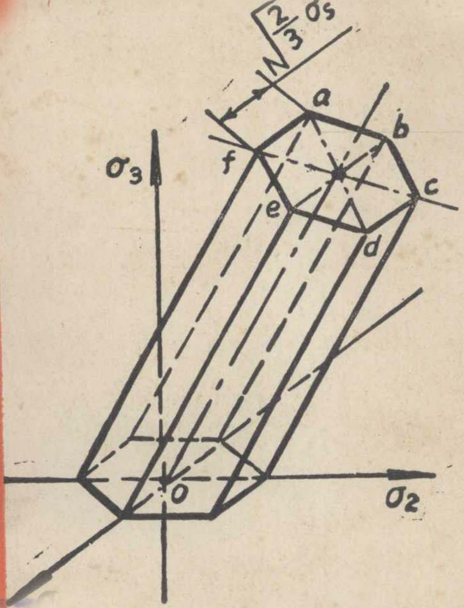


弹性力学专题教材

塑性力学基础知识

熊祝华

高等教育出版社

弹性力学专题教材

塑性力学基础知识

熊祝华

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是与徐芝纶编《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材，并可作为塑性力学入门课程的教材。全书共七章，内容包括金属材料的塑性性质、圆轴扭转和直梁弯曲、应力应变分析、屈服条件和塑性本构关系、简单弹塑性问题、平面应变问题的刚塑性分析、极限分析定理。每章附有习题和思考题，习题附答案。

本书亦可供有关科研和工程技术人员参考。

弹性力学专题教材

塑性力学基础知识

熊祝华

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.375 字数 127,000

1986 年 4 月第 1 版 1987 年 2 月第 2 次印刷

印数 6,651—9,160

书号 15010·0730 定价 0.98 元

前　言

这是一本与徐芝纶编《弹性力学简明教程》配套的专题教材，是塑性力学的入门书籍；所涉及的内容较多 但篇幅有限。为此，除了在理论、体例和符号方面力求与上述《简明教程》相衔接外，在内容上则侧重于基本概念的建立、基本理论的阐述以及基本方法的说明，为读者进一步学习塑性力学打好基础。

为了使教材具有较大的灵活性和适应性，本书在分章时力求内容相对集中，篇幅短小，以便在教学中针对不同情况，予以取舍。

为了在教学中培养学生的自学能力，本书在叙述上力求深入浅出，简明易懂 便于自学。在精选内容、控制篇幅的前提下，对概念、理论的阐述或论证，力求准确、严谨、简明和前后一致。

本书前两章是材料力学中塑性内容的重复和加深，后五章则是塑性力学的基础知识。其中第一章是导论性的内容，它具有承前启后 寓繁于简、钩画全貌、突出重点的作用。对于在材料力学中没有学过塑性的专业，可将前两章作为材料力学的补充教材；对于在材料力学中已学过塑性的专业，则以本书后五章作为主要内容，前两章只需择要讲授。

本书插图按章编号，公式按节编号；如式(2-3)表示第二节的第三式 在后面引用前章公式时，则在公式号前加一个罗马数字，如式(III 2-3)表示第三章第二节第三式。

本书经夏志皋同志仔细审阅，提出了不少宝贵意见，编者深表感谢。在编写过程中 傅依铭、崔道碧、熊慧而等同志在校核原稿、描绘插图、抄写稿件以及选取习题等方面做了许多工作，编者在此一并表示深切的感谢。

目　　录

第一章　金属材料的塑性性质

在弹性力学中，我们讨论的问题限于应力和应变的关系为线性的，即材料服从所谓广义虎克定律。当然，弹性力学并不限于线性的应力-应变关系。材料的弹性性质的根本特征是其变形过程为可逆的，应力和应变之间有唯一的、单值对应的关系。即一定的应力对应于一定的应变；应力卸去，应变也随之消失。然而，从材料的拉伸试验得知，只有当应力值小于某一数值（称为弹性极限）时，变形才是可恢复的，即可逆的。当应力值超过弹性极限之后，一方面，应力-应变关系不再是线性的；另一方面，在卸去载荷（应力）后，变形不能完全恢复，即材料已产生了不能恢复的或不可逆的塑性变形。如果我们规定结构中不能出现塑性变形，则只用弹性力学的办法就可以分析其中的应力和应变，计算结构的强度和刚度，确定结构的设计准则等等。然而，这种规定将不能充分发挥材料的作用，造成浪费。例如，在圆轴扭转和梁的弯曲中，最大应力都发生在截面的最外层，即所谓"危险点"处。当"危险点"处及其附近的应力到达和超过弹性极限时，其它大部分材料所承受的应力仍然是在弹性范围内，构件并不会"破坏"或失效。因此，在结构设计中考虑材料的塑性性质是可取的，它已日益得到人们的重视和应用。为此，我们在学习了弹性力学之后，还必须知道有关塑性力学的一些基本知识和简单的解题方法，为今后进一步学习和应用塑性力学打好基础。在本章，我们将通过对典型拉伸曲线的分析，介绍有关金属材料的基本塑性性质，并以简单结构为例，说明弹塑性问题的若干特点。

§1-1 拉伸曲线

在材料力学中，已知在常温、静载下金属材料的典型 σ-ε 曲线如图 1-1 所示。从材料的这种拉伸试验结果，可以得知金属材料的若干重要力学性质。

1-1-1 弹性范围

设试件是从自然状态开始受拉，其拉伸图将从原点开始(图 1-1)。当应力递增时，拉伸曲线为 $OABC$。对于一般的金属工程材料，拉伸屈服极限和压缩屈服极限在数值上可认为是相等的，即假定没有初始包辛格(Bauschinger)效应。于是，应力在下列范围内变化时，

$$-\sigma_s \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s \tag{1-1}$$

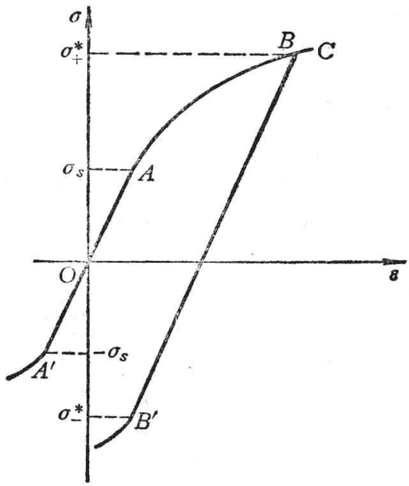


图 1-1

材料处于弹性状态，应力应变关系为

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1-2}$$

这个关系是唯一的、单值对应的，与应力如何变化没有关系，即与应力的路径或应力历史无关。为了区别起见，我们称$\pm\sigma_s$为初始屈服点；两个初始屈服点之间的应力变化范围叫做初始弹性范围。

顺便指出，在一维空间内，一个区域（实际上是区段）的边界是两个离散的点，类似地，在一维应力情况下，两个初始屈服点就是初始弹性范围的边界。在多维空间内，一个区域的边界则是某个曲面（或曲线）；类似地如果材料处于复杂应力状态，非零应力分量不只一个，则初始弹性范围的边界将是用应力分量（作为自变量）表示的某个超曲面（或曲线），叫做屈服曲面，这个曲面的函数叫做屈服函数或屈服条件（参阅第四章）。

如果应力超过了初始弹性范围，例如，在图 1-1 中，应力超过了σ_s，则将出现塑性变形。当应力单调增加时，曲线将是$OABC$。如果应力加到某值σ_+^*（图 1-1 中的B点）后，卸去应力，应力-应变关系又呈现为直线。这种直线关系可以延续到应力到达某值σ_-^*（包括正负号）时才停止。此后，材料进入反向（压缩）塑性状态。应力在下列范围内变化时

$$\sigma_-^*\leqslant\sigma\leqslant\sigma_+^* \tag{1-3}$$

应力-应变关系不再是式(1-2)，而是

$$\Delta\sigma=E\Delta\varepsilon \quad \text{或} \quad d\sigma=Ed\varepsilon \tag{1-4}$$

这是增量型的虎克定律。只要应力是在式(1-3)所示范围内变化，无论变化过程（应力路径）如何，关系(1-4)不变。由于式(1-4)是线性关系，而且是与路径无关的，所以将式(1-3)所示的应力变化范围叫做相继弹性范围，而σ_+^*及σ_-^*则是相继弹性范围的边界，称为相继屈服点或加载点。显然，在相继弹性范围内，应力变化虽然是弹性的，但应力-应变关系却与初始弹性范围内的不同，它是增量型的虎克定律。从图 1-1 可见，相继弹性范围及其边界不是固

定的，而与应力历史或变形历史有关。实际上，在图 1-1 中，B 点的位置改变，B' 的位置也改变，即 σ_{+}^{*} 及 σ_{-}^{*} 将变化。在一维应力状态下，相继屈服点还可由试验加以确定。在复杂应力状态下，相继弹性范围的边界将是某种用应力分量表示的、且与应力历史有关的曲面，称为相继屈服曲面或加载面，它们是变化的。显然，要确定加载面及其变化规律是一个很困难的问题，至今仍未很好地解决。

最后指出，各向同性材料在经历塑性变形(例如由于加工成型及加载等原因)之后，都将呈现出某种各向异性性质。例如，当试样拉伸到 $\sigma_{+}^{*}(\sigma_{+}^{*}>\sigma_{s})$ 后，经受卸载时，其相继弹性范围的另一边界 σ_{-}^{*} 一般地在数值上将小于 σ_{+}^{*}，即 $\sigma_{+}^{*}>|\sigma_{-}^{*}|$。这种现象叫做包辛格效应。

1-1-2 关于材料的基本假设

为了简化计算，或者说，为了使计算成为可能而计算结果又便于应用，要将材料加以理想化，即在一定条件下，只计及材料的主要性质，略去其次要性质，建立所谓力学模型。实际上，材料的力学模型往往是有关力学学科分支划分的标志，它既是该门学科的研究对象，又是该门学科内容适用性的限制。例如，弹性体是一种力学模型(因为实际物体不可能是完全的弹性体)，以弹性体为研究对象的就是“弹性力学”。如果是以线弹性体为研究对象，则称为“线弹性力学”。在一般“塑性力学”(实际上是塑性静力学)中，对于材料有以下一些基本假设。这些基本假设，既规定了一般“塑性力学”的研究对象，也限制了它的应用范围。

(1) 有关材料基本性质的假设

在通常的塑性力学中，都假定材料是非粘性的，即材料的力学性质(或本构关系)与时间因素无关。材料的力学性质与时间因素的关系，即所谓材料的时间效应，表现在两个方面：一个方面是在

高速率下材料的粘性效应，这时，应力-应变关系与应变率有关，即动态应力-应变关系与静态 σ-ε 曲线显著不同。另一个方面是低速率下的粘性效应，例如，在恒应力下，应变将随时间而(缓慢)增长，最终导致断裂，这种现象称为蠕变；或者，在恒应变下，应力值随时间而减小，这种现象称为松驰。实际上，松驰是在应力按特殊规律变化情况下的蠕变。对于多数金属材料来说，在快速加载(冲击载荷)下，第一方面的粘性效应很明显；在高温下，第二方面的粘性效应很明显。因此，假定材料没有粘性效应，实际上是限于研究常温静载下金属的塑性。

另外，在通常的塑性力学中，还假定材料是无限韧性的，即认为材料可"无限地"变形而不会出现断裂。这当然也只是一种理想化模型。因此在通常的塑性力学中，就不考虑脆性断裂问题。

(2) 关于弹性和塑性的假设

在应力超过初始弹性范围后，全部卸去应力($\sigma=0$)，变形不会全部消失(图 1-2)。完全卸去应力后仍然保留的那部分应变叫残余应变。从图 1-2 可见，应力在相继弹性范围内变化时，残余应

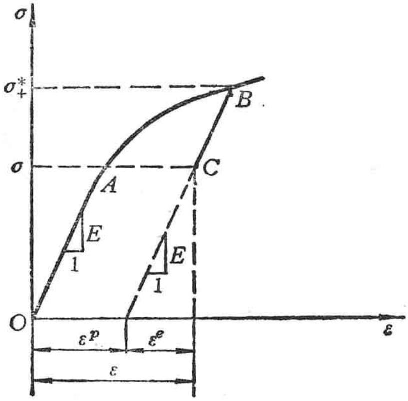


图 1-2

变的值不会改变，由此可见，残余应变是在应力到达B点(σ_+^*)时就已产生的；当应力逐渐卸去，只要应力不超出相继屈服点之外，它都保持不变。所以，残余应变实际上是总应变中不可逆的那部分应变，一般称为塑性应变。于是材料的应变一般地可分为两部分：弹性应变部分 ε^e 和塑性应变部分 ε^p，即

$$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p \tag{1-5}$$

$$d\varepsilon=d\varepsilon^e+d\varepsilon^p \tag{1-6}$$

从图 1-2 可见

$$\varepsilon^e=\sigma/E;\quad \varepsilon^p=\varepsilon-\varepsilon^e \tag{1-7}$$

$$d\varepsilon^e=d\sigma/E,\quad d\varepsilon^p=d\varepsilon-d\varepsilon^e \tag{1-8}$$

这里，我们实际上已假定在初始弹性范围和相继弹性范围内，材料的弹性性质相同，即材料的弹性与塑性互不相关，各自独立。这对于金属材料是近似正确的，但对于岩土材料则不然。

由于塑性变形在相继弹性范围内是不可逆的，不改变的，而弹性变形部分则恒与应力有单值关系，因此，当材料发生塑性变形后，应力和应变之间就不再存在单值一一对应的关系了。同一个应力可对应于不同的应变，反之亦然(图 1-3)。

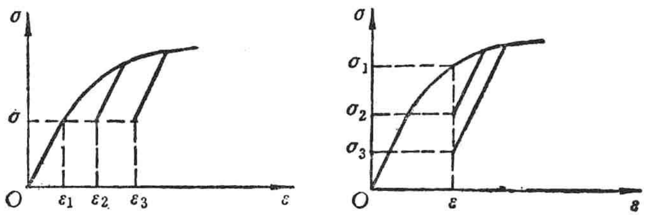


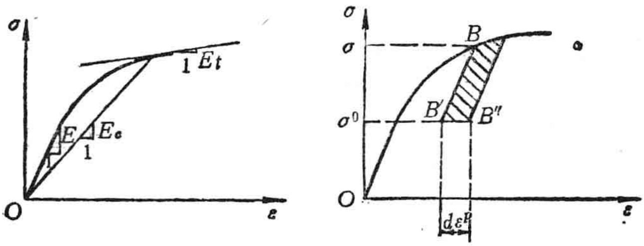
图 1-3

(3) 材料的基本不等式

根据金属材料的静态典型 σ-ε 曲线(图 1-4a)，可以看到，应有下列关系

$$E \geqslant E_c \geqslant E_t \geqslant 0 \tag{1-9}$$

E——杨氏弹性模量，E_c——割线模量，E_t——切线模量或强化模量，这表明材料是递减强化的，即 E_t 是 ε 的减函数。



(a)　　　　(b)

图 1-4

如果材料经历某一应力历史后，到达 B' 点(图 1-4b)，应力为 σ^0；然后施加某一外力，使应力加载，再又徐徐卸载，使应力回到原来的值 σ^0(一般地应变不回到原来的 B' 点)，这样的应力变化过程叫做应力循环。从图 1-4b 可见，在此应力循环过程中，若塑性应变至多只有微量的变化，则有

$$(\sigma-\sigma^0)d\varepsilon^p \geqslant 0 \tag{1-10}$$

如果 σ^0 原来就位于弹性范围的边界上($\sigma^0=\sigma$)，则有

$$d\sigma d\varepsilon^p \geqslant 0 \tag{1-11}$$

不等式(1-10)、(1-11)是杜拉克(Drucker)公设(见第四章)在一维应力状态下的特殊形式，它们是关于材料稳定性的假设。

§1-2　金属材料的塑性性质

根据以上分析，可以看到金属材料具有异于弹性的下列主要塑性特性。

1-2-1　塑性本构方程

材料发生塑性变形后，应力-应变关系不再是唯一的。当材料

处于弹性范围内时，本构关系为：

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (初始弹性范围内)$$

$$d\sigma = Ed\varepsilon \qquad (相继弹性范围内)$$

$$d\varepsilon^p = 0$$

在这里首先要判定材料是否经历过塑性变形，然后再根据应力是否位于屈服点所限的弹性范围内，采用不同的应力-应变关系。

如果应力是位于弹性范围的边界上(称材料处于塑性状态)，如图 1-5 中的 $B(\sigma=\sigma_+^*)$ 或 B' $(\sigma=\sigma_-^*)$。这时，根据应力的变化不同，应力-应变关系不同，但都只能建立增量形式的本构关系。例如，设应力位于 B 点；则当应力增大时 $(d\sigma>0)$，材料将从一个塑性状态进入相邻的新的塑性状态，这种应力变化叫做加载过程，可用下式表示

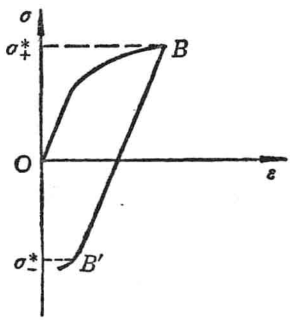


图 1-5

$$\sigma d\sigma > 0 \tag{2-1}$$

其中 $\sigma=\sigma_+^*$(如果是在 B' 点，则 $\sigma=\sigma_-^*$)。在应力加载过程中，应力应变关系为

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \tag{2-2}$$

一般地 E_t 不是常数，所以式(2-2)不是线性关系。根据式(1-6)及(1-8)，有

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E_t}$$

由此可得

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{E_p} d\sigma \tag{2-3}$$

其中

$$\frac{1}{E_p}=\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E} \tag{2-4}$$

E_p 可称为塑性模量，它是 $d\sigma$ 与 $d\varepsilon^p$ 的比值，一般地不是常数。

如果应力变化是向弹性范围内部的，使材料从塑性状态回到弹性状态，这种应力变化叫卸载过程，可用下式表示

$$\sigma d\sigma<0 \tag{2-5}$$

这时应力应变关系又为

$$d\sigma=Ed\varepsilon,\quad d\varepsilon^p=0 \tag{2-6}$$

不等式(2-1)及(2-5)分别称为加载准则和卸载准则，这只是最简单的表示形式。更一般的形式应该用屈服函数来表示[参阅式(2-10)]。

1-2-2 弹性范围的边界——屈服点

以上分析表明，在塑性力学的基本理论中，很重要的一个问题是要确定弹性范围的边界，在一维应力情况下，就是要确定屈服点。初始屈服点可以由试验一次加以确定。相继屈服点(σ_+^*, σ_-^*)则不然，它本身是与以前的变形历史有关的，不能只由瞬时的应力或应变来确定。例如，对于同一个应力值 σ，它可能是位在弹性范围的边界上，也可能位在不同的相继弹性范围之内；其相继屈服点可以是 σ_+^* 或 $\sigma_+^{*\prime}$，等等(图 1-6)。因此，只有了解了此刻以前的全部变形历史，才能确定相继屈服点，判别瞬时应力是位在某一相继弹性范围之内或在其边界上。因而相继屈服点是应力和变形历史的函数。但是，前已说明，应力在相继弹性范围内的变化（也是应力历史或变形历史的一部分）不影响相继屈服点，只当应力变化为加载过程时(塑性应变变化)，相继屈服点才改变。所以相继屈服点只

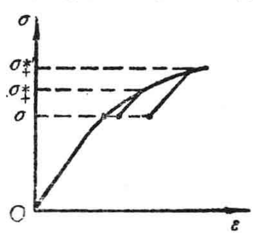


图 1-6

和与加载过程有关的那部分历史有关，这部分历史叫做材料力学性质的记录史，可用参数 H_α 表示。于是相继屈服点可写成

$$\sigma^*=\sigma^*(\sigma,\ H_\alpha)\quad 或\quad \varphi(\sigma,\ H_\alpha)=0 \tag{2-7}$$

1-2-3 强化规律、强化模型

相继屈服点的变化规律称为强化规律。确定材料的强化规律，即确定式(2-7)中的函数 $\varphi(\sigma, H_\alpha)$的具体形式。这是一个塑性力学中至今尚未很好解决的问题。下面主要介绍两种最简单的模型，也是当前较为普遍采用的模型(对复杂应力状态也是如此)。

(1) 等向强化模型

这个强化模型认为：材料如果在一个方向得到强化，则在各个方向都有同等的强化。在一维应力情况下，则有

$$\sigma_+^*\equiv|\sigma_-^*| \tag{2-8}$$

或者写成函数形式

$$\varphi(\sigma,\ H_\alpha)=\sigma^2-\sigma^{*2}=0,\ \ \sigma^{*2}\geqslant\sigma_s^2 \tag{2-9}$$

φ 称为加载函数。其中 σ^* 乃此前历史中应力在数值上曾达到过的最大值。当 $\sigma^{*2}<\sigma_s^2$ 时，取 $\sigma^{*2}=\sigma_s^2$。应当注意，σ^{*2} 为一单调增加(只增不减)的正数，它是材料力学性质记录史的一种参数。式(2-9)乃式(2-7)的具体化。而加载准则和卸载准则可分别写成：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma>0\quad(加载)\\&\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma<0\quad(卸载)\end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

这是加载准则和卸载准则的一般表达形式，可推广到复杂应力的情况。

当然，也可取塑性比功 W^p 或塑性应变强度 ε_e^p 作为记录史参数。而

$$W^p=\int_{\sigma_s}^{\sigma^*}\sigma d\varepsilon^p=\int_{\sigma_s}^{\sigma^*}\frac{\sigma d\sigma}{E_p} \tag{2-11}$$

$$\varepsilon_e^p=\int|d\varepsilon^p|$$

与此对应，加载函数可分别写为

$$\sigma^2-F(W^p)=0 \tag{2-12}$$

$$\sigma^2-g(\varepsilon_e^p)=0 \tag{2-13}$$

(2) 随动强化模型

等向强化模型完全没有考虑材料的包辛格效应，这是一个缺点；但因为它在应用中比较简单，所以仍然得到了比较多的应用。为了考虑材料因塑性变形而引起的各向异性，提出了随动强化模型。这个模型认为(图 1-7，此处假定E_t＝常数)，材料若在一个方向强化了，则在相反方向将同等地弱化。在一维应力情况下，则有

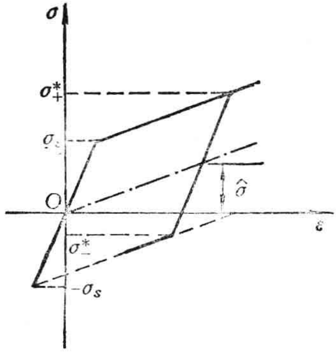


图 1-7

$$\sigma_+^*-\sigma_-^*=2\sigma_s \tag{2-14}$$

这意味着材料在塑性变形过程中，弹性范围的尺度保持不变。加载函数可写成

$$\varphi(\sigma,\ H_\alpha)=(\sigma-\hat{\sigma})^2-\sigma_s^2=0 \tag{2-15}$$

$\hat{\sigma}$ 为弹性范围的中心(点 O)在应力轴上的位移。当 E_p＝常数时，则可证明

$$\hat{\sigma}=E_p\varepsilon^p \tag{2-16}$$

式(2-15)乃式(2-7)的另一种具体形式。$\hat{\sigma}$ 或 ε^p 都可作为随动强化材料记录史的参数。

随动强化模型的缺点是将包辛格效应绝对化了，与实际材料