

固体物理译丛

——问题和习题解答

(下 册)

河 北 师 范 大 学

一 九 八 四 年 八 月

9

铁磁性、反铁磁性和亚铁磁性

9.1 磁化强度由下式给出

$$M = N\mu L(y), \quad (9.1.1)$$

式中, $L(y) = \coth y - 1/y$; $y = \mu H_T/kT$, μ 为原子磁偶极矩, H_T 为作用在一个磁偶极子上的总磁场。根据外斯 (Weiss) 的铁磁性分子场理论, 假设

$$H_T = H + N_w M,$$

式中, $H_m = N_w M$ 是内场, 也称为分子场、外斯场或交换场, N_w 是分子场常数。铁磁体在 $T < T_c$ 时存在自发磁化, 我们可以令 $H = 0$ 。于是有

$$y = \frac{\mu N_w M(T)}{kT}. \quad (9.1.2)$$

若我们定义 $M(0) = N\mu$, 则 (9.1.1) 和 (9.1.2) 式可分别写成

$$\frac{M(T)}{M(0)} = L(y)$$

和

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{kT}{\mu^2 N N_w} y$$

此两方程可用图解法求解, 即由图9.1.1中的两种 $M(T)/M(0)$ 对 y 曲线的交点决定 $M(T)$ 。

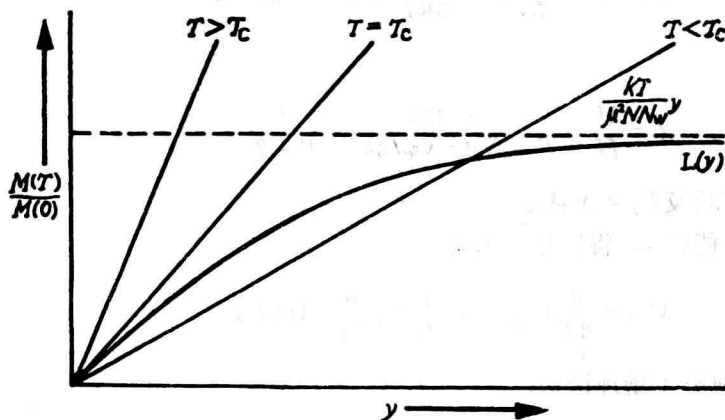


图9.1.1

当 $T < T_c$ 时, 存在两个可能的解, 即 $M(T)/M(0) = 0$ 和 $M(T)/M(0) \neq 0$. 用 U_0 表示不存在任何磁化时的内能. 当存在磁化时, 内能变为

$$U_0 - \int_0^M H_m dM = U_0 - \frac{1}{2} N_w [M(T)]^2.$$

因为磁化状态具有较低的内能, 在 $0 < T < T_c$ 温度范围内,

$$M(T)/M(0) \neq 0$$

是稳定的态。

与曲线相切的那条直线对应的温度称为居里温度, 切点是在 $y = 0$ 处, 在该点 $M(T) = 0$. 当 $y \ll 1$ 时,

$$L(y) \simeq \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} +$$

让两曲线的斜率在 $y = 0$ 处相等, 便可求得

$$T_c = \frac{\mu^2 N}{3k} N_w.$$

于是, 我们可写出

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \left(\frac{T}{3T_c} \right) y.$$

在 T_c 附近, $y \rightarrow 0$, 由此得出在此区域内,

$$\left[\frac{M(T)}{M(0)} \right]^2 = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

在顺磁性区域, $T > T_c$, y 较小. 因此

$$M(T) = \frac{N\mu}{3} y = \frac{N\mu^2}{3kT} (H + N_w M).$$

于是得磁化率

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N\mu^2/3k}{T - N\mu^2 N_w/3k} = \frac{C}{T - T_c}.$$

式中, $C = N\mu^2/3k$ 及 $T_c = N_w C$.

9.2 通过内能 U_{sp} , 将比热表示为

$$C_{sp} = \frac{d}{dT} U_{sp} = - \frac{1}{2} N_w \frac{d}{dT} [M(T)]^2.$$

由铁磁性的半经典分子场理论知,

† 原文为 $L(y) \simeq \frac{y}{3} - \frac{y^3}{15}$. 校注。

$$M(T)/M(0) = B_J(x),$$

式中, $B_J(x)$ 是布里渊 (Brillouin) 函数:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J}$$

及

$$x = \frac{Jg\mu_B}{kT} (H + N_w M).$$

通过类似于解9.1题的步骤, 我们得到

$$M(0) = Ng\mu_B J,$$

$$T_c = \frac{Ng^2\mu_B^2 J(J+1)}{3k} N_w,$$

和

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{J+1}{3J} \left(\frac{T}{T_c} \right) x.$$

利用这些表示式, 可将比热写成

$$C_{s,p} = - \frac{3JNk}{2(J+1)} \frac{d[M(T)/M(0)]^2}{d(T/T_c)}.$$

当 $J=1/2$ 和 $g=2$ 时,

$$C_{s,p} = - \frac{1}{2} Nk \frac{d[M(T)/M(0)]^2}{d(T/T_c)}.$$

此外还有

$$M(T)/M(0) = \tanh x$$

和

$$M(T)/M(0) = \frac{T}{T_c} x.$$

于是我们有

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \tanh \left[\frac{M(T)/M(0)}{T/T_c} \right].$$

然后, 可直接计算出 $\frac{d[M(T)/M(0)]^2}{d(T/T_c)}$. 这样, 便得到所要求的 $C_{s,p}$ 的表示式.

当 $T \simeq T_c$ 时, 为得到 $M(T)/M(0)$, 可展开 $\tanh \left[\frac{M(T)/M(0)}{T/T_c} \right]$, 得

$$M(T)/M(0) = \frac{M(T)/M(0)}{T/T_c} - \frac{1}{3} \left[\frac{M(T)/M(0)}{T/T_c} \right]^3 + \dots$$

因为 $(T/T_c)^2 \simeq 1$, 上式右边取至第二项, 得

$$\left[\frac{M(T)}{M(0)} \right]^2 = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \simeq 3 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

然后, 将它代入 C_{sp} 的精确表示式, 得

$$C_{sp} = \frac{3}{2} \left(3 - \frac{2T_c}{T} \right) Nk.$$

注意, 当温度远低于 T_c 时, 此方程的近似程度将很差。

9.3 交换哈密顿可以写成

$$H = -2J_e \sum \left[\frac{1}{2} (S_i + S_j^- + S_i^- S_j^+) + S_{zi} S_{zj} \right],$$

式中, $S^\pm = S_x \pm iS_y$. 注意,

$$S^+ |\chi_\beta\rangle = 1 |\chi_\alpha\rangle,$$

$$S^- |\chi_\alpha\rangle = 1 |\chi_\beta\rangle,$$

$$S_z |\chi_\alpha\rangle = \frac{1}{2} |\chi_\alpha\rangle$$

及

$$S_z |\chi_\beta\rangle = -\frac{1}{2} |\chi_\beta\rangle.$$

首先, 我们来考虑那些不要对反向自旋 w 作运算的项。于是有

$$\frac{1}{2} (S_i + S_j^- = S_i^- S_j^+) \chi_w = 0$$

和

$$-2J_e \sum S_{zi} S_{zj} \chi_w = -\frac{1}{4} J_e Z (N-2) \chi_w \quad (i, j \neq w),$$

式中, Z 为最近邻数 (这儿, $Z = 2$), 附加的因子 $1/2$ 是考虑到原子对之间的相互作用只应计及一次。对于 $i = w$ 的那些项, 我们求得

$$-2J_e \sum_{K=1}^Z \frac{1}{2} (S_w^+ S_{w+K}^- + S_w^- S_{w+K}^+) \chi_w = -J_e \sum_{K=1}^Z \chi_{w+K}$$

式中, χ_{w+K} 是第 $(w+K)$ 个自旋反向而第 w 个自旋向上的波函数, 此外还有

$$-2J_e \sum_{K=1}^Z S_{zw} S_{z(w+K)} \chi_w = \frac{1}{2} Z J_e \chi_w.$$

因此, 当 X 是一个本征函数时, 应有

$$\sum_{W=1}^N c_W \left[E + \frac{1}{2} (N-4) J_e \right] X_W + J_e \sum_{W=1}^N c_W (X_{W-1} + X_{W+1}) = 0. \quad (9.3.1)$$

因为周期性边界条件要求 $c_{W+N} = c_W$, 故后一个求和可以写成 $J_e \sum_{W=1}^N (c_{W+1} + c_{W-1}) X_W$. 显然, 只要对一切 w 有:

$$c_W \left[E + \frac{1}{2} (N-4) J_e \right] + J_e (c_{W+1} + c_{W-1}) = 0, \quad (9.3.2)$$

则 (9.3.1) 式成立.

此递推关系式有解

$$c_W = \exp(ikwa),$$

式中, k 是波矢 (数), a 是相邻自旋间的距离. 周期性边界条件要求 k 的取值满足下式:

$$kaN/2\pi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2.$$

将 c_W 代入递推关系 (9.3.2) 式, 得

$$E + \frac{1}{2} (N-4) J_e + 2J_e \cos ka = 0.$$

当 k 值很小时, 我们求得的自旋波色散关系为

$$E - E_0 = J_e k^2 a^2,$$

式中, $E_0 \left(= -\frac{1}{2} NJ_e \right)$ 是基态能量.

9.4 本题可用几种不同的方法求解, 我们所采用的方法物理图象较清晰. 与自旋 S_i 相联系的角动量为 $G = \hbar S_i$. 当只有交换力作用时, 一个具有磁矩 μ_i 的原子的哈密顿为

$$H_i = -2J_e S_i \cdot \sum_j S_j = -g\mu_B S_i \cdot \left[\frac{2J_e}{\gamma \hbar} \sum_j S_j \right] = -\mu_j \cdot H_e$$

式中,

$$H_e = \frac{2J_e}{\gamma \hbar} \sum_j S_j$$

为等效交换场. 因为作用在磁矩上的力矩等于 $\mu_j \times H_e$, 我们最后得到

$$\frac{d(\hbar S_i)}{dt} = 2J_e S_i \times \sum_j S_j.$$

我们选择一个位于 $y-z$ 平面的自旋 S_i 作参考自旋,

$$S_i = S \sin \theta j + S \cos \theta k.$$

则直线链上的最近邻, S_{i-1} 和 S_{i+1} , 将相对于 S_i 分别绕 z 轴进动一个角度 $-ka$ 和 $+ka$. 所以有

$$S_{i+1} = -S \sin \theta \sin kai + S \sin \theta \cos kaj + S \cos \theta k$$

和

$$S_{i-1} = S \sin \theta \sin kai + S \sin \theta \cos kaj + S \cos \theta k.$$

若 ω 为进动角速度, 则运动方程为†

$$\hbar \omega \rho i = 4J_e S^2 \sin \theta \cos \theta (1 - \cos ka) i.$$

当 k 很小时, $\cos ka \simeq 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2$, 上式近似为

$$\hbar \omega \rho = 2J_e S^2 k^2 a^2 \sin \theta \cos \theta.$$

又因为 $\sin \theta = \rho/S$, $\cos \theta \simeq 1$ 以及 $S = 1/2$, 所以

$$\hbar \omega = J_e k^2 a^2.$$

9.5 在二维情况下, 在 k 至 $k+dk$ 之间的状态数为

$$C(k)dk = \frac{2\pi k dk V}{(2\pi)^2}.$$

对于 $E_k = J_e k^2 a^2$ 的自旋波 (见 9.3 和 9.4 题), 有

$$C(E_k) dE_k = \frac{V}{4\pi J_e a^2} dE_k.$$

在温度为 T 时激发的自旋波平均数 $\bar{n}$ 为

$$\bar{n} = \int_0^\infty \bar{n}_k C(E_k) dE_k, \quad (9.5.1)$$

式中, $\bar{n}_k$ 是温度为 T 时波矢为 k 的自旋波平均数. 因为自旋波 (spin-wave) 或自旋波量子 (magnon) 气遵从玻色-爱因斯坦统计, 而且是完全简并化的, 分布律为

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(E_k/kT) - 1},$$

代入 (9.5.1) 式, 得

$$\bar{n} = \frac{V k T}{4\pi J_e a^2} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1},$$

式中 $x = E_k/kT$. 积分††

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = -[x - \ln(e^x - 1)]_0^\infty$$

† 原文为 $\hbar \omega \rho i = 2S^2 \sin \theta \cos \theta (1 - \cos ka) i$. —译注.

†† 原文等式右边漏了一个负号. —译注.

在积分下限处发散。由激发自旋波引起自发磁化强度的变化 ΔM 恰好是

$$n/N = \Delta M/M(0).$$

式中 N 为原子磁偶极子的数目。显然, $n \rightarrow \infty$ 意味着 $M(0) \rightarrow 0$ 从而不可能出现铁磁性。

9.6 磁化强度等于 μ_B 乘以自旋平行与反平行的电子数之差, 即⁺

$$M = \mu_B \int \{ F[E(k) - \xi N_w N \mu_B^2] - F[E(k) + \xi N_w N \mu_B^2] \} \frac{C(E)}{V} dE.$$

式中, $F(E)$ 是费密—狄拉克分布函数

$$F(E) = \frac{1}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1},$$

E_F 为不存在磁相互作用的费密能级, $2C(E)dE$ 为 $E \rightarrow E + dE$ 能量范围内电子气的状态数

$$2C(E)dE = \frac{2V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE,$$

此外, $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m^*$.

在 $T = 0K$ 时,

$$F(E) = 1 \quad \text{当 } E < \xi N N_w \mu_B^2 + E_F,$$

$$F(E) = 0 \quad \text{当 } E > \xi N N_w \mu_B^2 + E_F.$$

因而

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_B}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\int_0^{E_F + \xi N N_w \mu_B^2} E^{1/2} dE - \int_0^{E_F - \xi N N_w \mu_B^2} E^{1/2} dE \right) \\ &= \frac{\mu_B}{6\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} [(E_F + \xi N N_w \mu_B^2)^{3/2} - (E_F - \xi N N_w \mu_B^2)^{3/2}]. \end{aligned}$$

为方便起见, 在着手寻找题中所要求的条件之前, 引入下述表示法:

$$K\theta' = N N_w \mu_B^2$$

和

$$C(E)dE = bE^{1/2}dE,$$

式中 b 为常数。当不存在磁相互作用时, 费密能级由下述条件确定:

$$N = 2 \int_0^{E_F} C(E)dE = \frac{4}{3} b E_F^{3/2}.$$

于是有

$$b = \frac{3}{4} N E_F^{-3/2}.$$

式中 N 是体系中3d电子的数目。

⁺ 原文中, 被积函数的后一因子为 $C(E)/2V$ 。——译注。

首先, 考虑费密能级 E_F 以下的一切态均被数目相等的自旋向上和向下的电子填充 (参看图9.6.1a)。若倒转一些向下的自旋将导致体系总能量降低, 则体系是铁磁性的。每个被倒转自旋的电子, 其能量增加 Δ , 如图9.6.1b所示。倒转的电子数目为

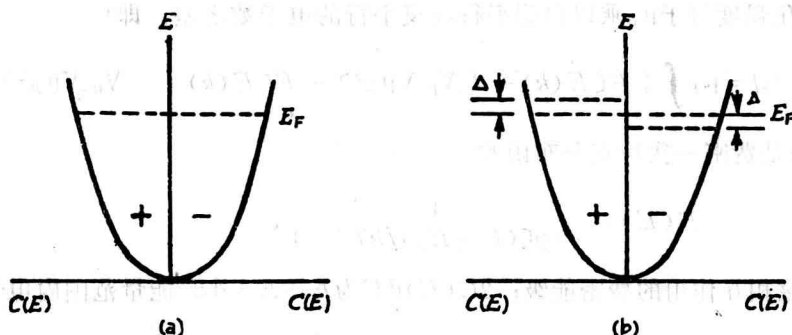


图9.6.1

$$n = C(E_F) \Delta = b E_F^{1/2} \Delta,$$

增加的能量为

$$n \Delta = C(E_F) \Delta^2.$$

总磁化强度还下式给出:

$$M = 2n\mu_B = 2\mu_B C(E_F) \Delta.$$

因为分子场等于 $\frac{k\theta'}{N\mu_B} M$, 故体系的磁能改变为

$$F_e = -\frac{1}{2} M \left(\frac{k\theta'}{N\mu_B} M \right) = -2 \frac{k\theta'}{N} [C(E_F)]^2 \Delta^2.$$

若出现铁磁性, 上述两能量改变量之和必须是负的, 即应满足

$$C(E_F) \Delta^2 - 2 \frac{k\theta'}{N} [C(E_F)]^2 \Delta^2 < 0,$$

或

$$\frac{k\theta'}{E_F} > \frac{2}{3}.$$

即使体系是铁磁性的, 未必能得出基态是饱和的结论, 亦即, 不一定满足 $M = N\mu_B$ ($\zeta = 1$)。我们来考虑除一个自旋向下外其余的自旋均向上的态, 能量低于 E_{max} 的所有向上自旋态被填充, 若倒转那个向下的自旋会使体系能量降低, 则基态便是饱和的。为倒转那个向下的自旋, 必须提升能量 E_{max} 。 E_{max} 由下式确定:

$$N = \int_0^{E_{max}} C(E) dE.$$

结果为

$$E_{\text{max}} = 2^{2/3} E_F.$$

因为是在场 $k\theta'/\mu_B$ 中反转那个向下的自旋, 故磁能的变化为

$$F_e = -2\mu_B \left(\frac{k\theta'}{\mu_B} \right) = -2k\theta'.$$

由此可知, 若总能量变化为负的, 即

$$2^{2/3} E_F - 2k\theta' < 0,$$

或

$$\frac{k\theta'}{E_F} > 2^{-1/3} \quad (= 0.794),$$

则基态将是饱和的。

9.7 设 M_d 和 M_c 分别为 3d 和 4s 电子对磁化强度的贡献, H_d 和 H_c 分别为 3d 和 4s 电子上的有效场。为方便起见, 考虑外加磁场 H 。采用分子场近似, 有

$$H_d = H + N_w M_c$$

和

$$H_c = H + N_w M_d.$$

按题意, M_d 遵从居里定律,

$$M_d/H_d = C/T,$$

传导电子的泡利磁化率为

$$\frac{M_c}{H_c} = \chi_{\text{para}} \left(= \frac{3}{2} \frac{N\mu_B^2}{E_F} \right).$$

利用上述几式得

$$T M_d = C(H + N_w M_c)$$

和

$$M_c = \chi_{\text{para}} (H + N_w M_d).$$

为了使 M_c 和 M_d 在 $H = 0$ 时有非平凡解, 其系数行列式必须等于零, 即

$$\begin{vmatrix} T_c & -CN_w \\ -\chi_{\text{para}} N_w & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

由此得

$$T_c = \chi_{\text{para}} C N_w^2.$$

9.8 假设每个粒子具有自旋 1/2。对于 $S = 1$, $M_s = -1$ 、0 和 $+1$ 的态, 能量分别为 $c + 2\mu H$ 、 c 和 $c - 2\mu H$; 而 $S = 0$ 时, 能量为 $-c$ 。显然, 配分函数为

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{c/kT} + e^{-c/kT} + e^{-(c-2\mu H)/kT} + e^{-(c+2\mu H)/kT}$$

$$= 2[\cosh(c/kT) + e^{-c/kT} \cosh(2\mu H/kT)].$$

因为

$$M = NkT \frac{\partial \ln Z}{\partial H},$$

故

$$M = \frac{4N\mu}{Z} e^{-c/kT} \sinh(2\mu H/kT).$$

本题也可用经典方法处理。容易证明, M 的结果在形式上是一样的, 但配分函数变成了

$$Z = 2[e^{c/kT} + e^{-c/kT} \cosh(2\mu H/kT)].$$

(i) 当 $|\mu H| \ll kT$, $|c| \ll kT$ 时,

$$\sinh(2\mu H/kT) \rightarrow 2\mu H/kT, \quad \cosh(2\mu H/kT) \rightarrow 1,$$

$$\cosh(c/kT) \rightarrow 1, \text{ 以及 } e^{-c/kT} \rightarrow 1.$$

因此,

$$M \simeq \frac{2N\mu^2 H}{kT},$$

这正是居里定律。因此, 体系表现为顺磁质。当热激发大大超过磁能时, 预期会有这一结果。

(ii) 当 $|\mu H| \ll kT$, $|c| \gg kT$, $c < 0$ 时,

$$Z = 2\cosh(c/kT) + 2e^{-c/kT} \simeq 3e^{-c/kT},$$

从而有

$$M \simeq \frac{8N\mu^2 H}{3kT} = \frac{2N(2\mu)^2 H}{3kT},$$

其形式也是居里定律。不过, 现在粒子对内部是“铁磁性”耦合, 而粒子对的集合则表现为顺磁质。

(iii) 当 $|\mu H| \ll kT$, $|c| \gg kT$, $c > 0$ 时,

$$Z = 2\cosh(c/kT) + 2e^{-c/kT} \simeq e^{c/kT},$$

磁化强度

$$M = \frac{8N\mu^2 H}{kT} e^{-2c/kT} \simeq 0,$$

因为这时粒子对内部是“反铁磁性”耦合, 预期会出现这种结果。

(iv) 当 $|c| \ll kT \ll |\mu H|$ 时,

$$Z \simeq 2\cosh(2\mu H/kT),$$

并有

$$M \simeq 2N\mu \tanh(2\mu H/kT) \simeq 2N\mu,$$

表现为饱和顺磁体。当交换作用小而外加磁场强时，这也是预期的结果。

(v) 在 $kT \ll |\mu H| \ll |c|$, $c < 0$ 时, 有

$$Z \simeq e^{-c/kT} [1 + 2 \cosh(2\mu H/kT)]$$

和

$$M = \frac{4N\mu \sinh(2\mu H/kT)}{1 + 2 \cosh(2\mu H/kT)} \simeq 2N\mu \tanh(2\mu H/kT) \simeq 2N\mu.$$

体系为自旋完全整齐排列的铁磁体。

(vi) 最后, 当 $kT \ll |\mu H| \ll |c|$, $c > 0$ 时, 有

$$Z \simeq e^{c/kT}$$

及

$$M = 4N\mu e^{-2c/kT} \sinh(2\mu H/kT) \simeq 2N\mu e^{-2(c-\mu H)/kT} \simeq 2N\mu e^{-2c/kT} \simeq 0;$$

在这种近似下, 体系相应于一个整齐排列的反铁磁体。

9.9 对于一个立方晶体, 晶态各向异性自由能可以表示为

$$F_K = K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2,$$

式中, α_1 、 α_2 和 α_3 是磁化强度对立方棱的方向余弦, K_1 和 K_2 在给定的温度下是常数。关于本题的第一部分, 我们有 $\alpha_1 = \cos\phi$, $\alpha_2 = \sin\phi$ 和 $\alpha_3 = 0$ 。因为 $\sin 2\phi = 2\cos\phi\sin\phi$, $\sin^2 2\phi = (1 - \cos 4\phi)/2$, 由此得出

$$F_K = \frac{1}{8} K_1 (1 - \cos 4\phi).$$

磁场中的附加自由能由下式给出

$$F_H = -MH \cos(\theta - \phi).$$

若其他能量可忽略不计, 则总自由能应为

$$F_T = F_K + F_H.$$

利用平衡时 $\partial F_T / \partial \phi = 0$, 得平衡条件

$$\frac{1}{2} K_1 \sin 4\phi = MH \sin(\theta - \phi).$$

当磁场为无限大时, 磁化强度将平行于外磁场, 这时, $\theta = \phi$, 可求出力矩 T 为

$$T = -\partial F_T / \partial \theta = -\frac{1}{2} K_1 \sin 4\theta.$$

对于沿 (110) 面切下的圆片, 方向余弦为: $\alpha_1 = (\cos\theta)/\sqrt{2}$ 、 $\alpha_2 = (\cos\theta)/\sqrt{2}$ 和 $\alpha_3 = \sin\theta$ 。 θ 为 $\mathbf{M}$ (及 $\mathbf{H}$) 与 $[110]$ 晶向的夹角。这时,

$$F_K = \frac{1}{4} K_1 (\cos^4\theta + 4\sin^2\theta \cos^2\theta) + \frac{1}{4} K_2 \sin^2\theta \cos^4\theta,$$

由此得出†

$$T = -\frac{1}{8}K_1(-2\sin 2\theta + 3\sin 4\theta) - \frac{1}{64}K_2(-\sin 2\theta + 4\sin 4\theta + 3\sin 6\theta).$$

9.10 吉布斯 (Gibbs) 函数定义为

$$G = E - TS,$$

式中, E 为焓

$$E = U - HM - \sigma \int d\left(\frac{\delta l}{l}\right),$$

U 为内能; S 为熵; $\delta l/l$ 为样品的相对伸长. 在恒温下, 并注意 $dU = Tds + HdM$, 有

$$dG = -MdH - \frac{\delta l}{l}d\sigma.$$

因 dG 是个全微分, 从而有

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_H = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial H}\right)_\sigma.$$

9.11 磁标势由下式给出

$$\varphi = -\mathbf{M} \cdot \int \nabla \frac{1}{r} dv.$$

对于球外的点, 即 $r > a$ 时,

$$\varphi = \frac{M \cos \theta}{r^2} \int_0^{\frac{4}{3}\pi r^3} dv = \frac{4}{3} \pi M a^3 \frac{\cos \theta}{r^2},$$

对于球内的点, 即 $r < a$ 时, 根据高斯定理, 半径为 r 的球面以外的材料对势无贡献, 所以有

$$\varphi = \frac{M \cos \theta}{r^2} \int_0^{\frac{4}{3}\pi r^3} dv = \frac{4}{3} \pi M r \cos \theta.$$

因为

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \boldsymbol{\phi},$$

由此得出样品内的磁场为

$$\mathbf{H}' = -\frac{4}{3} \pi M (\cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}) = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{M}.$$

根据定义, $\mathbf{H}' = -DM$, 因而球的退磁因子为

† 原文为 $T = -\frac{1}{8}K_1(2\sin 2\theta + 3\sin 4\theta) - \frac{1}{64}K_2(\sin 2\theta + 4\sin 4\theta - 3\sin 6\theta)$. 一校者。

$$D = \frac{4}{3}\pi.$$

9.12 在一般情况下, 磁性自能由下式给出:

$$F_D = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}' dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \nabla \varphi dv.$$

考虑到

$$\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\mathbf{M} \varphi) dv = \frac{1}{2} \int \varphi \nabla \cdot \mathbf{M} dv + \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \nabla \varphi dv$$

或

$$\frac{1}{2} \int \varphi \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dv + F_D.$$

得

$$F_D = -\frac{1}{2} \int \rho \varphi dv + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dS,$$

式中, $\rho (= \nabla \cdot \mathbf{M})$ 是体磁荷密度, $\sigma (= \mathbf{M} \cdot \mathbf{n})$ 是表面磁荷密度.

用 S_1 和 S_2 分别表示样品的外表面和内表面, σ_1 和 σ_2 分别表示外、内表面上的磁荷密度. 并用 φ_i 表示 σ_i 引起的磁标势, σ_i 产生的磁场则记作 $\mathbf{H}_i = -\nabla \varphi_i$. 因为 $\rho = 0$, 我们得到

$$F_D = \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma_1 \varphi_1 dS_1 + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma_1 \varphi_2 dS_1 + \frac{1}{2} \int_{S_2} \sigma_2 \varphi_1 dS_2 + \frac{1}{2} \int_{S_2} \sigma_2 \varphi_2 dS_2.$$

第一项是 σ_1 在它自己的场 H_1' 中的能量, H_1' 在 v_1 中是均匀的; 此能量与一个内部无空腔且具有均匀磁化强度 $\mathbf{M}$ 的椭球的能量相等, 亦即 $-\frac{1}{2} \int_{v_1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1' dv$. 最后一项是 σ_2 在它自己的场 H_2' 中的能量, H_2' 在 v_2 中是均匀的; 此能量与一个恰好能填满空腔 v_2 并具有均匀磁化强度 $-\mathbf{M}$ 的椭球的能量相等, 亦即 $+\frac{1}{2} \int_{v_2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_2' dv$. 因为 $\varphi_i = \int \frac{\sigma_i}{r} dS_i$, 故第二项与第三项相等, 它们一起构成了两个磁极分布间的相互作用能. 因为 H_2' 在 v_2 中是均匀的, 而 H_2' 在 v_1 中(除 v_2 外)并非均匀, 我们可以用第三项代替第二项. 第三项等于一个恰好能填满空腔且具有均匀磁化强度 $-\mathbf{M}$ 的物体在磁场 $\mathbf{H}_1'$ 中的能量, 亦即 $+\frac{1}{2} \int_{v_2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1' dv$. †

由上述分析我们得到

† 原文为 $+\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_2' dv$ ——译注。

$$F_D = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1' dV + \int_{V_2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1' dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_2' dV.$$

其次, 我们设椭球面 S_i 具有沿 (x_i, y_i, z_i) 的主轴, 退磁化因子为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & D_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & D_{z_i} \end{pmatrix}.$$

再假定磁化强度 $\mathbf{M}$ 对 (x_i, y_i, z_i) 轴的方向余弦为 (l_i, m_i, n_i) . 于是有

$$\mathbf{H}_1' = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{M} = -M(l_1 D_{x1} \mathbf{i}_1 + m_1 D_{y1} \mathbf{j}_1 + n_1 D_{z1} \mathbf{k}_1),$$

和

$$\mathbf{H}_2' = M(l_2 D_{x2} \mathbf{i}_2 + m_2 D_{y2} \mathbf{j}_2 + n_2 D_{z2} \mathbf{k}_2).$$

最后, 我们得†

$$F_D = \frac{M^2}{2} [(l_1^2 D_{x1} + m_1^2 D_{y1} + n_1^2 D_{z1})(V_1 - 2V_2) + (l_2^2 D_{x2} + m_2^2 D_{y2} + n_2^2 D_{z2})V_2].$$

9.13 因为 $\Phi = \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r} dS$, 故在空气隙中心处的磁场由下述积分给出:

$$H = \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \cos \alpha dS = 2 \int_{S_1} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \cos \alpha dS_1 + 2 \int_{S_2} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \cos \alpha dS_2,$$

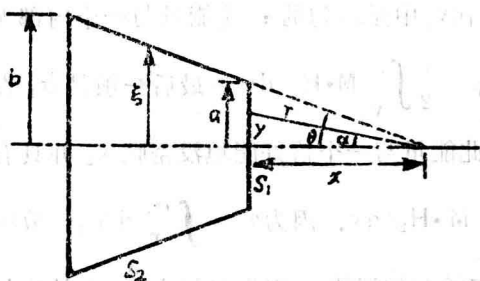


图9.13.1

式中, S_1 和 S_2 分别为磁极的平表面和锥形侧面, 其他符号的意义见图9.13.1. 对于表面 S_1 , 有

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M,$$

$$r^2 = x^2 \sec^2 \alpha,$$

$$dS_1 = 2\pi y dy,$$

$$y = x \tan \alpha,$$

$$\text{以及 } dy = x \sec^2 \alpha d\alpha,$$

对于第二个面, 则有

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M \sin \theta,$$

$$dS_2 = \frac{2\pi \xi}{\sin \theta} d\xi, \quad r^2 = \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta}, \quad \text{及 } \cos \alpha = \cos \theta.$$

代入前式, 得

† 原文漏印 M^2 ——校注。

$$H = 4\pi M \left[\int_0^\theta \sin\alpha d\alpha + \sin^2\theta \cos\theta \int_a^b \frac{d\xi}{\xi} \right]$$

$$= 4\pi M [1 - \cos\theta + \sin^2\theta \cos\theta \ln(b/a)].$$

若不计两平表面 S_1 的贡献, 则

$$H = 4\pi M \sin^2\theta \cos\theta \ln(b/a).$$

此场为最大值时, 满足 $\partial H / \partial \theta = 0$, 由此得

$$\tan\theta = \sqrt{2}, \quad \text{或} \quad \theta = 54^\circ 44',$$

当然, 若计及 S_1 的贡献, 则总磁场为最大值的 θ 应是 b/a 的函数.

9.14 令 α 为极轴与磁化强度 $\mathbf{M}$ 的方向之间的夹角, ϕ 为 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{M}$ 之间的夹角, $\phi = \theta + \alpha$. 退磁化自由能由下式给出 (参看9.12题):

$$F_D = \frac{1}{2} M^2 (D_a \cos^2\alpha + D_b \sin^2\alpha) V$$

$$= \frac{1}{4} (D_a + D_b) M^2 V - \frac{1}{4} (D_b - D_a) M^2 V \cos 2\alpha,$$

式中, $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$. 在外加场中的自由能为

$$F_H = -H M V \cos\phi.$$

若可以假定对自由能的其他贡献为零, 则总自由能 $F_T = F_D + F_H$.

当总自由能由一个极小值变为极大值时, H 就达到了磁化强度发生跃变的临界场, 极小、极大转变发生的条件为

$$\frac{\partial F_T}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 F_T}{\partial \phi^2} = 0.$$

利用此条件可得两个联立的方程:

$$h_{crit} \sin\phi_c + \frac{1}{2} \sin 2(\phi_c - \theta) = 0,$$

$$h_{crit} \cos\phi_c + \cos 2(\phi_c - \theta) = 0.$$

消去 h_{crit} , 得

$$2 \tan(\theta + \alpha_c) = \tan 2\alpha_c.$$

展开正切函数后得

$$\tan^3 \alpha_c = \tan \theta = w^3.$$

于是有

$$\phi_c = \theta + \tan^{-1} w,$$

进而得

$$\tan \phi_c + \frac{\tan \theta + w}{1 - w \tan \theta} = \frac{w}{1 - w^2} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha_c,$$

由此得出

$$\sin 2\alpha_c = \frac{2w}{w^2 + 1} \quad \text{和} \quad \sin \phi_c = \frac{w}{(1 - w^2 + w^4)^{1/2}}.$$

所以, 临界场为

$$h_{crit} = -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha_c}{\sin \phi_c} = -\frac{(1 - w^2 + w^4)^{1/2}}{(1 + w^2)}.$$

当 $\theta = 0^\circ$ 、 10° 、 45° 和 80° 时, 分别有 $h_{crit} = -1.000$ 、 -0.674 、 -0.500 和 -0.674 .

9.15 两个磁偶极子的相互作用能为

$$F_{dd} = \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} [\cos(\theta_i - \theta_j) - 3 \cos \theta_i \cos \theta_j],$$

式中, θ_i 和 θ_j 分别为第 i 和第 j 个磁偶极矩与连接两球心的矢径 r_{ij} 之间的夹角. 若磁化反向过程是通过各球的磁矩作平行一致的转动进行, 即对于一切球, 有 $\theta_i = \theta_j$, 则对四个球的链有

$$F_{dd} = \frac{\mu^2}{(2a)^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \left(3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} \right) = \frac{355}{108} \frac{\mu^2}{(2a)^3} (1 - 3 \cos^2 \theta).$$

将此结果推广到 n 个球的链, 有

$$F_{dd} = \frac{\mu^2}{(2a)^3} \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)}{j^3} (1 - 3 \cos^2 \theta).$$

因为外加场 H 沿链的轴向, 故与外场的相互作用自由能 $F_H = 4\mu H \cos \theta$. 总自由能 F_T 正是上述两种自由能之和. 在平衡条件下, $\partial F / \partial \theta = 0$, 从而有

$$H = \frac{3}{2} \frac{355}{108} \frac{\mu}{(2a)^3} \cos \theta.$$

在考虑了二阶导数和磁滞回线的细节后可以证明, 矫顽力对应于 $\theta = 0^\circ$. 因此有

$$H_c = 4.93 \frac{\mu}{(2a)^3}.$$

若磁化反向过程是通过对称扇形转动进行, 即 $\theta_2 = -\theta_1 = \theta_4 = -\theta_3$, 则

$$\begin{aligned} F_{dd} &= \frac{\mu^2}{(2a)^3} \left[(\cos 2\theta - 3 \cos^2 \theta) \times \left(3 + \frac{1}{27} \right) + (1 - 3 \cos^2 \theta) \times \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{\mu^2}{(2a)^3} \left(\frac{82}{27} \cos 2\theta - \frac{355}{36} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

对于 n 个球的链, 有