贵州师大学报丛刊（自然科学版）第四辑

论文选集

LUNWENXUANJI

贵州师大学报丛刊编辑部

论 文 选 集

贵州师大学报丛刊编辑部

关于三阶变系数
线性微分方程的不稳定性

廖 宗 璜

文献①用李雅普诺夫第二方法证明了特征根均具有负实部的缓变系数的渐近稳定性。本文也用李雅普诺夫第二方法给出至少有一个特征根具有正实部的三阶变系数线性微分方程不稳定性的充分条件的部分结果。

考虑方程

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+c(t)x=0 \qquad (1)$$

其中$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是 t 的实函数。

其等价系统为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt}=-c(t)x_1-b(t)x_2-a(t)x_3 \end{cases} \qquad (2)$$

假设其特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即 $$\lambda^3+a(t)\lambda^2+b(t)\lambda+c(t)=0 \qquad (3)$$

的根 $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,3)$中至少有一个具有正实部。

由于$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是t的实函数，因此如果特征方程(3)有复数根，必共轭成对。

记 $$\triangle(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$$

由根与系数的关系知：

$$-a(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)$$
$$b(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)$$
$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)$$

下面仅就$\triangle(t)\neq 0$的情形分三种情况讨论之。

ξ1．特征方程有三个具有正实部的根

定理1． 如果方程（1）满足

$1°$ $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界，其中t_0足够大；

$2°$特征方程(3)的根均具有正实部，即$Re(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0$ $(i=1,2,3)$对所有的t都成立，其中δ为与t无关的常量；

$$3° \max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta\triangle(t)}{2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1},\frac{\eta\triangle(t)}{5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1},\frac{\eta\triangle(t)}{4|a|+2|b|+4|c|+3}\right\}$$

η为常数，且$0\leqslant\eta<2$

则方程（1）的零解不稳定．

证：由条件2°设

$\lambda_i(t)\geqslant\delta>0\ (i=1,2,3)$或$\lambda_1(t)\geqslant\delta>0,Re(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0\,(i=2,3)$于是有

$$-a(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)=\lambda_1(t)+[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\geqslant 3\delta,$$

$$b(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)$$
$$=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_2(t)\lambda_3(t)\geqslant 3\delta^2,$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)\lambda_3(t)]\geqslant\delta^3,$$

$$\triangle(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)=c(t)[a(t)b(t)-c(t)]$$

$$=-\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\Big\{-[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)][\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)]+\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\Big\}$$

$$=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\Big\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\Big\}\geqslant 8\delta^6$$

应用巴尔巴欣公式②，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3$，$V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2$，

$V_{13}(t)=-ab+c$，　$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2$，

$V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2$，　$V_{33}(t)=-a-c-bc$

这里a，b，c均为t的实函数。

则$V(t;x_1,x_2,x_3)=(-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3)x_1^2+2(-a^2b-c^2-bc^2)x_1x_2+2(-ab+c)x_1x_3+(-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2)x_2^2+2(-a^2-ac-c^2)x_2x_3+(-a-c-bc)x_3^2$

$=(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2-2a^2bx_1x_2+2(-ab+c)x_1x_3-(a^3+c)x_2^2-2a^2x_2x_3-ax_3^2-c(ax_2+x_3)^2-\frac{c}{b}\left[(bx_2+cx_1)^2+(abc-c^2)x_1^2\right]-c(cx_1+bx_2)^2-\frac{c}{b}\left[(bx_3+cx_2)^2+(abc-c^2)x_2^2\right]\geqslant(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2-2a^2bx_1x_2+2(-ab+c)x_1x_3-(a^3+c)x_2^2-2a^2x_2x_3-ax_3^2$

对于任意给定的无论多么大的$\bar{t}(\bar{t}\geqslant t_0)$，考察二次型

$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=-ax_3^2-2a^2x_3x_2-(a^3+c)x_2^2+2(-ab+c)x_3x_1-2a^2bx_2x_1+(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2$

其系数行列式

$$\left|\begin{matrix} -a & -a^2 & (-ab+c) \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a^2b \\ (-ab+c) & -a^2b & (-ab^2-a^2c+bc) \end{matrix}\right|_{t=\bar{t}}$$

的主子行列式

$$-a(\bar{t})\geqslant 3\delta>0$$

$$\begin{vmatrix} -a & -a^2 \\ -a^2 & -(a^3+c) \end{vmatrix}_{t=\bar{t}}=a(\bar{t})c(\bar{t})\geqslant 3\delta^4>0$$

$$\begin{vmatrix} -a & -a^2 & (-ab+c) \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a^2b \\ (-ab+c) & -a^2b & (-ab^2-a^2c+bc) \end{vmatrix}_{t=\bar{t}}=-c(\bar{t})\Big[a(\bar{t})b(\bar{t})\cdot$$

$$c(\bar{t})-c^2(\bar{t})\Big]\geqslant 8\delta^9>0$$

根据塞尔维斯特定理③可知二次型$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$是正定的。又因为

$$V(\bar{t};x_1,x_2,x_3)\geqslant U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$$

所以函数$V(tx_1x_2x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_。)$值时，可以取正的值。

其次，由条件1°可知必存在一个$M>0$，使得

$$|a(\mathrm{t})|\leqslant M,\qquad |b(t)|\leqslant M,\qquad |c(t)|\leqslant M$$

其中M为与t无关的常数。

由此可以证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

最后证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$对于时间t的由扰动运动方程构成的全导数$\dfrac{dV}{dt}$是正定的函数。

事实上，

$$\frac{dV}{dt}=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}\cdot(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\Big[V_{11}(t)x_1\frac{dx_1}{dt}+V_{12}(t)\Big(\frac{dx_1}{dt}x_2+x_1\frac{dx_2}{dt}\Big)+V_{13}(t)\Big(\frac{dx_1}{dt}x_3+x_1\frac{dx_3}{dt}\Big)+V_{22}(t)x_2\frac{dx_2}{dt}+V_{23}(t)\Big(\frac{dx_2}{dt}x_3+x_2\frac{dx_3}{dt}\Big)+xV_{33}(t)x_3\cdot\frac{dx_3}{dt}\Big]=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}\cdot(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

$$\geqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\Big[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+|\dot V_{33}(t)|x_3^2\Big]=2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\Big[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|)x_1^2+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{33}(t)|)x_3^2\Big]\geqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\cdot\varepsilon\Big[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1)x_1^2+(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1)x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)x_3^2\Big]$$

$$\geqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\Big[\eta\triangle(t)x_1^2+\eta\triangle(t)x_2^2+\eta\triangle(t)x_3^2\Big]$$

$$=(2-\eta)\triangle(t)\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant 8(2-\eta)\delta^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$\dfrac{dV}{dt}$是正定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理②可知，方程（1）的零解不稳定。

ξ2. 特征方程有两个具有正实部的根

定理2.对于方程（1）设

1° $a(t),b(t),c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界，其中t_0足够大；

2° 特征方程(3)的根$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$满足

$$\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad -\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_5<\lambda_3(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3,4,5)$均为与t无关的常量，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3° $a(t)+c(t)+b(t)c(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

$$4°\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中$\varepsilon=\min\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\dfrac{\eta\triangle(t)}{2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1},\ \dfrac{\eta\triangle(t)}{5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1},\ \dfrac{\eta\triangle(t)}{4|a|+2|b|+4|c|+3}\right\}$

η为常数，且$0\leqslant\eta<2$

则方程(1)的零解不稳定。

证：由条件2°，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_3\delta_1\delta_5$$

$$=-\delta_1\delta_3\delta_5<0,$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0,$$

$$\lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_1+\delta_5>0,$$

$$\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>\delta_5-\delta_4>0,$$

而 $\triangle(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_1(t)$

$$[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\}$$

$$=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]$$

$$[\lambda_3(t)+\lambda_1(t)]$$

$$\therefore\triangle(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\|\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\|\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\|\lambda_3\cdot$$

$$(t)+\lambda_1(t)|>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)>0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)<-\delta_1\delta_3\delta_5<0$$

根据巴尔巴欣公式②，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)\,x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)\cdot$$

$$x_1x_3+V_{22}(t)\,x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3$,

$V_{12}(t)=-a^2b-bc^2$ $\quad V_{13}(t)=-ab+c$,

$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2$,

$V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2$, $\quad V_{33}(t)=-a-c-bc$

这里a，b，c均为t的实函数。

对于任意给定的无论多么大的$\bar{t}(\bar{t}\geqslant t_0)$，考察二次型

$$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=V_{33}(\bar{t})x_3^2+2V_{23}(\bar{t})x_3x_2+2V_{13}(\bar{t})x_3$$

$$x_1+V_{22}(\bar{t})\,x_2^2+2V_{12}(\bar{t})x_2x_1+V_{11}(\bar{t})x_1^2$$

显然其系数行列式

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}$$

的主子行列式

$$V_{33}(\bar{t})=-a(\bar{t})-c(\bar{t})-b(\bar{t})c(\bar{t})>0,$$

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=V_{33}(\bar{t})V_{22}(\bar{t})-V_{23}^2(\bar{t})=\text{定值}K,$$

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}=\Big\{-c(abc-c^2)[(a+c)^2(a^2+c^2$$

$$+1)+(b+1)^2(b^2+c^2+1)+a^2(b^2+c^2)+b^2]\Big\}\Big|_{t=\bar{t}}<0$$

根据塞尔维斯特定理③可知，$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$不是恒正型。

同理，$-U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$的系数行列式

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) & -V_{13}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) \\ -V_{13}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) & -V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}$$

的主子行列式

$$-V_{33}(\bar{t})<0$$

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=\text{定值}K,$$

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) & -V_{13}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) \\ -V_{13}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) & -V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}>0$$

所以$-U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$也不是恒正型。故所以$U(\bar{t};x_3x_2x_1)$既不是恒正型也不是恒负型。

又因为$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$的系数行列式不等于零，所以二次型$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$是满秩的，于是它可以经实满秩线性变换化为标准形式③：

$$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=A_1y_1^2+A_2y_2^2+A_3y_3^2$$

其中$A_i\neq0$ $(i=1,2,3)$

由于$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$不是恒正型，所以A_1,A_2,A_3中至少有一个为负，而$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$又不是恒负型，所以A_1，A_2,A_3中至少有一个为正，故型$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$是非定型，即$U(\bar{t};x_3x_2x_1)$是变号的。而$V(\bar{t};x_1x_2x_3)=U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$，所以$V(\bar{t};x_1,x_2,x_3)$也是变号的。由此可见，函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的$x_i$值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

又根据条件1°，可以证明，$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小

上界。

再考察$\dfrac{dV}{dt}$，类似定理1有

$$\frac{dV}{dt}\geqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[\eta\triangle(t)x_1^2+\eta\triangle(t)x_2^2+\eta\cdot\triangle(t)x_3^2]$$

$$=(2-\eta)\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)>(2-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$\dfrac{dV}{dt}$是正定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理② 可知，方程(1)的零解不稳定。

定理3，对于方程（1）设

1° $a(t),b(t),c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界，其中t_0足够大；

2°特征方程(3)的根$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\qquad \delta_3<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3)$均为与t无关的常量，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3°$a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$，对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4°$$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\triangle(t)|}{2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1},\ \frac{\eta|\triangle(t)|}{5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1},\ \frac{\eta|\triangle(t)|}{4|a|+2|b|+4|c|+3}\right\}$$

η为常数，且$0\leqslant\eta<2$

则方程(1)的零解不稳定。

证：由条件2°有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_1\delta_3\delta_3$$

$$=-\delta_1\delta_3^2<0$$

$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)>-\delta_2+\delta_3>0$，$\lambda_2(t)+\lambda_3(t)>2\delta_3>0$，$\lambda_1(t)+\lambda_3(t)>-\delta_2+\delta_3>0$，

$$\therefore\triangle(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)|$$
$$|\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$

$$<-\delta_1\delta_3^2(\delta_3-\delta_2)(2\delta_3)(\delta_3-\delta_2)$$

$$=-2\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)^2<0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)<-\delta_1\delta_3^2<0$$

根据巴尔巴欣公式②，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3$，$V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2$，

$V_{13}(t)=-ab+c$，　$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2$，

$V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2$，　$V_{33}(t)=-a-c-bc$

这里a、b、c均为t的实函数。

类似定理1和定理2可以证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界，并且在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取负的值。

再考察$\frac{dV}{dt}$：

$$\frac{dV}{dt}=\dot V_{11}(t)\,x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)$$

$$x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)\,x_3^2+2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

$$\leqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)$$

$$+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+$$

$$|\dot V_{33}(t)|x_3^2]=2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}\cdot$$

$$(t)|+|\dot V_{13}(t)|)\,x_1^2+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|)\,x_2^2+$$

$$(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{33}(t)|)x_3^2]\leqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

$$+\varepsilon[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+$$

$$3|c|+1)\,x_1^2+(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|$$

$$+|b|+6|c|+1)\,x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)\,x_3^2]$$

$$\leqslant 2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[\eta|\triangle(t)|x_1^2+\eta|\triangle(t)|x_2^2+$$

$$\eta|\triangle(t)|\,x_3^2]$$

$$=2\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[-\triangle(t)\eta(x_1^2+x_2^2+x_3^2)]$$

$$=(2-\eta)\triangle(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)<-2(2-\eta)\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)^2\cdot$$

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$\dfrac{dV}{dt}$是负定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理② 可知，方程(1)的零解不稳定。

〔注〕：在定理3中，如果条件1°，3°，4°不变，只将条件2°改为：

特征方程(3)的根$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$满足下列条件之一者：

$1)\delta_1<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<\delta_2 \qquad \lambda_1(t)<-\delta_3$

其中$\delta_i(i=1,2,3)$均为与t无关的常量，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$，或

$2)\lambda_1(t)<-\delta_1', \qquad \lambda_2(t)=p(t)+q(t)i,$

$\lambda_3(t)=p(t)-q(t)i$，且 $p(t)>\delta_2'$，$|q(t)|>\delta_3'$

其中 δ_i' $(i=1,2,3)$均为与t无关的正常数。

则完全类似定理3的证明方法可以证明方程（1）的零解不稳定。

ξ3. 特征方程有一个具有正实部的根

定理4. 对于方程（1）设

1°$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界，其中t_0足够大；

2°特征方程（3）的根$\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$满足：

$-\delta_2<\lambda_3(t)<-\delta_1$，$\delta_3<\lambda_1(t)<\delta_4$，$\lambda_2(t)<-\delta_5$

其中$\delta_i(i=1,2,3,4,5)$均为与t无关的常量，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3°$a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$，对所有的$t\geqslant t_0$都成

立；

$$4^{\circ}\max_{t_{\circ}\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中$\varepsilon=\min\limits_{t_{\circ}\leqslant t<+\infty}\left\{\dfrac{\eta\triangle(t)}{2|a|^2+1|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1},\ \dfrac{\eta\triangle(t)}{5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1},\ \dfrac{\eta\triangle(t)}{4|a|+2|b|+4|c|+3}\right\}$

η为常数，且$0\leqslant\eta<2$

则方程（1）的零解不稳定

证：由条件2°有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|>\delta_3\delta_5\delta_1=\delta_1\delta_3\delta_5>0$$

$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<\delta_4-\delta_5<0$，$\lambda_2(t)+\lambda_3(t)<-\delta_5-\delta_1<0$，

$\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>-\delta_2+\delta_3>0$

$$\therefore\ \triangle(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5-\delta_4)(\delta_5+\delta_1)(\delta_3-\delta_2)>0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)>\delta_1\delta_3\delta_5>0$$

根据巴尔巴欣公式②，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3$，$V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2$，

$V_{13}(t)=-ab+c$，$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2$，

$V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2$，$V_{33}(t)=-a-c-bc$