

贵州师大学报丛刊(自然科学版)第四辑

论文选集

LUNWENXUANJI

贵州师大学报丛刊编辑部

论 文 选 集

- (01) 特长课 由来及发展——
(02) 研究课 由来及发展——
(03) 师生课 由来及发展——
(04) 普通课 由来及发展——
(05) 教学法 由来及发展——
(06) 教育学 由来及发展——
(07) 教育心理学 由来及发展——
(08) 教育史 由来及发展——
(09) 教育哲学 由来及发展——
(10) 教育技术 由来及发展——
(11) 基础理论 由来及发展——
(12) 基本方法 由来及发展——
(13) 基本概念 由来及发展——
(14) 基本原理 由来及发展——
(15) 基本规律 由来及发展——
(16) 基本问题 由来及发展——
(17) 基本方法 由来及发展——
(18) 基本概念 由来及发展——
(19) 基本原理 由来及发展——
(20) 基本规律 由来及发展——
(21) 基本问题 由来及发展——
(22) 基本方法 由来及发展——
(23) 基本概念 由来及发展——
(24) 基本原理 由来及发展——
(25) 基本规律 由来及发展——
(26) 基本问题 由来及发展——
(27) 基本方法 由来及发展——
(28) 基本概念 由来及发展——
(29) 基本原理 由来及发展——
(30) 基本规律 由来及发展——
(31) 基本问题 由来及发展——

贵州师范大学报丛刊编辑部

$$(E) \quad 0 = (1)c + k(1)d + k^2(1)e + k^3f$$

关于三阶变系数

线性微分方程的不稳定性

廖宗璉

$$(1) \circ \delta + (2) \circ \delta + (3) \circ \delta = (4) \circ \delta$$

文献^①用李雅普诺夫第二方法证明了特征根均具有负实部的缓变系数的渐近稳定性。本文也用李雅普诺夫第二方法给出至少有一个特征根具有正实部的三阶变系数线性微分方程不稳定性的充分条件的部分结果。

考慮方程

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad (1)$$

其中 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 是 t 的实函数。

其等价系统为：

$$\begin{aligned} & \text{常数相关系数中其立如随时间变化}(s, t, i=1) 0 < s \\ & \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -c(t)x_1 - b(t)x_2 - a(t)x_3 \end{array} \right. \quad \text{其中} \end{aligned}$$

假设其特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即 $\lambda^3 + a(t)\lambda^2 + b(t)\lambda + c(t) = 0 \quad (3)$

的根 $\lambda_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) 中至少有一个具有正实部。

由于 $a(t), b(t), c(t)$ 是 t 的实函数, 因此如果特征方程 (3) 有复数根, 必共轭成对。

记 $\Delta(t) = a(t)b(t)c(t) - c^2(t)$

由根与系数的关系知:

$$-a(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)$$

$$b(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) + \lambda_3(t)\lambda_1(t)$$

$$-c(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)$$

下面仅就 $\Delta(t) \neq 0$ 的情形分三种情况讨论之。

§1. 特征方程有三个具有正实部的根

定理1. 如果方程 (1) 满足

(1) $a(t), b(t), c(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上可微有界, 其中 t_0 足够大;

(2) 特征方程 (3) 的根均具有正实部, 即 $\operatorname{Re}(\lambda_i(t)) \geq \delta > 0$ ($i=1, 2, 3$) 对所有的 t 都成立, 其中 δ 为与 t 无关的常量;

$$\text{3}^\circ \max_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \left| \frac{da(t)}{dt} \right|, \left| \frac{db(t)}{dt} \right|, \left| \frac{dc(t)}{dt} \right| \right\} < \varepsilon$$

其中 $\varepsilon = \min_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \frac{\eta \Delta(t)}{2|a|^2 + |b|^2 + 5|c|^2 + 4|ab| + 4|ac| + 2|bc| + |a| + 2|b| + 3|c| + 1}, \frac{\eta \Delta(t)}{5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|ab| + 4|bc|} \right\}$

$$\frac{0}{+ 4|ac| + 3|a| + |b| + 6|c| + 1}, \frac{0}{4|a| + 2|b| + 4|c| + 3} \}$$

η 为常数，且 $0 \leq \eta < 2$ ，
则方程(1)的零解不稳定。

证：由条件2°设

$\lambda_i(t) \geq \delta > 0$ ($i=1, 2, 3$) 或 $\lambda_1(t) \geq \delta > 0$, $Re(\lambda_i(t)) \geq \delta > 0$ ($i=2, 3$) 于是有

$$\begin{aligned} -a(t) &= \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = \lambda_1(t) + [\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] \\ &\geq 3\delta, \\ b(t) &= \lambda_1(t)\lambda_2(t) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) + \lambda_3(t)\lambda_1(t) \\ &= \lambda_1(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] + \lambda_2(t)\lambda_3(t) \geq 3\delta^2, \\ -c(t) &= \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) = \lambda_1(t)[\lambda_2(t)\lambda_3(t)] \geq \delta^3, \\ \Delta(t) &= a(t)b(t)c(t) - c^2(t) = c(t)[a(t)b(t) - c(t)] \\ &= -\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) \left\{ -[\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)][\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) + \lambda_3(t)\lambda_1(t)] \right\} \\ &= \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) \left\{ \lambda_1^2(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] + \lambda_1(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)]^2 + \lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] \right\} \geq 8\delta^6. \end{aligned}$$

应用巴尔巴欣公式②，取

$$V(t; x_1, x_2, x_3) = V_{11}(t)x_1^2 + 2V_{12}(t)x_1x_2 + 2V_{13}(t)x_1x_3 + V_{22}(t)x_2^2 + 2V_{23}(t)x_2x_3 + V_{33}(t)x_3^2$$

其中 $V_{11}(t) = -ab^2 - a^2c + bc - ac^2 - c^3$, $V_{12}(t) = -a^2b - c^2 - bc^2$,

$$V_{13}(t) = -ab + c, \quad V_{22}(t) = -a^3 - c + a^2c - bc - b^2c - ac^2,$$

$$V_{23}(t) = -a^2 - ac - c^2, \quad V_{33}(t) = -a - c - bc$$

这里 a, b, c 均为 t 的实函数。

$$\begin{aligned}
& \text{则 } V(t; x_1, x_2, x_3) = (-ab^2 - a^2c + bc - ac^2 - c^3)x_1^2 + 2(-a^2b \\
& \quad - c^2 - bc^2)x_1x_2 + 2(-ab + c)x_1x_3 + (-a^3 - c - a^2c - bc - b^2c - \\
& \quad - c^2 - ac^2)x_2^2 + 2(-a^2 - ac - c^2)x_2x_3 + (-a - c - bc)x_3^2 \\
& = (-ab^2 - a^2c + bc)x_1^2 - 2a^2bx_1x_2 + 2(-ab + c)x_1x_3 - (a^3 \\
& \quad + c)x_2^2 - 2a^2x_2x_3 - ax_3^2 - c(ax_2 + x_3)^2 - \frac{c}{b}[(bx_2 + cx_1)^2 \\
& \quad + (abc - c^2)x_1^2] - c(cx_1 + bx_2)^2 - \frac{c}{b}[(bx_3 + cx_2)^2 + \\
& \quad (abc - c^2)x_2^2] \geq (-ab^2 - a^2c + bc)x_1^2 - 2a^2bx_1x_2 + \\
& \quad 2(-ab + c)x_1x_3 - (a^3 + c)x_2^2 - 2a^2x_2x_3 - ax_3^2 =
\end{aligned}$$

{ 对于任意给定的无论多么大的 $i (i \geq t_0)$, 考察二次型

$$\begin{aligned}
(1) \quad U(i; x_3, x_2, x_1) &= -ax_3^2 - 2a^2x_3x_2 - (a^3 + c)x_2^2 + 2(-ab + c) \\
&\quad x_3x_1 - 2a^2bx_2x_1 + (-ab^2 - a^2c + bc)x_1^2
\end{aligned}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}
-a & -a^2 & (-ab + c) \\
-a^2 & -(a^3 + c) & -a^2b \\
(-ab + c) & -a^2b & (-ab^2 - a^2c + bc)
\end{vmatrix}_{t=i}$$

的主子行列式

$$-a(\bar{t}) \geq 3\delta > 0$$

上表

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} -a & -a^2 & -a \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a \\ -a & -a^2 & (-ab+c) \end{array} \right| = a(\bar{t})c(\bar{t}) \geq 3\delta^4 > 0 \\ & + \left(\frac{tx}{tb} \right)_t \left[\begin{array}{ccc} -a & -a^2 & -a \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a \\ -a & -a^2 & (-ab+c) \end{array} \right]_t = \bar{t} \left[\begin{array}{ccc} -a & -a^2 & -a \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a \\ -a & -a^2 & (-ab+c) \end{array} \right]_t = \bar{t} \left[\begin{array}{c} \frac{tx}{tb} \\ -a \\ -a^2 \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} -a^2 & -(a^3+c) & -a^2b \\ -a & -a^2 & (-ab+c) \\ -a^2b & (-ab^2-a^2c+bc) & \end{array} \right]_t = -c(\bar{t}) \left[\begin{array}{c} a(\bar{t})b(\bar{t}) \\ a(\bar{t}) \\ \frac{tx}{tb} \end{array} \right] \\ & c(\bar{t}) - c^2(\bar{t}) \geq 8\delta^9 > 0 \end{aligned}$$

根据塞尔维特定理^③可知二次型 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 是正定的。又因为

$$V(\bar{t}; x_1, x_2, x_3) \geq U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$$

所以函数 $V(tx_1x_2x_3)$ 在任意小的 x_i 值和任意大的 $t(t \geq t_0)$ 值时，可以取正的值。

其次，由条件 1° 可知必存在一个 $M > 0$ ，使得

$$|a(t)| \leq M, \quad |b(t)| \leq M, \quad |c(t)| \leq M$$

其中 M 为与 t 无关的常数。

由此可以证明 $V(t; x_1, x_2, x_3)$ 具有无穷小上界。

最后证明函数 $V(t; x_1, x_2, x_3)$ 对于时间 t 的由扰动运动方程构成的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的函数。

事实上，

$$0 < \delta \leq (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \dot{V}_{11}(t)x_1^2 + 2\dot{V}_{12}(t)x_1x_2 + 2\dot{V}_{13}(t)x_1x_3 + \dot{V}_{22}(t) \\ & (t)x_2^2 + 2\dot{V}_{23}(t)x_2x_3 + \dot{V}_{33}(t)x_3^2 + 2\left[V_{11}(t)x_1 \frac{dx_1}{dt} + \right. \\ & V_{12}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_2 + x_1 \frac{dx_2}{dt}\right) + V_{13}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_3 + x_1 \frac{dx_3}{dt}\right) + \\ & V_{22}(t)x_2 \frac{dx_2}{dt} + V_{23}(t)\left(\frac{dx_2}{dt}x_3 + x_2 \frac{dx_3}{dt}\right) + xV_{33}(t)x_3 \cdot \\ & \left.\frac{dx_3}{dt}\right] = \dot{V}_{11}(t)x_1^2 + 2\dot{V}_{12}(t)x_1x_2 + 2\dot{V}_{13}(t)x_1x_3 + \dot{V}_{22}(t) \\ & (t)x_2^2 + 2\dot{V}_{23}(t)x_2x_3 + \dot{V}_{33}(t)x_3^2 + 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ \geq & 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \left[|\dot{V}_{11}(t)x_1^2| + |\dot{V}_{12}(t)|(x_1^2 + x_2^2) \right. \\ & + |\dot{V}_{13}(t)|(x_1^2 + x_3^2) + |\dot{V}_{22}(t)|x_2^2 + |\dot{V}_{23}(t)|(x_2^2 + x_3^2) + \\ & \left. |\dot{V}_{33}(t)|x_3^2\right] = 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \left[(|\dot{V}_{11}(t)| + |\dot{V}_{12}(t)| \right. \\ & + |\dot{V}_{13}(t)|)x_1^2 + (|\dot{V}_{12}(t)| + |\dot{V}_{22}(t)| + |\dot{V}_{23}(t)|)x_2^2 + (|\dot{V}_{13}(t)| + |\dot{V}_{23}(t)| + |\dot{V}_{33}(t)|)x_3^2\right] \geq 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \\ & \varepsilon \left[(2|a|^2 + |b|^2 + 5|c|^2 + 4|a||b| + 4|a||c| + 2|b||c| + |a| + 2|b| + 3|c| + 1) \right. \\ & x_1^2 + (5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|a||b| + 4|b||c| + 4|a||c| + 3|a| + |b| + 6|c| \\ & \left. + 1) x_2^2 + (4|a| + 2|b| + 4|c| + 3) x_3^2 \right] \\ \geq & 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \left[\eta\Delta(t)x_1^2 + \eta\Delta(t)x_2^2 + \eta\Delta(t)x_3^2\right] \end{aligned}$$

$$= (2-\eta) \Delta(t) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 8(2-\eta) \delta^6 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

所以 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理②可知，方程（1）的零解不稳定。

ξ2. 特征方程有两个具有正实部的根

定理2. 对于方程（1）设

1° $a(t), b(t), c(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上可微有界，其中 t_0 足够大；

2° 特征方程(3)的根 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 满足

$$\delta_1 < \lambda_2(t) < \delta_2, \quad -\delta_4 < \lambda_1(t) < -\delta_3, \quad \delta_5 < \lambda_3(t)$$

其中 $\delta_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 均为与 t 无关的常量，且 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta_5$ ；

3° $a(t) + c(t) + b(t)c(t) < 0$ 对所有的 $t \geq t_0$ 都成立；

$$4 \max_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \left| \frac{da(t)}{dt} \right|, \left| \frac{db(t)}{dt} \right|, \left| \frac{dc(t)}{dt} \right| \right\} < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \varepsilon = \min_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \frac{\eta \Delta(t)}{2|a|^2 + |b|^2 + 5|c|^2 + 4|a||b| + 4|a||c| + 2|b||c| + |a| + 2|b| + 3|c| + 1}, \frac{\eta \Delta(t)}{5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|a||b| + 4|b||c| + 4|a||c| + 3|a| + |b| + 6|c| + 1}, \frac{\eta \Delta(t)}{4|a| + 2|b| + 4|c| + 3} \right\} \end{aligned}$$

η 为常数，且 $0 \leq \eta < 2$

则方程(1)的零解不稳定。

证：由条件2°，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) = -|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)| < -\delta_3\delta_1\delta_5$$

$$=-\delta_1\delta_3\delta_5 < 0, \quad (\text{由 } \delta_1 < 0, \delta_3 < 0, \delta_5 < 0) \quad (\text{且 } \Delta(t) =$$

$$\lambda_1(t) + \lambda_2(t) < -\delta_3 + \delta_2 = -(\delta_3 - \delta_2) < 0,$$

$$\lambda_2(t) + \lambda_3(t) > \delta_1 + \delta_5 > 0,$$

$$\lambda_3(t) + \lambda_1(t) > \delta_5 - \delta_4 > 0,$$

而 $\Delta(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) \{ \lambda_1^2(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] + \lambda_1(t)$

$$\begin{aligned} & [\lambda_2(t) + \lambda_3(t)]^2 + \lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] \\ & = \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_1(t) + \lambda_2(t)][\lambda_2(t) + \lambda_3(t)] \\ & [\lambda_3(t) + \lambda_1(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta(t) &= |\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)|[\lambda_1(t) + \lambda_2(t)][\lambda_2(t) + \lambda_3(t)][\lambda_3(t) \\ & + \lambda_1(t)] > \delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3 - \delta_2)(\delta_1 + \delta_5)(\delta_5 - \delta_4) > 0 \\ -c(t) &= \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) < -\delta_1\delta_3\delta_5 < 0 \end{aligned}$$

根据巴尔巴欣公式^②，取

$$V(t; x_1, x_2, x_3) = V_{11}(t)x_1^2 + 2V_{12}(t)x_1x_2 + 2V_{13}(t)x_1x_3 +$$

$$x_1x_3 + V_{22}(t)x_2^2 + 2V_{23}(t)x_2x_3 + V_{33}(t)x_3^2$$

其中 $V_{11}(t) = -ab^2 - a^2c + bc - ac^2 - c^3,$

$$V_{12}(t) = -a^2b - bc^2, \quad V_{13}(t) = -ab + c,$$

$$V_{22}(t) = -a^3 - c - a^2c - bc - b^2c - ac^2,$$

$$V_{23}(t) = -a^2 - ac - c^2, \quad V_{33}(t) = -a - c - bc$$

这里 a, b, c 均为 t 的实函数。

对于任意给定的无论多么大的 $i (i \geq t_0)$ ，考察二次型

$$U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1) = V_{33}(\bar{t})x_3^2 + 2V_{23}(\bar{t})x_2x_3 + 2V_{13}(\bar{t})x_1x_3 +$$

$$x_1 + V_{22}(\bar{t})x_2^2 + 2V_{12}(\bar{t})x_1x_2 + V_{11}(\bar{t})x_1^2$$

显然其系数行列式

左氏春秋注疏

$$A_{\text{直角}} = \begin{vmatrix} V_{33}(\bar{z}) & V_{23}(\bar{z}) & V_{13}(\bar{z}) \\ V_{32}(\bar{z}) & V_{22}(\bar{z}) & V_{12}(\bar{z}) \\ V_{31}(\bar{z}) & V_{21}(\bar{z}) & V_{11}(\bar{z}) \end{vmatrix}$$

的主子行列式 $V(i_1, i_2, \dots, i_k) = V - (i_1)_{k+1}V + (i_2)_{k+1}V - (i_3)_{k+1}V + \dots$

$$V_{3,3}(\bar{z}) = -a(\bar{z}) - c(\bar{z}) - b(\bar{z})c(\bar{z}) > 0 \text{ ,}$$

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{z}) & V_{23}(\bar{z}) \\ V_{23}(\bar{z}) & V_{22}(\bar{z}) \end{vmatrix} = V_{33}(\bar{z})V_{22}(\bar{z}) - V_{23}^2(\bar{z}) = \text{定值} K,$$

因此，如果在某一個時間點上， $V_{23}(t) = V_{22}(t)$ ，則五個景不動。

$$\begin{vmatrix} V_{3,3}(\bar{z}) & V_{2,3}(\bar{z}) & V_{1,3}(\bar{z}) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & V_{2,3}(i) & V_{2,2}(i) & V_{1,2}(i) \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} -c(abc-c^2)[(a+c)^2(a^2+c^2)] \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} V_{13}(\bar{z}) & V_{12}(\bar{z}) & V_{11}(\bar{z}) \end{vmatrix} \quad : \text{②左端點補充}$$

$$+1)+(b+1)^2(b^2+c^2+1)+a^2(b^2+c^2)+b^2\} < 0$$

至中 tA , tK , t_1A 均被 t 压重且不 (x_1,x_2,x_3) 于 t

根据塞尔维斯特定理^③可知, $U(\bar{t}; \bar{x_3}, x_2, x_1)$ 不是恒正型。

同理, $-U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 的系数行列式

$$-V_{1,1}(\tilde{\tau}) \leq -V_{1,2}(\tilde{\tau}) \leq -V_{1,3}(\tilde{\tau})$$

$$-V_{23}(\bar{t}) \quad -V_{22}(\bar{t}) \quad -V_{12}(\bar{t})$$

$$\begin{vmatrix} -V_{13}(\bar{z}) & -V_{12}(\bar{z}) & -V_{11}(\bar{z}) \end{vmatrix}$$

的主子行列式

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & 0 \\ -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix} = \text{定值 } K,$$

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) & -V_{13}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) \\ -V_{13}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) & -V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix} > 0$$

所以 $-U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 也不是恒正型。故所以 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 既不是恒正型也不是恒负型。

又因为 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 的系数行列式不等于零，所以二次型 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 是满秩的，于是它可以经实满秩线性变换化为标准形式③：

$$U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1) = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2$$

其中 $A_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3$)

由于 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 不是恒正型，所以 A_1, A_2, A_3 中至少有一个为负，而 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 又不是恒负型，所以 A_1, A_2, A_3 中至少有一个为正，故型 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 是非定型，即 $U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ 是变号的。而 $V(\bar{t}; x_1 x_2 x_3) = U(\bar{t}; x_3, x_2, x_1)$ ，所以 $V(\bar{t}; x_1, x_2, x_3)$ 也是变号的。由此可见，函数 $V(t; x_1, x_2, x_3)$ 在任意小的 x_i 值和任意大的 t ($t \geq t_0$) 值时，可以取正的值。

又根据条件1°，可以证明， $V(t; x_1, x_2, x_3)$ 具有无穷小

上界。

再考察 $\frac{dV}{dt}$, 类似定理 1 有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\geq 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - [\eta\Delta(t)x_1^2 + \eta\Delta(t)x_2^2 + \eta \\ &\quad \Delta(t)x_3^2] \end{aligned}$$

$$= (2-\eta)\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) > (2-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3 - \delta_2)$$

$$+ (\delta_1 + \delta_5)(\delta_5 - \delta_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (\delta_1 + \delta_5)\Delta(t)$$

所以 $\frac{dV}{dt}$ 是正定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理②可知，方程(1)的零解不稳定。

定理 3. 对于方程(1)

1° $a(t), b(t), c(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上可微有界，其中 t_0 足够大；

2° 特征方程(3)的根 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 满足

$$-\delta_2 < \lambda_1(t) < -\delta_1, \quad \delta_3 < \lambda_2(t) \leq \lambda_3(t)$$

其中 $\delta_i (i=1, 2, 3)$ 均为与 t 无关的常量，且 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3$ ；

3° $a(t) + b(t)c(t) > 0$, 对所有的 $t \geq t_0$ 都成立；

$$4° \max_{t_0 \leq t \leq +\infty} \left\{ \left| \frac{da(t)}{dt} \right|, \left| \frac{db(t)}{dt} \right|, \left| \frac{dc(t)}{dt} \right| \right\} < \varepsilon$$

$$\text{其中 } \varepsilon = \min_{t_0 \leq t \leq +\infty} \left\{ \frac{\eta|\Delta(t)|}{2|a|^2 + |b|^2 + 5|c|^2 + 4|a||b| + 4|a||c| + 2|b||c| + |a| + 2|b| + 3|c| + 1}, \frac{\eta|\Delta(t)|}{5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|a||b| + 4|b||c| + 4|a||c| + 3|a| + |b| + 6|c| + 1}, \frac{\eta|\Delta(t)|}{4|a| + 2|b| + 4|c| + 3} \right\}$$

η 为常数，且 $0 \leq \eta < 2$
则方程(1)的零解不稳定。

证：由条件 2° 有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) = -|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)| < -\delta_1\delta_2\delta_3 \\ = -\delta_1\delta_3^2 < 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) + \lambda_2(t) &> -\delta_2 + \delta_3 > 0, \quad \lambda_2(t) + \lambda_3(t) > 2\delta_3 > 0, \\ \lambda_1(t) + \lambda_3(t) &> -\delta_2 + \delta_3 > 0, \\ \therefore \Delta(t) &= -|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)| |\lambda_1(t) + \lambda_2(t)| |\lambda_2(t) + \lambda_3(t)| \\ &\quad |\lambda_3(t) + \lambda_1(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< -\delta_1\delta_3^2(\delta_3 - \delta_2)(2\delta_3)(\delta_3 - \delta_2) \\ &= -2\delta_1\delta_3^2(\delta_3 - \delta_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

$$-c(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) < -\delta_1\delta_3^2 < 0$$

根据巴尔巴欣公式②)，取

$$V(t; x_1, x_2, x_3) = V_{11}(t)x_1^2 + 2V_{12}(t)x_1x_2 + 2V_{13}(t)x_1x_3 + V_{22}(t)x_2^2 + 2V_{23}(t)x_2x_3 + V_{33}(t)x_3^2$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } V_{11}(t) &= -ab^2 - a^2c + bc - ac^2 - c^3, \quad V_{12}(t) = -a^2b - c^2 - bc^2, \\ V_{13}(t) &= -ab + c, \quad V_{22}(t) = -a^3 - c - a^2c - bc - b^2c - ac^2, \\ V_{23}(t) &= -a^2 - ac - c^2, \quad V_{33}(t) = -a - c - bc \end{aligned}$$

这里 a, b, c 均为 t 的实函数。

类似定理 1 和定理 2 可以证明函数 $V(t; x_1, x_2, x_3)$ 具有无穷小上界，并且在任意小的 x_i 值和任意大的 $t (t \geq t_0)$ 值时，可以取负的值。

再考察 $\frac{dV}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}_{11}(t)x_1^2 + 2\dot{V}_{12}(t)x_1x_2 + 2\dot{V}_{13}(t)x_1x_3 + \dot{V}_{22}(t)$$

$$x_2^2 + 2\dot{V}_{23}(t)x_2x_3 + \dot{V}_{33}(t)x_3^2 + 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\leq 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [|\dot{V}_{11}(t)|x_1^2 + |\dot{V}_{12}(t)|(x_1^2 + x_2^2) +$$

$$+ |\dot{V}_{13}(t)|(x_1^2 + x_3^2) + |\dot{V}_{22}(t)|x_2^2 + |\dot{V}_{23}(t)|(x_2^2 + x_3^2) +$$

$$|\dot{V}_{33}(t)|x_3^2] = 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [(\dot{V}_{11}(t) + \dot{V}_{22}(t) +$$

$$+ \dot{V}_{13}(t))x_1^2 + (\dot{V}_{12}(t) + \dot{V}_{23}(t) + \dot{V}_{33}(t))x_2^2 +$$

$$(\dot{V}_{13}(t) + \dot{V}_{23}(t) + \dot{V}_{33}(t))x_3^2] \leq 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$+ \varepsilon[(2|a|^2 + |b|^2 + 5|c|^2 + 4|a||b| + 4|a||c| + 2|b||c| + |a| + 2|b| +$$

$$3|c| + 1)x_1^2 + (5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|a||b| + 4|b||c| + 4|a||c| + 3|a|$$

$$+ |b| + 6|c| + 1)x_2^2 + (4|a| + 2|b| + 4|c| + 3)x_3^2]$$

$$\leq 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [\eta\Delta(t)x_1^2 + \eta\Delta(t)x_2^2 +$$

$$\eta|\Delta(t)|x_3^2]$$

$$= 2\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + [-\Delta(t)\eta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]$$

$$= (2-\eta)\Delta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < -2(2-\eta)\delta_1\delta_3^3(\delta_3 - \delta_2)^2$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \text{ 依 } 0 < \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

所以 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的。根据非定常运动的李雅普诺夫的不稳定定理^②可知，方程(1)的零解不稳定。

[注]：在定理3中，如果条件1°，3°，4°不变，只将条件2°改为：

特征方程(3)的根 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 满足下列条件之一者：

$$1) \delta_1 < \lambda_2(t) \leq \lambda_3(t) < \delta_2, \quad \lambda_1(t) < -\delta_3,$$

其中 $\delta_i (i=1, 2, 3)$ 均为与 t 无关的常量，且 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3$ ，

或

$$2) \lambda_1(t) < -\delta'_1, \quad \lambda_2(t) = p(t) + q(t)i,$$

$$\lambda_3(t) = p(t) - q(t)i, \text{ 且 } p(t) > \delta'_2, \quad |q(t)| > \delta'_3$$

其中 $\delta'_i (i=1, 2, 3)$ 均为与 t 无关的正常数。

则完全类似定理3的证明方法可以证明方程(1)的零解不稳定。

ξ3. 特征方程有一个具有正实部的根

定理4. 对于方程(1)设

1° $a(t), b(t), c(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上可微有界，其中 t_0 足够大；

2° 特征方程(3)的根 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 满足：

$$-\delta_2 < \lambda_3(t) < -\delta_1, \quad \delta_3 < \lambda_1(t) < \delta_4, \quad \lambda_2(t) < -\delta_5$$

其中 $\delta_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 均为与 t 无关的常量，且 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta_5$ ；

3° $a(t) + c(t) + b(t)c(t) > 0$ ，对所有的 $t \geq t_0$ 都成

立：

$$\max_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \left| \frac{da(t)}{dt} \right|, \left| \frac{db(t)}{dt} \right|, \left| \frac{dc(t)}{dt} \right| \right\} < \varepsilon$$

其中 $\varepsilon = \min_{t_0 \leq t < +\infty} \left\{ \frac{\eta \Delta(t)}{2|a|^2 + 1|b|^2 + 5|c|^2 + 4|a||b| + 4|a||c| + 2|b||c| + |a| + |b| + 3|c| + 1}, \frac{\eta \Delta(t)}{5|a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 + 2|a||b| + 4|b||c| + 4|a||c| + 3|a| + |b| + 6|c| + 1}, \frac{\eta \Delta(t)}{4|a| + 2|b| + 4|c| + 3} \right\}$

η 为常数，且 $0 \leq \eta < 2$

则方程 (1) 的零解不稳定

证：由条件 2° 有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) = |\lambda_1(t)|\lambda_2(t)|\lambda_3(t)| > \delta_3\delta_5\delta_1$$

$$= \delta_1\delta_3\delta_5 > 0$$

$$\lambda_1(t) + \lambda_2(t) < \delta_4 - \delta_5 < 0, \quad \lambda_2(t) + \lambda_3(t) < -\delta_5 - \delta_1 < 0,$$

$$\lambda_3(t) + \lambda_1(t) > -\delta_2 + \delta_3 > 0$$

$$\therefore \Delta(t) = |\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)|\lambda_1(t) + \lambda_2(t)|\lambda_2(t) + \lambda_3(t)|$$

$$|\lambda_3(t) + \lambda_1(t)| > \delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5 - \delta_4)(\delta_5 + \delta_1)(\delta_3 - \delta_2) > 0$$

$$-\epsilon(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) > \delta_1\delta_3\delta_5 > 0$$

根据巴尔巴欣公式②，取

$$V(t; x_1, x_2, x_3) = V_{11}(t)x_1^2 + 2V_{12}(t)x_1x_2 + 2V_{13}(t)x_1x_3$$

$$+ V_{22}(t)x_2^2 + 2V_{23}(t)x_2x_3 + V_{33}(t)x_3^2$$

其中 $V_{11}(t) = -ab^2 - a^2c + bc - ac^2 - c^3, \quad V_{12}(t) = -a^2b - c^2 - bc^2,$

$$V_{13}(t) = -ab + c, \quad V_{22}(t) = -a^3 - c - a^2c - bc - b^2c - ac^2,$$

$$V_{23}(t) = -a^2 - ac - c^2, \quad V_{33}(t) = -a - c - bc$$