S.M.P.

中學數學教程

第4册

G 634.6
331
4
S 017017

英國S.M.P.中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

BOOK 4

石景宜先生赠书
年 月 日
S9000379

九章出版社 出版
製作・發行：學英文化事業有限公司

英國S.M.P.
中學數學教程

●(中文版第四册)●

出版者：九章出版社

製作・發行：學英文化事業有限公司
地址：羅斯福路四段52巷6號
電話：(02)3946693
印刷者：九章打字印刷行
出版日期：中華民國72年10月
定價：普及版700元整
郵政劃撥：578690學英文化公司帳戶

S 017017

第四冊　序言

接着第3冊，S.M.P. O-級課程已經完成過半。此刻已經介紹了大多數在O-級所要研究的論題，現在重點開始擺在，存在於各論題之間的相互關係。例如，在第2冊首次介紹的矩陣，如今用來明朗化對拓樸學，變換幾何，關係與逆函數的研究。

第1章介紹一個新的主題——因為在此我們首次考慮機率。這是一個永遠迷人的單元而且也是每一位學生在他離開學校之前必定會遇到的問題。除了基礎算術之外，沒有數學會比機率與統計更實用——因為連這個句子也包含了它的專門語言！統計第一次介紹是在第2冊而在第13章我們回到這個主題上來，這次是從一個比較量化的觀點。

在第2章我們再一次來研究變換幾何。在第1和2冊介紹過的是鏡射，旋轉和平移的變換。現在我們同時來考慮它們，研究它們共有的性質和觀察他們如何結合。該章重點從幾何圖形轉向變換，而所獲得的結果和經驗對稍後推動矩陣，函數和群比推動純幾何有關係。

第5，7和15章是比較傳統的幾何。在這三章裡我們考慮圓與圓的性質，簡單的三維幾何和吸引人的軌跡與包絡的論題。第12章是“古典與現代”的混合，在那裡我們使用修剪的幾何變換做為研究簡單圖形的面積與體積的跳板。該章也做為研究一般仿射變換的準備而且延拓了用矩陣來描述變換的工作。

矩陣在第3章詳加研究而且以後出現許多次。在第6章我們使用它們來研究網路，關係而且甚至於打賭預測。該章再討論若干在較前提過的拓樸觀念包含了多面體的尤拉公式和四色問題在內而且提示許多矩陣理論在工業與商業上的應用。

在8和14章描述數學技術比較深的現代應用。第8章的線

性規劃演算簡介，有兩層目的——表示數學如何應用到外在世界和表現線性代數在接納與獨佔方法上的標準工作。第14章也有双層目的。在此我們試着去説明計算機可做什麼和如何做，而第二個目的是去顯示問題如何被分解成一連串簡單的邏輯步驟。

在第2册序言中提到，在操作技術的獲得和基本概念的研究之間鑄造一個恰當平衡的必要與代數教學的問題。關於這個S.M.P.在第10和11章有更深的發展，於此我們要注意的是在該階段，主要還是以諸如函數，公元與逆元的概念為主。

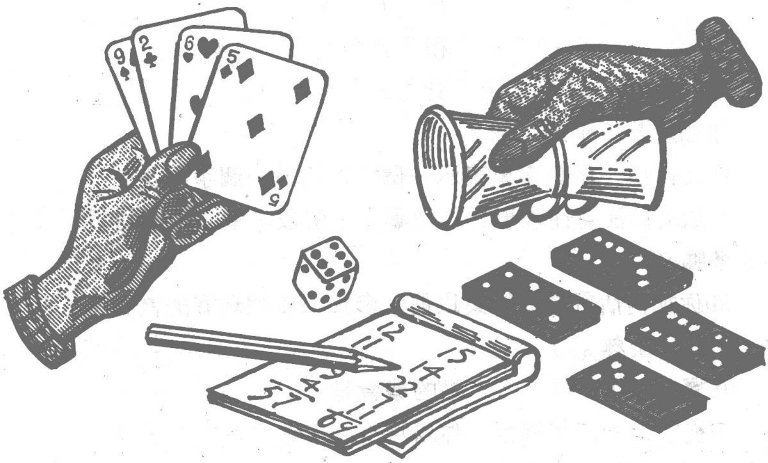
最後，我們考慮兩個傳統的單元。在第4章，我們研究變化率——探討微分的第一步——用一種相當傳統的方式。然而在第9章三角學不是用傳統的方式來處理；在此我們做了一個有意義的嘗試，將三角學從三角形分離出來而代之盡力去顯示波動形式研究的實際重要性。

如同這一序列前面的書一樣，習題解答不印在書末而是包含在教師手册，手册中對學生的課本做了逐章的註釋。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　錄

1
機 率



以考慮博戲起家的一門科學應該被升級到人類知識最重要的課題的地位是值得注意的。

拉普拉斯（Laplace）

1. 機 率

“海浪隊實在不太像會勝神駒隊！”

“丟一枚銅板，出現正面的機會是五十比五十。”

“張三比李四有希望進入校際網球決賽。”

“蘇俄比美國搶先登上月球”

在所有這些敍述中，具有未來可能事件和其一比其餘有希望的機會的比較。我們使用像：“幾乎確定”，“完全不像”，“良機”，“可能”，“甚至”等文字和語辭來做比較。在許多方面這些名詞是夠用的，但是當其比較包含了錢的賠償，不管是賽馬賭注上或計算房子的火災保險費上，就必須更精確了。

(a)你們學校足球隊贏得下次校際足球賽的機會如何？（很好，好，差不多，不好）

回答這些問題之前，你必須考慮那些事實？

(b)當你看着英文書的某一頁時，下列何者最適當：

(i)“ e ”比“ p ”多，

(ii)“ e ”和“ p ”大約一樣多，

(iii)“ p ”比“ e ”多？

你如何做正確的選擇？

你如何用一個數字來表示一個字母比另一個字母多？

(c)如果你注意往來車輛的號碼，十個數字中，你以爲看到3比看到9多嗎？

(d)你如何估計在你畢業以前，參加學校網球賽的機會？（好，適當，不好，全無。）

(e)擲一骰子，得“ 5 ”點的機會是多少？

(f)從甲地到乙地旅行，你以爲下列何者最可能有意外：

(i)汽車　(ii)火車　(iii)輪船　(iv)飛機？

在回答這些問題之前，你需要參考一些過去的經驗。爲對足球賽做有價值的判斷，知道兩隊近年來的賽績是有用的，是否那個隊球員受傷出局，兩隊的強點和弱點等等。這類資料愈多，你對球隊機會的估計愈好。然而，在這種情況下，你仍未能極其精確估計，因爲有許多被考慮的因素難以測量。

一本書中，“ e ”和“ p ”的數目，用數的又快又容易來測定，“ e ”的數目遠超過“ p ”的數目。其它比較適當的敍述，如“ e ”的數目比“ p ”多20倍，雖然誘人，聊無價值。

從4篇文章，比較“ e ”對“ p ”的比數。

當一個試驗在相同的情況下，試驗很多次，像丟銅板或擲骰子，它可能比較精確。

在某一擲骰子的試驗中，擲72 次的結果記錄在圖1，然後將相同的骰子擲240次，結果記錄在圖2。

習題A

1. 上述第一個試驗，6點出現的次數爲3點的兩倍。這是不是意謂着骰子擲得“ 6 ”點的機會是擲得“ 3 ”點的兩倍？

點數		次數
1	卌 卌 1111	14
2	卌 卌 11	12
3	卌 111	8
4	卌 卌 111	13
5	卌 1111	9
6	卌 卌 卌 1	16

圖 1

點數	次數
1	40
2	39
3	44
4	38
5	37
6	42

圖 2

2. 在第二個試驗中，點數1，2，3，4，5，6 每一個在擲240次之中，出現約40次。

(a)這是你所希望的嗎？

(b)擲6000次，你期望5點會出現約多少次？

3. 你以爲一顆骰子擲十二次，恰好會有二次出現“ 3 ”點嗎？如果不是，爲什麼不呢？

4. 擲兩枚硬幣，記下是出現2正面，1正面或0正面。如此重覆試驗(a) 10次(b) 50次(c) 100次。描繪每一種情形的頻率圖形。

(i)　從(a)，(b)和(c)的結果，你推論得一正面和一反面對2正面的相對機會是什麼？那個結果最靠得住？

(ii)　試驗(c)中，得兩正面的分數是什麼？

(iii)　兩枚硬幣，擲1000次，得兩正面的次數約多少？

5. 如果擲3枚硬幣，全部正面的機會多少？用試驗求擲得3正面的分數。

6. 一火柴盒裝3枚紅豆和2枚黃豆，除顏色不同外，其餘完全一樣。有一個試驗，搖動盒子，然後，不看盒子之下取出一粒豆。記下豆的顏色再放回盒子。如此重複60次。你以爲取得黃色的比數約多少？用豆子放在火柴盒裡做試驗，看看結果是否如你估計的一致。

7. 在一火柴盒內做不同顏色豆子的選擇。用豆七粒而且最好不多於3種顏色（例如，2紅，4黃，1藍）。同鄰近的同學交換盒子，重做習題6中的試驗，試着去決定盒子的內容。

8. 在玩遊戲（如大富翁）時，通常一次擲兩枚骰子且算其總點數。可能的總點數是什麼？

得2點的機會和得8分相同嗎？擲一對骰子200次而且每次記下總點數。將你的結果描成頻率圖。是否顯示有些分數比其它的分數出現的機會比較大？你試驗結果得到(a) 2，(b) 4，(c) 7點的分數是多少？

2. 試驗機率

1654年賭徒，騎士Chevalier de Méré，向法國數學家，巴斯卡，討教如何分配骰子遊戲的賭金。巴斯卡和另一個名數學家費爾馬（Fermat）討論該問題，爲解決此問題，他們引發了機率的理論。今天，這個從玩骰子所發展出來的理論已廣泛被應用到經濟學、工業、科學和社會學。

爲了解這些數學家如何測度特別事件發生的機會，考慮圖2，這是記錄擲一枚骰子的結果。骰子擲240次，在此試驗中，出現“5”點有37次。如此導致我們期望，如果用同一枚骰子擲480次，出現“5”點約有74次。換言之，我們假設出現“5”點的比例仍然保持相同。這個假設的有效性有賴於我們取大量數目的投擲試驗，因爲從你所回答的問題中可以看出，小數目的投擲，幾乎各種情形都可能發生。（例如，一枚硬幣擲3次，很容易每次都出現正面，但沒有人會笨到由此推論出，永遠不會出現反面。）

在大量數目試驗之後，將出現“5”點的比數表成一個分數，而且稱它爲如果骰子再次擲出會出現“5”點的**試驗機率**（experimental probability）。

上面所討論的試驗，其試驗機率爲 $\frac{37}{240}$。

出現點數爲：(a) 2，(b) 3，(c) 1的試驗機率是多少？

出現“1”點或“4”點的試驗機率是多少？

“ 6 ”點不出現的試驗機率是多少？

如果從一副樸克牌中，抽得紅桃的機率爲1 ，你推論出什麼？

一骰子出現“ 7 ”點的機率爲何？

如果一枚硬幣丟1000次，出現正面1000次，則再丟一次得正面的機率爲何？關於該硬幣你推論出什麼？

使用下述試驗機率的定義，回答習題B中的問題。

$$試驗機率 = \frac{事件發生的次數}{試驗發生的總次數}$$

習題B

1. 在1和400之間任取一數。以這個當頁碼查尋你的聖詩書中在這頁中有幾首詩。如此試驗60次並記下你的結果。

(a)隨機選取書中含（i）4首，（ii）2首，（iii）多於6首詩的試驗機率是多少？

(b)你能提出任何其它的方法來算出選中含兩首詩的機率嗎？

2.

距離（km）	少於500	500到1000	1000到1500	多於1500
頻度	125	257	328	90

某一大輪胎工廠，保存某一特種輪胎需要換新的使用距離記錄。上表是800個樣品的結果。如果你買了這種輪胎試求下列機率爲何：

(a)在走過500 km以前需要更換者；

(b)繼續使用1000 km以上者；

(c)在走過500到1500 km之間需要更換者？

3. 在玩橋牌時，甲首先打出一張黑桃丁而乙應一張紅桃2 ，問乙無黑桃的機率爲何？

4. 給自己分一組13張的牌， 任抽一張而且記下它的花色，再放回。重洗這13張牌而且重複如此過程40次。

(a)抽得（i）紅桃，（ii）黑桃的試驗機率爲何？

(b)比較你的試驗機率和手中（i）紅桃和（ii）黑桃的比數。你推論到什麼？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

5. 丟一枚硬幣在棋盤上並且記下是否落在方格內。如此做大量次數的試驗，求一枚硬幣落在方格內的試驗機率。

6. 在紙上畫相距 3 cm寬的平行線。丟火柴棒（或大頭針）在紙上而且記下是否壓到線。重複試驗(a) 10 次，(b) 50 次，(c) 150 次。求各種情形火柴棒不壓到線的試驗機率各爲多少？如果重複試驗 1000 次，火柴棒落在平行線之間的次數大約多少？

7. 找出你們學校和你同年齡同學的生日並藉此求出和你同年齡中，其生日在三月的試驗機率。

8. 一次擲兩枚骰子並記下總點數，如此重複大量次數的試驗以求得各總點數的試驗機率。在玩（大富翁）遊戲時，一男孩發現若得點數 3，4，5，6 或 10 他就會“安全”，求他會(a)“安全”，(b)不“安全”的機率。

9. 一次擲 5 枚銅板，用試驗方法，求恰擲得 3 個正面的機率。

10. 在紙片上寫下你的名字和三位朋友的名字並投入一頂帽子裡。用試驗的方法求如果從帽中一次取出兩枚紙片，得：

(a)你的名字和最年長朋友的名字；

(b)你的名字和一朋友的名字，

的機率。

11. 從某一英語字典挑選一單字，此單字多於 4 個字母的試驗機率爲何？換取一法語字典重做一次，並比較兩者的結果。

12. 擲一枚骰子 50 次，記下出現“6”的次數。計算擲得“6”的試驗機率。重做擲 100，150，200（若有時間多做無妨）次。畫函數圖形

拋擲次數 → 試驗機率。

3. 期望機率

在上節執行一連串的試驗，你能決定一事件發生的機會。似乎有另一些人執行了相同的試驗却獲得不同的機率值，雖然它們通常大約相同。常常可能用很不同的方法導出一事件發生的機會。

考慮一枚由完全對稱立方體組成的骰子。因為它是對稱的（除非是裝鉛的）所以有理由說出現“ 1 ”的機會和出現“ 2 ”相同。一枚骰子出現的情形共有六種，因為這些完全相似，所以任一種出現的機會均為 1/6 。這是一枚骰子擲得某一點數的**期望機率**（ expected probability ）而且試驗機率經常逼近於它。

進一步觀察這個例子。一枚骰子擲出可能出現點數的集合為

$$\mathscr{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

假設我們想知道擲得“ 2 ”或“ 3 ”的機率。我們希望出現的結果的集合為

$$S = \{2, 3\}.$$

則**期望機率**（ expected probability ）定義為

$$\frac{S\text{ 中元素的個數}}{\mathscr{E}\text{ 中元素的個數}}$$

因此擲得“ 2 ”或“ 3 ”的期望機率為 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。通常寫成

$$p(S) = \frac{n(S)}{n(\mathscr{E})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

其中 $p(S)$ 表事件 S 的期望機率，而 $n(S)$ 和 $n(\mathscr{E})$ 依次表 S 和 $\mathscr{E}$ 中**元素個數**（ number of elements ）。

例：1

考慮一副樸克牌抽得A的機率。

在此，可能結果的集合為

$$\mathscr{E} = \{\text{所玩一副牌中的 52 張牌}\}$$

且我們希望的事件為

S = {紅桃A，梅花A，方塊A，黑桃A}。

抽得A的機率為

$$p(S) = \frac{n(S)}{n(\mathscr{E})} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

在本章剛開始，一次擲兩枚骰子的時候，你可能驚奇發現到得 7 點的機會比得 12 點大很多。這是直覺導致的錯誤。為討論方便，假設

骰子一枚爲紅色和一枚爲藍色。兩枚一起擲出，會有若干不同的出現方式？

爲有助於回答這個問題，考慮當紅色骰子早已擲得，(a)“ 1 ”，(b)(b)“ 2 ”，(c)“ 3 ”，…，(f)“ 6 ”時，藍色骰子能出現的方法數。

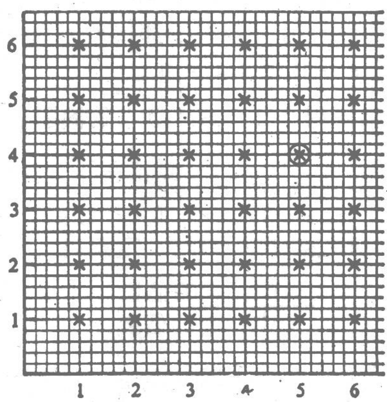


圖 3

這些可能性能夠簡潔地表現在圖 3 的方格紙上。每一個叉表是一個可能的結果。例如，打圈的叉表示紅色骰子出現“ 5 ”且藍色骰子出現“ 4 ”。通常表成有序對（4，5）。

（4，5）表示什麼？

在方格紙上仿傚圖 3 ，標出有序數對（2，3），（3，1）和（6，6）。這些表示如何以骰子說明？

在一試驗中，表示總點數爲 7 的叉有多少？（例如，（2，5）。）

擲 2 枚骰子得 7 點的機率是多少？

例：2

計算兩枚骰子擲得 5 點的期望機率。

$$\mathscr{E} = \{\text{ 2 枚骰子能出現的不同方式 }\},$$

$$S = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}.$$

因此得 5 點的期望機率爲

$$p(S)=\frac{n(S)}{n(\mathscr{E})}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

例：3

隨機從 Anthony, Brian, Colin, Donald, Dennis 和 Eric 中選出一男孩。選中名由D字開頭的男孩的機率爲何？

$\mathscr{E}$ = {Anthony, Brian, Colin, Donald, Dennis, Eric},
S = {Donald, Dennis}.

因此選中名以D開頭的男孩的機率爲

$$p(S)=\frac{n(S)}{n(\mathscr{E})}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

習題C

1. 一枚骰子擲出，得點數爲質數的期望機率爲何？
2. 一枚5元和一枚1元硬幣一起擲出。求
(a)兩正面，
(b)不全爲正面，
的機率。
3. 兩枚骰子一起擲出。求每一種可能出現的點數的機率。這些機率的總和又如何？
4. 一箱巧克力已經賣了324張彩票。如果你已經買了3張票你抽中這箱巧克力的機率是多少？
5. 一枚一元硬幣和一枚骰子一起擲出，可能出現的結果的集合爲何？求擲得一正面且點數大於4的機率？
6. 從一副樸克牌中，隨機取一張牌，取得大牌的期望機率是多少？
7. 用兩枚正四面體當骰子且在面上標以1,2,3,4。利用有序數對列表表示一起擲出可能出現的結果。出現兩數乘積爲12 的機率是什麼？
8. Andrew（男），Betty（女），Christine（女）和David（男）的名字放在一頂帽子裡，選取兩名比賽代表。用表表示從帽子抽出所有可

能的名字對。抽得下列情的機率爲何？

(a) Andrew和David； (b)一男和一女；

(c)一對中含 Betty； (d)一對中不含 David。

9. 足球賽結束的方式有3種；本地隊贏（W），和（D），或輸（L）。列出兩局比賽結束9種不同的結果。假設每局W，D或L的機會相同，求下列各機率：

(a)兩局均和。 (b)無局爲和。

10. 在玩樸克牌平手時常常由每一位參加比賽者，從整副牌中各取一張牌，點數及花色最高者贏。如果第一個人抽得“方塊9”，第二個人抽得牌贏他的機率爲何？

11. (a)一次擲3枚一元硬幣，可能出現的結果是什麼？

(b)求出現：（i）3個正面，（ii）2個正面和一個反面，（iii）一個正面和2個反面，（iv）3個反面，的機率。

(c)沒出現正面的機率是多少？

(d)得4個正面的機率是什麼？

(e)某一試驗，3枚硬幣擲80次。這些試驗中同時出現3個正面的情形有8次。你是否因此認爲硬幣顯然不均勻？

12. 某事件發生的優勝率爲如下的比

該事件發生的機率：該事件不發生的機率。

例如，擲2枚硬幣，得2正面的優勝率爲

2正面的機率：不是2正面的機率

$$= \frac{1}{4} : \frac{3}{4}$$

$$= 1 : 3$$

一次擲3枚硬幣，求擲得下列結果的優勝率：

(a) 3正面； (b) 2正面和一反面； (c)一正面和2反面；

(d) 3反面； (e)至少一正面； (f)多於一反面。

4. 隨機選取

“隨機”一詞在前節已經用過。看過下列一些例子就會看出隨機選取極易被歪曲。

(a)回顧第 8 頁例 3 。你如何隨機（atrandom）選取某一男孩？

你能基於：

（i）從一頂“帽子”抽出，(ii)擲一枚骰，（iii）任何其它方式來考慮方法？

(b)要求某一朋友從 5 和 12 之間隨機取一數。

理論上 5 到 12 之間的數有相同的機會被選出來，可是實際上那個數被選中的次數最爲頻繁？

(c)你想從你的學校隨機選出三位同學，來觀察同學上學的情形。如果上課幾分鐘前到校而且選取三個成群一起上學而來的學生有何不妥？

(d)某一麥片製造廠商想要了解民衆在早餐吃麥片粥的情形。

他們隨機打開倫敦電話簿而且和該頁上的每一戶連絡。發現有80%的人在早餐吃麥片粥。

你能解釋他們的隨機樣本有何錯誤？

習題D

1. 你想預言地方選舉的結果，爲此在某一週一上午 11 點你到大街上和人行道上的行人交談。你得到的是隨機樣本嗎？

2. “昨晚有 $3\frac{1}{4}$ 百萬的人觀看電視上的轉播。”

這個訊息如何獲得？

3. 某一洗碟機製造廠商想知道他們的機器被大衆使用的百分率。爲此他們從電話簿隨機選取樣本。他們的樣本是否有所偏差？

4. “在一 10 個家庭主婦的隨機樣本中，有 9 個喜愛用K牌洗潔精”。關於樣本的隨機性和訊息獲得的方法，你想向廣告商問什麼問題？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com