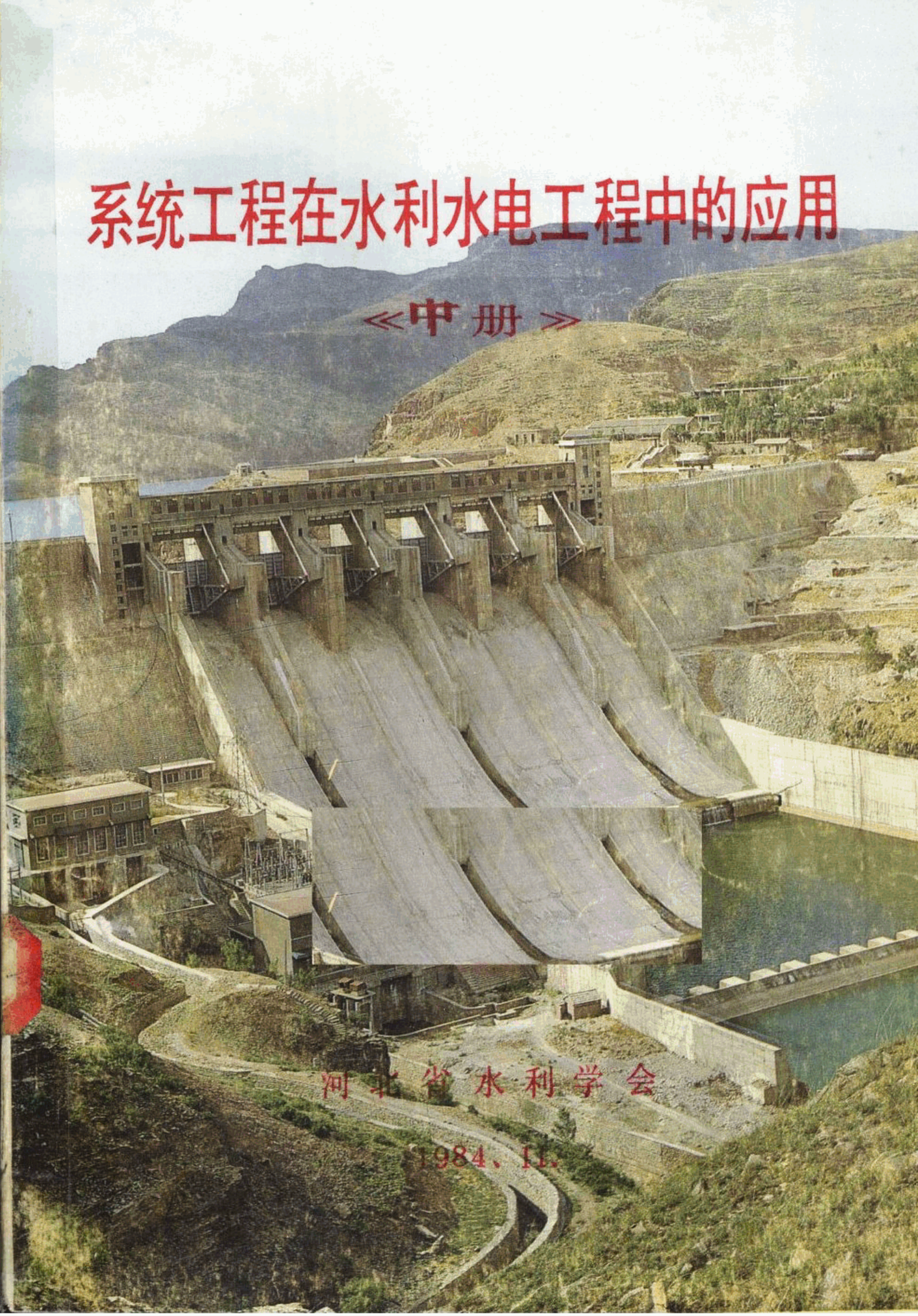
系统工程在水利水电工程中的应用

《中册》



河北省水利学会

1984、11.

系统工程

在水利水电工程中的应用

(中　册)

张鸿茂　主编

张金轩　张玉田　徐兴中
张连洲　刘新娟　周光春　编写

刘宗耀　审订

河北省水利学会

中国水利学会施工专业委员会系统工程学组

说　明

《系统工程在水利水电工程中的应用》一书原定分上下两册刊印发行，并于十月十五日发出了征订启事，深蒙读者给予支持和惠顾、谨表由衷感谢。

本书征订启事发出后，又根据上级有关部门指示，对原订编入下册的有关内容又新充实了更多应用实例，使材料内容由70万字扩充至约140万字，使下册难以容下，故全书改为分上、中、下三册出版。读者原订购的下册改寄中册，下册请另行订购，敬希鉴谅，特致歉意。

编者

1985年12月

《系统工程在水利水电工程中的应用》

（中　　册）

目　　录

第七章　图论及网络理论

第一节　图与网络的基本概念

一、概述

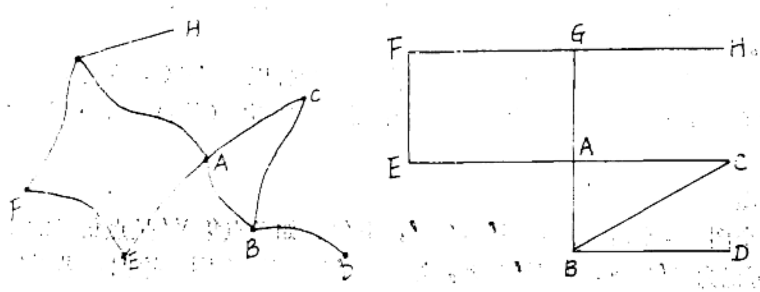
许多工程系统都可以用图形来描述，例如灌溉系统、排水系统、交通系统、运输系统等，它们本身就具有网络图的形式。除此以外，生产组织系统、工程决策问题、生产进度计划等也可以看成是一个网络。因此，一个工程系统可以用图解模型或网络模型来代表并进行分析，即可以把一个工程课题的各种物理量之间的关系用一个抽象的图来表示，并按此图可以拟定出数学方程，同时还可以利用图的某些性质来解这些方程。所以，图论及网络理论是一种制定和求解工程系统数学模型的有力工具，也是应用十分广泛的一个系统工程学的重要分支。

图论是一种抽象的几何概念，但它和几何学不同，它不按比例尺画图，线和点的位置具有随意性。在图论中，用点表示被研究的对象，用线表示被研究的对象间的关系，从某种意义上可以说图论是研究事物间某种关系的学问。

随着科学技术的发展以及电子计算机的出现与广泛应用，近二十年来图论得到了进一步发展，并在许多领域得到广泛的应用。将工程系统用图来描述，不仅可以解决从某点到另一点的正确路线，而且可以解决最优化问题。

二、图（Graph）

在图论中讨论的图是什么样的图呢？我们可用一个实际问题来说明，如图7—1(a)表示某地的公路图，A、B、……G、H表示城镇，城镇间的连线表示公路。例如连线A、B即表示A B间有公路相通这种特定关系。如果我们研究的问题只着眼于“两城镇间有无公路相通”这一特定关系，而公路的长度、曲直、方向、海拔高度、城镇位置等都不是研究的主要问题，那么就可以用图7—1(b)那样的线图来代替图7—1(a)进行研究。



(a)　　　　　　　　　　(b)

图7—1　某地公路图及公路交通线图

图7—1(b)一般称为线图（Limatqraph），用点（node，亦称为顶点Vertex）表示城镇，用直线表示公路，称为边（edqe）。这样的图就是图论中讨论的图，即图就是由点的集合与边的集合组成。

在图论和网络理论中所讨论的图是将图的具体内容抛开，研究抽象图的一般规律及典

型问题的分析方法和求解方法。

现以图7—2为例，介绍关于图的定义和一些常用的名词和术语。

1.图是点集（点的集合）和边集（边的集合）的组合，可用符号$G=(V, E)$来表示。这里V表示点集，E表示边集。例如图7—2定义为$G=(V, E)$，

$V=\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$，

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，

$e_1=[V_1, V_2]$，$e_2=[V_1, V_3]$，

$e_3=[V_1, V_4]$，$e_4=[V_3, V_4]$，

$e_5=[V_1, V_2]$，$e_6=[V_3, V_3]$，

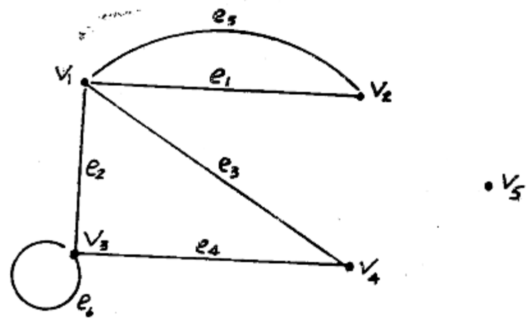


图7—2　图$G=(V, E)$

2.图的点集和边集是有限的图，称为有限图（finite qraph），我们以后所讨论的图都是有限图。

3.任一边$e=[V_i, V_j]$称V_i，V_j是边e的端点。边与顶点的连接关系叫做“关联”（incidence），也就是说边e与点V_i和V_j相关联。在一个图中若某一点没有任何边与之关联，则该点称为弧立点，例如图7—2中的V_5就是一个弧立点。

4.一般在图中一条边与两个端点相关联，如果一条边的两个端点相同，那么该边称为环（Loop），如图7—2中边e_6即是环。

5.在图中任意两个边除了交汇于顶点之外不再有交叉点，这样的图叫做平面图。否则，称为非平面图。

6.图中两个点之间若多于一条边时，称为多重边，如图7—2中的e_1和e_5。这里e_1和e_5两条边互称为并行边。

7.如果一个图中既没有环也没有多重边，这样的图称为简单图。我们以后的讨论，多限于简单图。

8.以点V_i为端点的边的数目，称为该点V_i的次，以符号$d(V_i)$表示。在图7—2中，点V_1的次$d(V_1)=4$，点V_3的次$d(V_3=4$，点V_4的次$d(V_4)=2$，点V_5的次$d(V_5)=0$等等。

三、子图

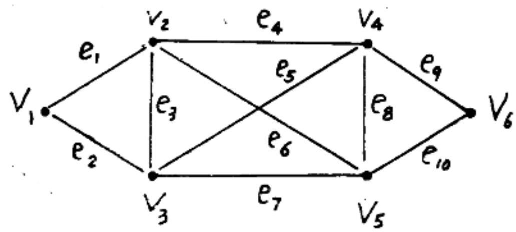
设有两个图$G=(V, E)$和$G'=(V', E')$，如果点集V'是点集V的子集合（即V包含V'）可记为$V'\subseteq V$，且$E'\subseteq E$，则称G'是G的子图。并且，若$V'=V$，$E'\subset E$，则称G'是G的一个部分子图。如图7—3所示。

四、有向图与无向图

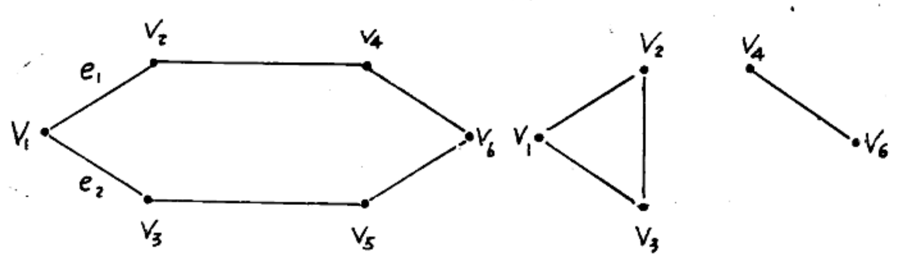
在前面所讨论的图中，如果没有标明某点到另一点的方向，即$[V_i, V_j]$和$V_j, V_i]$是相同的，那么这种图就称为无向图(undirected qraph)。但在实际生活中，有很多问题用无向图描述不清楚。如从水源向用户送水的管线，一项工程中各工序之间的先后关系等等，这些仅用边是反映不出来的。这时就可以用一条带箭头的线$V_i\rightarrow V_j$反映V_i与V_j之

间的这种关系。这种点与点之间有方向的线称为弧(arc)。

由点集V和弧集A组成的图D=(V, A)称为有向图(Directed qraph)。如图7—3所示。无向图，有向图统称为图。



(a) G图



(b) G的一部分子图　　(c) G的子图　　(d) G的子图

图 7—3

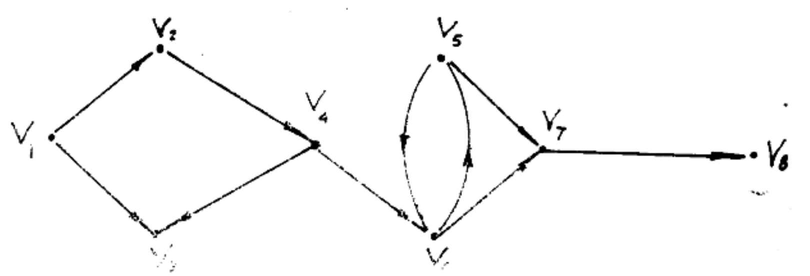


图 7—4

在图7—4中，从V_1到V_8排到一些弧段组成一个弧的序列，在此序列中若各弧段首尾相接而不重复．这样就组成了从V_1到V_8的一条通路(path)，如V_1 V_2 V_4 V_6 V_7 V_8。如果在弧的序列中．某些弧段的方向与前进的方向不一致，则从起点到终点的各弧段组成一条链(chain)．如$V_1V_3V_4V_6V_7V_8$。

五、连通图与不连通图

一个图中若任何两点之间，至少有一条链，则称该图为连通图，如图7—3 V_1．V_8之间。如果将图7—3中的弧[V_4，V_6]去掉，形成图7—5，V_1与V_8之间没有链．则称图7—5为不连通图。

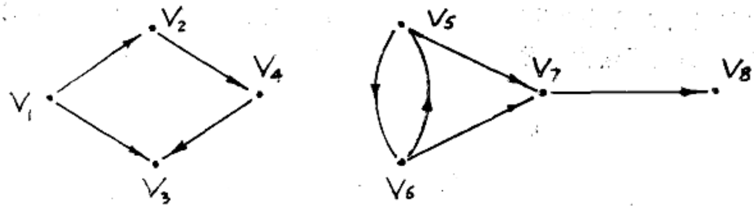


图　7—5

六、自身路

设图$G=(V_1, E)$，当$U_K \sqsubseteq V$，若存在$e \sqsubseteq E$，使$e=(v_K, v_K)$，则称e为顶点v_k的自身路。

七、顶点的线度

1.设$G=(V, E)$是无向图。$v_i \in V$且无自身路。

令 $I_{nc}(v_i) \overset{\Delta}{=} \{e_k | e_k \in E \quad e_k=\langle v_i, v_j\rangle\}$称$d(v_i) \overset{\Delta}{=} |Inc(v_i)|$为G的顶点$v_i$的线度。

2.设$G=(V, E)$是有向图。$v_i \in V$

令 $Inc^+(v_i) \overset{\Delta}{=} \{e_k | e_k \in E, e_k=(v_i, v_j), v_i \in V\}$ $Inc^-(v_i) \overset{\Delta}{=} \{e_k | e_k \in E, e_k=(v_j, v_i), v_j \in V\}$

称 $d^+(v_i) \overset{\Delta}{=} |Inc^+(v_i)|$为G的顶点$v_i$的正线度。$d^-(v) \overset{\Delta}{=} |Inc^-(v_i)|$为G的顶点$v_i$的负线度。$d(v_i) \overset{\Delta}{=} d^+(v_i)+d^-(v_i)$为G顶点$v_i$的线度。

显见，有向图的任何边在所有顶点的线度总和中都计算了两次，自身路也不例外。对无向图为统一起见，也把v_i的自身路在$d(v_i)$中计算两次。

对于任何图$G=(V, E)$，有$\sum_{v_i \in} d(v_i)=2|E|$。

八、通路

设$G=(V, E)$是图，$v_i \in E \quad i=0, 1, 2, \cdots, n$；$e_j \in E \quad j=1, 2, \cdots, n$；

若有一序列　$W=v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$使得边$e_i$的端点是$v_i$和$v_{i-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$，则称它是从$v_0$到$v_n$的一条路径。

若在W中$e_0\cdots e_n$互异，则称它为G的一条边链。v_0和v_n分别为该边链的起点和终点。

若W为边链，且$v_0=v_n$，则称W为闭链。否则W称为开链。

设W是以v_0，v_n为始、终点的开链，$W=v_0e_1v_1\cdots e_nv_n$。

若$d(v_0)=1 \quad d(v_n)=1 \quad d(v_i)=2 \quad i=1, 2, \cdots, n-1$

则称W为v_0和v_n之间的一条通路。

九、网络

设$G=(V, E, \Phi)$是有向图。

$C: =E \to R^+$

其中：R^+表示非负实数集。

称四元素(V，E，Φ，C)为有向边权网络，简称为有向网络。C称为边权，也称边容量。

如果$e \subseteq E$　$e=(U，U_i)$则记$C(e)=C_{ij}$。有向网络就是给有向图的每一边赋一非负权。

生产实际问题常需要了解图中与边或弧有关的数量指标。这种带有数量指标的图，亦称为网络($N_e t_{wo} {}_k$)。

图7—6所示系一个引水的管道网络图，它有一个发点①和一个收点⑥，中间经过管网和若干加压站．对于这样的实际问题即可将实际系统表达为图7—6所示的网络图。图中所标数字为各管段的最大通过能力。

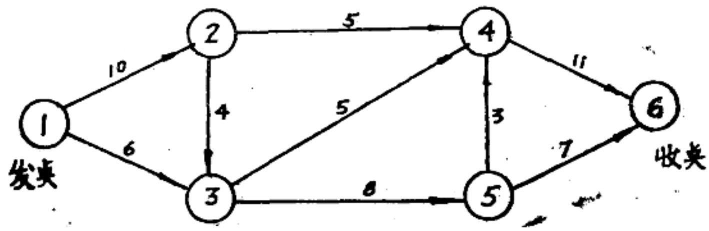


图7—6　引水管道网络

十、源点与汇点

设$G=(V，E，\Phi)$是有向图。

若$U_i \subseteq V$有$d^-(V_i)=0$　则称顶点U_i为G的源点。

若$U_i \subseteq V$有$d^+(U_i)=0$　则称顶点U_i为G的汇点。

一般网络可以是多源点、多汇点的网络。

十一、准网络

设$G=(V，E，\Phi，C)$为有向网络。

若：①有且仅有一个顶点$S \subseteq V$，$d^-(S)=0$

　　②有且仅有一个顶点$t \subseteq V$，$d^+(S)=0$

则称G为准网络，可记为$G=(V，E，\Phi，C，S，t)$，也简记为$G=(V，E)$。

即准网络是单源点、单汇点的有向网络。多源点、多汇点的有向图可化为与之等价的准网络图G'。

设$G=(V，E，\Phi，C)$ $X \subset V$　$Y \subset V$对任意$X_i \subseteq X$　$d^-(X_i)=0$　对任意$Y_i \subseteq Y$　$d^+(Y_i)=0$

G是以X为源点集，以Y为汇点集的有向网络。

步骤为：

①新取两顶点S，t，作$V' \overset{\Delta}{=} V \cup \{S，t\}$②$E' \overset{\Delta}{=} E \cup \{S，X_i\} | X_i \subseteq X\} \cup \{(y，t) | y_i \subseteq Y\}$并相应地作出$\Phi'$

$$③C'(e)=\begin{cases} C(e) & e \subseteq E \\ \infty & e \subseteq E'-E \end{cases}$$

图7—7是这种转换的例子。

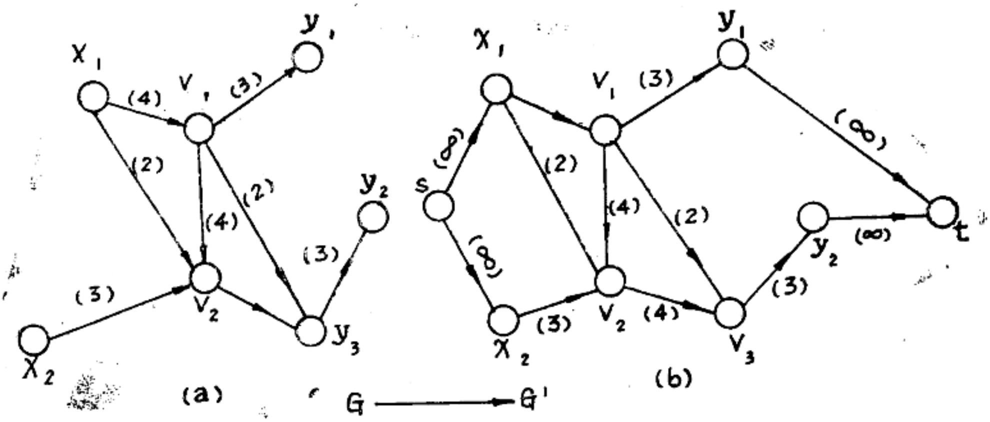


图7—7　$G \rightarrow G'$

十二、图的运算

一个大的图往往是由许多部分组合而成，在研究图的特性时，可以从它的某一部分入手．这就需要将图进行一定的组合或分解，即对图进行运算。前已述及，图是由点集和边集组成的．因此可以把关于集合的运算规则用于图的运算。

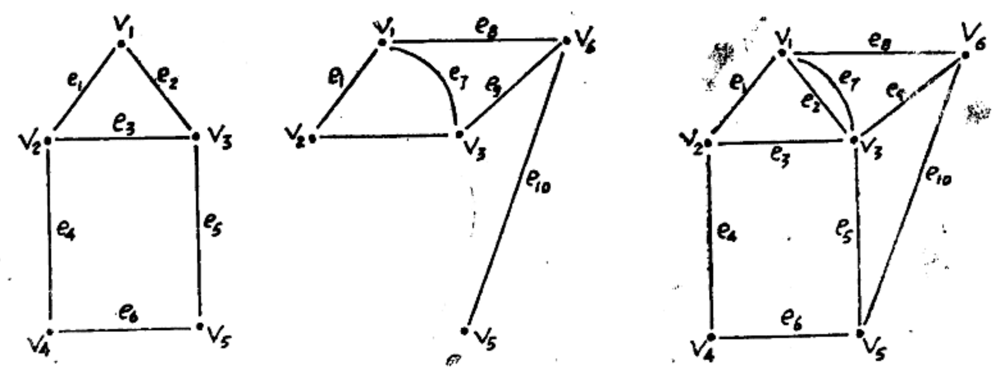
1．并(union)

设有两个图$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$，这两个图的并就是将两个图的点集和边集分别合并起来，它们的共同部分仅取其一，这样构成一个新图$G_3=(V_3, E_3)$。用数学式子表达即为：

$$G_1 \cup G_2 = G_3 = (V_3, E_3)$$

其中$V_3 = V_1 \cup V_2$，$E_3 = E_1 \cup E_2$。符号“$\cup$”为集合的并集运算符号。

图7—8所示为并的运算结果，其中(a)和(b)点集的共同部分为$\{V_1, V_2, V_3, V_5\}$，边集的共同部分为$\{e_1, e_3\}$，将(a)和(b)合并起来，而它们的点集和边集的共同部分仅取其一，组成新图(c)，即为(a)和(b)的并。由此可以看出并的运算相当于数学运算的加



(a) G_1　　(b) G_2　　(c) $G_3 = G_1 \cup G_2$

图7—8　两图的并

法，但不是将两图中的点集和边集中所有元素简单地加起来。

显然，对于任何图$G=(V, E)$，$G\cup G=G$。

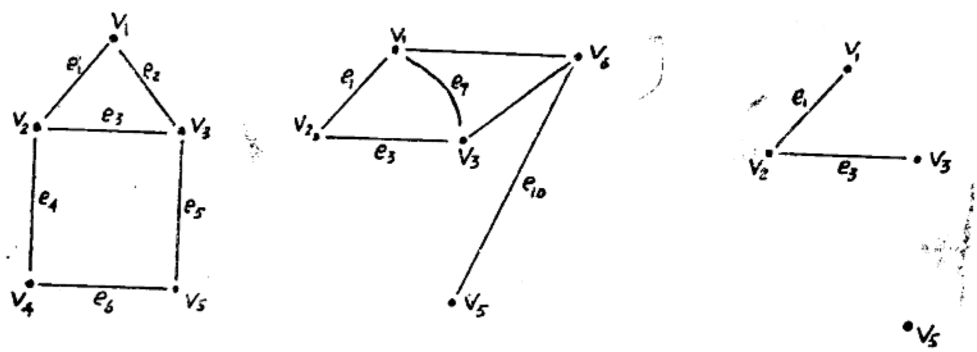
2.交(Intersection)

给定两个图$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$，该两图的交就是取两图中的点集和边集的共同部分组成新图$G_3=(V_3, E_3)$，即

$$G_1\cap G_2=G_3=(V_3, E_3)$$

其中$V_3=V_1\cap V_2$，$E_3=E_1\cap E_2$，符号"$\cap$"为集合的交集运算符号

图7—9所示为交的运算结果，其意义很明显。交的运算相当于数学运算的乘法。



(a) G_1　　(b) G_2　　(c) $G_3=G_1\cap G_2$

图7—9　两个图的交

很明显，对于任何图$G=(V, E)$，$G\cap G=G$。

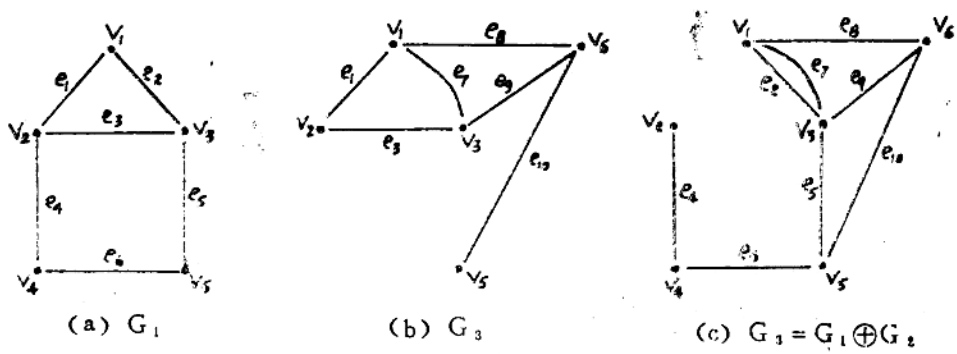
3.环合(Ring Sum)

两图G_1和G_2，环合构成G_3，其意义为：

$$G\oplus G_2=G_3=(V_3, E_3)$$

其中$V_3=V_1\cup V_2$，$E_3=(E_1\cup E_2)-(E_1\cap E_2)$。

图7—10为两图的环合。由图可以清楚地看出，两图的环合系两图的并，然后去掉两图边集之共同部分。



(a) G_1　　(b) G_3　　(c) $G_3=G_1\oplus G_2$

图7－10　两个图的环合

由此上运算规则可推知，若将一图G分解成两个子图G_1和G_2，其意是指

$$G_1 \cup G_2 = G,$$
$$G_1 \cap G_2 = \phi,$$

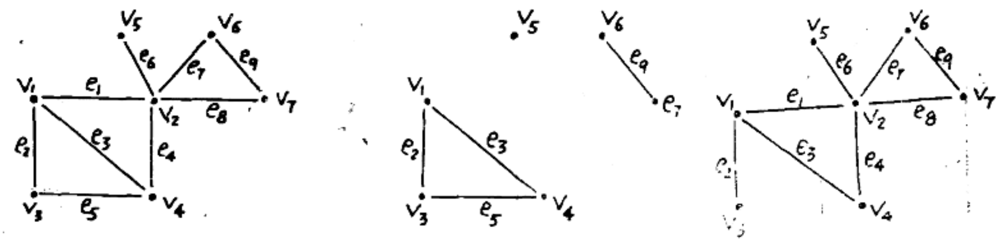
这里ϕ是零图。

除了以上运算规则，还可对图作以下运算：

图的删除：

设有图G，其中的一个点V，那么$G - V_i$是图G的子图，即是从G中去掉点V_i以及与V_i相关联的边，这叫做点的删除，如图7—11，(b)所示为删除点V_2。

如果e_j是图G的一条边，那么$G - e_j$是图G的子图，它是从G中去掉边e_j而得，这叫做边的删除，如图7—11(c)所示为删除边e_5。



(a) G　　(b) $G - V_2$　　(c) $G - e_5$

图7—11　图的删除

点的合并：

将图的一对顶点合并，但其并不删除，得到一个新图，即点的合并，为图7—12所示。

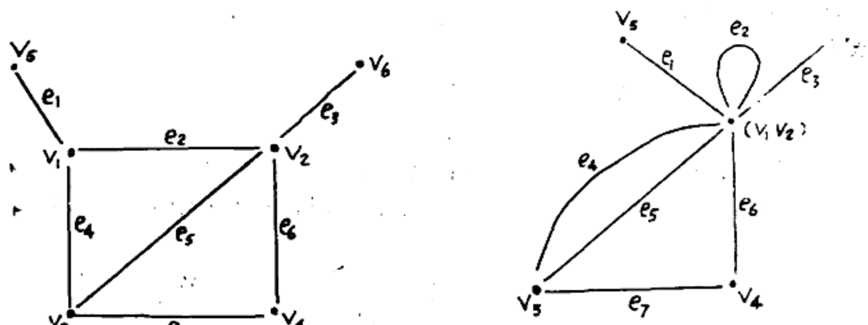


图7—12　V_1V_2点的合并

第二节　树

一、树的定义与性质

不包括任何回路的连通图称为树(Tree)，一个树中任意两点间只有一条通路(或链)。这种图的形状象一棵树，因此而得名，如图7—13所示。在树中两点之间的边（或弧）称为树枝。

任意一个连通图G必包含有树，即图G中必有子图为树。如果树T是图G的子图，就称T为G的树，参看图7—14。

图7—14中的T_1和T_2是图G的树。

由树的定义可知，树必定是一个简单图，它既不包含环也不包含多重边，否则就会形成回路。

树是图论中的一个重要概念。有许多实际问题可以用树来表示，例如具有分支的河流就可以用树表示，另外也可以用树来表示某种排列或事件发生的概率等。

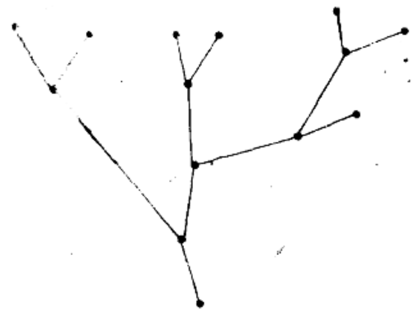


图7—13　树

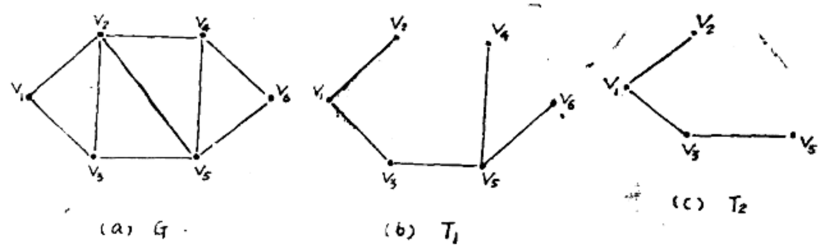


图7—14　图G的树

归纳起来树有以下特性：

1. 树是连通图，但不存在回路，因此树中任意两点之间仅有一条通路(或链)。

2. 树去掉一条边时图就不连通了。

3. 具有n个点的树，其边数则为n－1条，多一条边，就构成一个回路，任意去掉一条边，就不连通。

根据树的上述三条性质，我们可以推知，树的顶点被最少的边所连接，因此可以认为树就是最小连通图。

二、概率树和决策树

1. 树可以用来表示一序列有限的连续发生的事件，从树中可求出每事件发生的概率°树枝上表示出点（事件）的概率，这样的树称为概率树。

2. 在实际问题中，常常遇到需要在一系列的方案中作出某种决策。选取各种不同的方案将带来不同结果，决策者的任务是寻找一种方案，它的结果是最优的，即最优决策。

对于决策问题，如果资料十分完备，则决策较为简单。当资料不完备或遇有不确定的因素时，就需要根据过去的经验或做大量的统计，进行判断。如果可供选择的方案很多，则决策过程就很复杂。决策树是一种图解工具，用图表示出可作的选择和可能的结果。在决策树中，点表示应作的决策称为决策点(Decision node)，有的点表示事件出现的概率，称为概率点(Chance node)；树枝表示一种状态（或一种选择），其上标明事件的费用或概率。

例如，在河滩上进行某项工程，某些施工机械有四个月时间闲置不用。可将这些机械留在工地；也可先运走以后要用时再运回来，但这样就需运费1800元。如果将设备留在河

滩上，则要花500元建筑围堤防止设备被洪水浸没，否则发大水时设备将损失10000元（四个月中出现洪水的概率为0.25），但如发生特大洪水（其出现概率为0.02）不管有无围堤将损失60000元。

对于这样的问题，工程负责人面临以下三种可能决策：

①移走不用的机械；

②不用的机械暂留工地，加以保护；

③不用的机械暂留工地，也不加保护。

图7—15表示这一决策问题的线图模型——决策树。

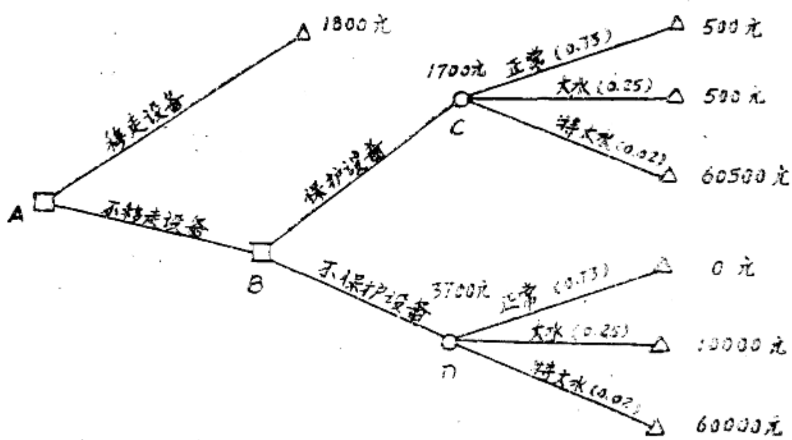


图7—15

图中决策的点用小方块表示。概率点用小园圈表示，它表示决策人无法控制，完全取决于自然或社会条件，但可由观察统计资料得到各种事件可能产生的概率，在概率点输出的树枝上用数字标明。在树梢上用小三角表示各种决策或概率事件产生的结果，即各种决策必须付出的费用。

按决策树进行分析，可以寻找最优决策。若选择不移走设备并加以保护的方案，则在c结点的费用期望值为：

$$0.73\times500+0.25\times500+0.02\times60500=1700\text{元},$$

将此数值标注于结点c上。

若选择不移走设备且不加保护的方案，则在D结点的费用期望值为：

$$0.25\times10000+0.02\times60000=3700\text{元},$$

将此数值标注于结点D上。

比较三种方案的费用以不移走设备并加以保护的方案费用最少，此即为最优决策。

三、部分树及最小部分树问题

1.部分树(Spanning tree)

如果树T是连通图G的子图，而且T包含了G图的所有的顶点，这样的树称为G图的部分树。如图7—16所示，图中粗线即为部分树。