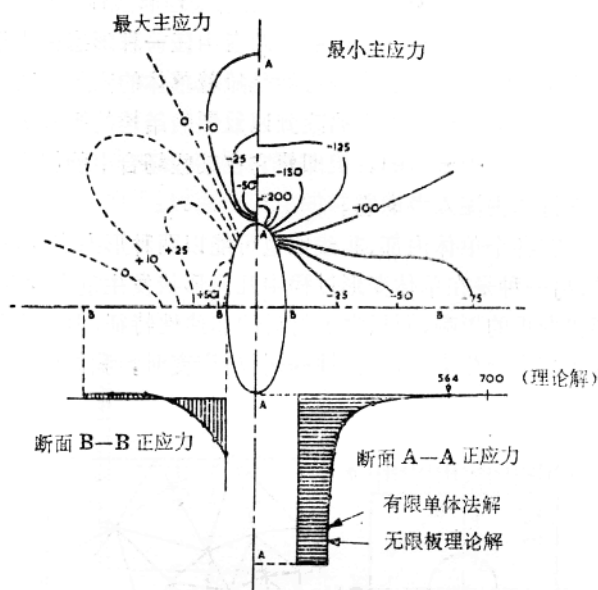


图 6 具有椭圆孔平板的应力

这一研究的结果在图 6 中以主应力等高线的形式和在对称轴上正应力分布的图形表达出来。这些结果都和一块无限大平板(其上开有同样形状的椭圆孔)的理论研究作过比较，并且观察到除了在最大应力集中点处外，任何地方都是很符合的。作用在对称轴上的正应力的理论值用实线图形画在图 6 的下半部，而有限单体节点应力的平均值则以黑点来表示。唯一醒目的差别是在 A-A 剖面上于孔的边缘处，在那里，有限单体应力与理论值 700 比较起来只有 564。这个差别的原因是十分显而易见的：在最里边的单体中假定为均布应力状态，这一点对这个应力梯度极大的区域来说是不真实的。当然，用更小的边缘单体会得到较精确的结果，但显然可能要极小极小的单体才能得出接近于 700 的有限单体应力。在实用上，这个非常局部的差别也许也许是微不足道的。

这些例子用来说明在平面应力问题中用有限单体法能求得的精度。计算机程序的大规模应用于求解工程实际问题已在好几篇论文([19],[20],[24],[25])中叙述过，故这里没有必要再举这类的示例。

有限单体法其它的应用

10 非线性平面应力分析

在有限单体分析中普遍使用的矩阵运算本来就是线性分析的方法，这种分析方法的有

效性是依赖于叠加原理的。然而，矩阵运算能够引伸用来处理非线性结构的问题⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾，因此有限单体法也就可能用来处理非线性系统。

一般说来，非线性可能以两者中任一种形态引入于有限单体的分析，这就是单体的性能（即单体的刚度）本身可能是随着单体的变形而改变；或者是集合体的几何形状可能在荷重作用下发生足够大的改变以致影响结构的平衡关系。这后一个非线性状态是和结构的大挠度理论相联系的，但即使它在某些场合中能够代表结构性能的一个重要方面，我们在这里将不去深入考虑它。

在各个单体内部，非线性也可能以两种形态出现：一种是非线性应力——应变关系的结果，另一种是在单体变形过程中几何形状发生重大改变的结果。同样，这里我们将忽略几何形状变更的影响，而只考虑材料的非线性特征，但应记住这一讨论的局限性。虽然，当在给定的系统中产生大的（非弹性的）材料应变时，我们应当考虑几何形状有重大改变的可能性。

在分析非线性结构时可以用两种不同的方法，即荷重增量法和迭代法。这两种方法中最常用的是荷重增量法，在图7所示的体系作弹塑性平面应力分析时就已用过这种方法（取自参考文献[21]）。该结构系具有一圆孔的正方形板（如图7(a)所示者），四分之一板的有限单体理想化图形见图7(b)。在分析中我们假定它的变形能密度超过某一临界值时材料即变成塑性状态；应变量超过这个临界值时，相应的弹性模数仅为临界下“弹性”范围内的1/500。（应当指出：我们也可以对弹塑性性能假设任何其它的定义而不会改变基本的步骤；这是有限单体法主要的特性之一。

用荷重增量法来进行分析时，我们假设应力“ q ”是以微小的增量逐步加载的。然后就

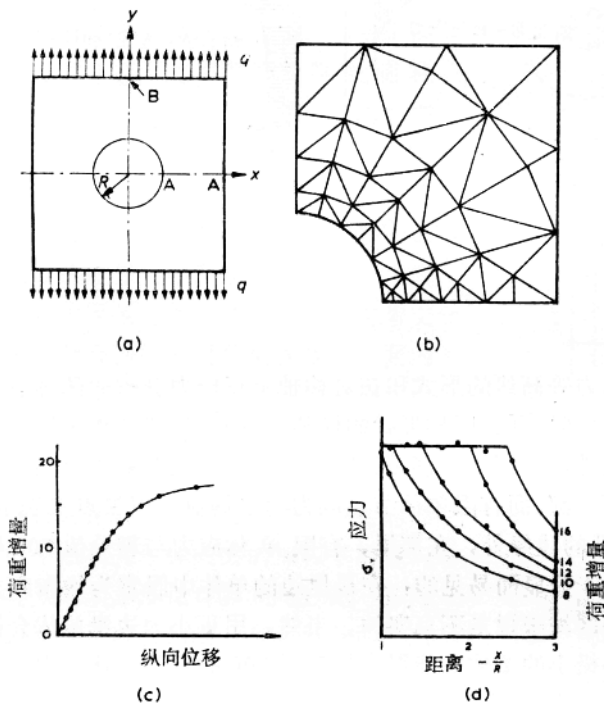


图7 弹-塑性平板的分析

图示(a)板和荷重系统 (b)有限单体的理想化
(c)B点的位移 (d)A-A断面应力图

象一个标准的线性平面应力问题那样对每一样次增量进行应力和挠度的分析。在给以每一次增量后即用计算机算得每个有限单体中的变形能密度，并与临界值作一比较。假使超过这一临界值的话，那么对随后的载荷增量便要把单体的弹性模数降到“塑性”时的值。结构中总的应力应变状态是由每一次载荷增量所求得的结果叠加起来而得到的，整个过程都

由计算机依次连续不断地、自动地进行的。

分析的结果在图 7(c) 和 7(d) 中以图解的形式表达出来。图 7(d) 表明 $A-A$ 剖面上的应力分布，它说明所有单体直到第 8 次增加载荷以前还都是弹性的。在第 9 次增量时最里边的单体超过了临界变形能密度，而在第 10 次增量时显而易见在孔的边缘处已经产生了屈服，并随之应力向外转移。随着载荷继续增加，塑性区就不断向外扩展，这一点是十分明显的。这种非线性状态示于图 7(c) 中，图中表明 B 点的垂直位移为载荷增量的函数。在第 18 次增加载荷时整个剖面就变成塑性的了，因而所产生的位移要在图上画出来将是相当大的。

第二个非线性的例子（也取自参考文献[21]）示于图 8 中。在本例中，假定材料具有应力——应变的双线性关系，其中拉伸时的弹性模数取仅为压缩时的 $\frac{1}{20}$ [如图 8(b) 所示]。所分析的体系[见图 8(a)]是和图 7 所考虑者相类似（荷重及支持情况除外），有限单体的理想化图形也是一样的。

分析是用迭代法来完成的，其中材料的性能不断地被更改，直到在每个单体中的主应力都由恰当的模数与其主应变变成比例为止。首先假定整个结构处于受压状态，因而最初的分析是一标准的线性分析，并在每个单体中取用压缩弹性模数。在这一分析之后，即由计算机算出每一单体中的应力状态，并且只要发现有拉伸的主应变之处就改用拉伸的弹性模数。当然这种改变会破坏单体的平衡，并将所产生的节点力的改变用来作为第二次分析的荷重；在这第二次分析中，单体的性能是以第一次分析中获得的应受为根据的。材料的性能以此办法相继地予以修正，直到第 14 次分析以后用在每个单体中的应力——应变定律与指定的要求符合一致。在 A 、 B 两个剖面上所求得的正应力的分布分别示于图 8(c) 和 8(d) 中。实线表明双线性应力的分布，而虚线则为最初的全线性分析所求得的结果。这一迭代法是和牛顿——拉斐森 (Newton-Raphson) 法²⁷ 有密切联系的。在分析许多类型的非线性系统时，这一方法具有广泛的适用性。然而应当注意，这个过程可能不一定会收敛成结构的唯一的解，事实上，对于某些非线性结构可能没有唯一的解；也就是说有这种可能，在同样的荷重情况可能有两种或多种不同的

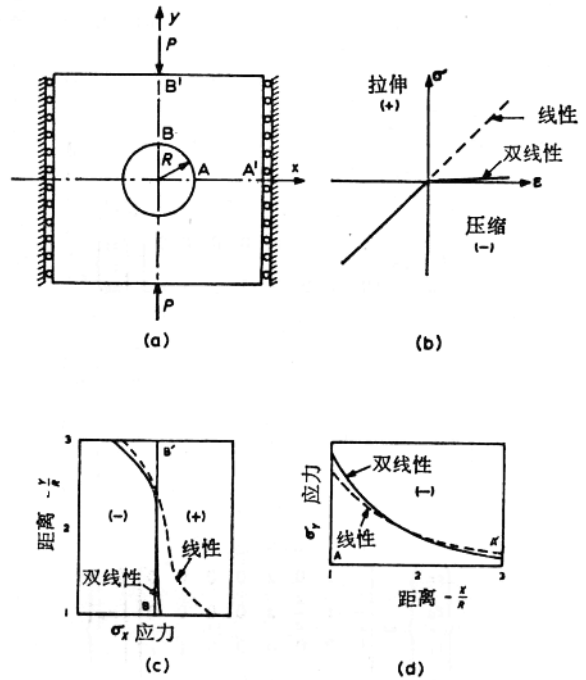
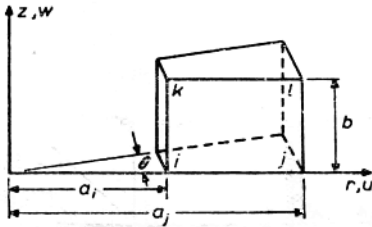


图 8 具有双线性材料性质的平板
图示(a)板和荷重系统 (b)应力-应变关系
(c)断面的应力 (d)断面的应力

结构变形状态能与其平衡。在这些情况中，载荷增量法就是唯一有效的求解手段，因为这种方法明确规定了结构加载的演变。

虽然这些例子只是涉及非线性的材料性质，但不论是载荷增量法还是迭代法都可被引伸能同时考虑几何形状的改变。在任一种方法做完每一次循环后，只需变更体系的几何特征，与此同时也变更材料的性质，然后应用在这两方面都修改了的体系于下一轮的变形计算。

11 轴对称弹性体



杨氏模量 E
泊松比 ν

假设位移函数 [M]

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r & z & rz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & z & rz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

节点位移 [A]

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_l \\ v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_i & b & a_i b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_j & b & a_j b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_i & b & a_i b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_j & b & a_j b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

单体应变 [B]

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 1 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

应力—应变关系 [D]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

图 9 轴对称单体刚度

增加，所有这些因素对单体刚度的影响便趋于消失，并在距中心轴很远时，轴对称单体的刚度就近乎相当的平面应力单体的刚度。

虽然一个具有 8 个自由度的矩形单体的分析已被描绘在图 9 中，但是很明显，具有 6 个自由度并使用图 2 所示之变形形式的三角形单体（在正视图中）是同样地适用的。事实

也可以把平面应力的计算程序修改一下就能用它来分析轴对称的弹性体。在此等体系中，结构及荷重均对称于中心轴，这一点就导致一真正的二维位移形式。换句话说，用柱坐标统来表述后可使位移仅在径向和平行于轴的方向内产生；切向位移并不存在。因此，假使将平面应力计算程序中的坐标系的两根轴和轴对称体系的轴向与径向联系起来，那么这个计算程序也就同样能用来分析这种轴对称体系。

对这种情况在平面应力计算程序中唯一需要更改的就是有限单体的刚度分析。对在 $r-z$ 平面内具有长方形的一个轴对称单体的刚度计算概要地列于图 9 中。这个单体和一个矩形平面应力单体之间的最大差别就是在平面图中它为楔形。当我们就单体的整个体积进行积分时，这一点可能对单体的刚度具有重大的影响。再者，我们知道切向应力和切向应变分量是包含在这类单体中的，于是应力应变矢量就有四个元素。当然，随着径向距离的增