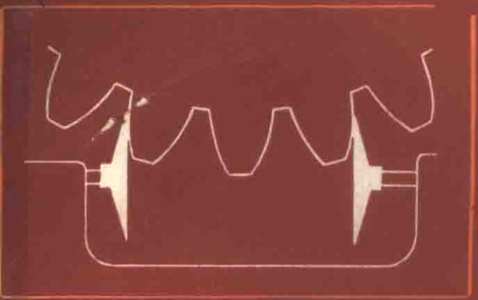

计　量　出　版　社

CHilun Celiang Jishu
Duanwen Xuanbian

轮测量技术短文选编 .1.

齿轮测量技术短文选编

（第 一 集）

计 量 出 版 社

1983·北京

内 容 提 要

本书收集了计量测试工作者撰写的十八篇短文。主要讨论了双啮合高精度齿轮的标准齿轮精度的检定方法、小模数直齿圆锥齿轮齿厚、两圆柱外啮合齿轮中心距、精密奇数齿直齿圆柱齿轮齿顶圆直径、人字齿轮对齿误差和套筒滚子链轮齿形等项目的测量及计算方法。书中对现有的测量方法和测量装置进行了精度分析，并对结构提出了改进措施。本书适于计量测试人员和车间检验员阅读，也可供工程技术人员和大专院校师生参考。

齿轮测量技术短文选编

（第 一 集）

计量出版社出版
（北京和平里11区7号）
北京计量印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32　印张 4 3/8
字数 98 千字　印数 1—12 000
1984年2月第一版　1984年2月第一次印刷
统一书号 15210•299

定价 0.69 元

前　　言

随着国民经济的迅速发展，长度计量工作也日新月异。根据被测对象的技术要求和测量条件来选择测量方法是计量测试工作者在实际工作中迫切需要解决的问题。我们收集了计量测试工作者撰写的有关齿轮测量技术方面的短文汇编成册，以供读者参考。

本书所介绍的测量方法，大部分经实践证明是行之有效的；一部分是属于探讨性质的；还有一部分方法虽然总的说来是可行的，但其中某些环节可能还存在不足。本书的宗旨在于交流经验，启发思维，推动精密测试技术的发展，使齿轮的测量方法臻于完善。为此，希望广大读者在参考本书所涉及的技术方法时，注意分析研究，力求有所创造发展。

计量出版社编辑部

目　　录

一、标准齿轮双啮综合误差的检定

在新国标“小模数渐开线圆柱齿轮精度制”GB2363—80中，推荐优先应用双啮综合检验，并对径向综合误差$\Delta F_i''$和径向相邻齿综合误差$\Delta f_i''$的公差，规定到3级精度。因此，对于高精度齿轮，其双啮综合检验用的标准齿轮的精度检定，已成为一个急需解决的问题。从功能观点来看，对双啮综合检验用的标准齿轮，只检定其单项误差显然是不够的，还必须检定其双啮综合误差$\Delta F_i''$和$\Delta f_i''$。本文提出用组合测量法来检定标准齿轮的径向综合误差，并比较几种方法的测量精度。

（一）用二轮互检法和三轮互检法检定

在现有的一些文献中，推荐采用误差消除法来检定标准齿轮的双啮综合误差。如文献〔1〕推荐采用两个标准齿轮互检，错位对滚，找出最大读数；然后将被检齿轮由最大读数位置错位180°，再测量一次，取得最小读数。按下式计算二轮的径向综合误差：

$$\left.\begin{aligned}\Delta F''_{iA} &= (\Delta F''_{iAB_{\max}} + \Delta F''_{iAB_{\min}})/2 \\ \Delta F''_{iB} &= (\Delta F''_{iAB_{\max}} - \Delta F''_{iAB_{\min}})/2\end{aligned}\right\} \qquad (1-1)$$

式中 $\Delta F''_{iA}$和$\Delta F''_{iB}$——齿轮A和B的径向综合误差；

$\Delta F''_{iAB_{\max}}$和$\Delta F''_{iAB_{\min}}$——错位对滚所测得的最大和最小径向综合误差。

文献〔2〕推荐采用三轮法来检定标准齿轮的径向综合误差。所谓三轮法，就是将三个被检齿轮A、B和C两两错

位对滚，找得最大径向综合误差 F''_{iAB}、F''_{iBC} 和 F''_{iAC}，然后按下式计算每个齿轮的径向综合误差：

$$\left.\begin{aligned}\Delta F''_{iA} &= \frac{1}{2}(\Delta F''_{iAB} - \Delta F''_{iBC} + \Delta F''_{iAC}) \\ \Delta F''_{iB} &= \frac{1}{2}(\Delta F''_{iAB} + \Delta F''_{iBC} - \Delta F''_{iAC}) \\ \Delta F''_{iC} &= \frac{1}{2}(\Delta F''_{iBC} + \Delta F''_{iAC} - \Delta F''_{iAB})\end{aligned}\right\} \quad (1—2)$$

设双啮综合检验单次测量的标准误差为 σ_a，则三轮互检法的标准误差为：

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_a = 0.866\,\sigma_a \qquad (1—3)$$

二轮互检法的标准误差大于三轮法，这是因为由最大读数位置错位 180° 后所测得的值，未必是最小读数。

由公式（1—3）可知，采用三轮互检法，虽然可以测得每个齿轮的径向综合误差，但其测量精度比单次测量提高得不多。

（二）用组合测量法检定径向综合误差

采用这种方法，可以有效地减小偶然误差，提高测量精度。作者提出采用四个和五个相同齿数的标准齿轮进行组合测量。

1. 四个齿轮的组合测量

设四个被检齿轮的径向综合误差分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，两两互检，错位对滚后找得的最大读数分别为 l_1、l_2、…l_6，则可写出误差方程如下：

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=l_1\\x_1+x_3&=l_2\\x_1+x_4&=l_3\\x_2+x_3&=l_4\\x_2+x_4&=l_5\\x_3+x_4&=l_6\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}4)$$

测量值的剩余误差 v_i 可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=l_1-(x_1+x_2)\\v_2&=l_2-(x_1+x_3)\\v_3&=l_3-(x_1+x_4)\\v_4&=l_4-(x_2+x_3)\\v_5&=l_5-(x_2+x_4)\\v_6&=l_6-(x_3+x_4)\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}5)$$

剩余误差的矩阵表示式为：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{AX}\qquad(1\text{—}6)$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\\vdots\\v_6\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\\vdots\\l_6\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

正规方程为：

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{L}\qquad(1\text{—}7)$$

式中　$\boldsymbol{A}'$——矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵。

正规方程的矩阵解为：

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{L}\qquad(1\text{—}8)$$

对于四个齿轮的组合测量，由上式可解得：

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}(l_1+l_2+l_3)-\frac{1}{6}(l_4+l_5+l_6)\\
x_2 &= \frac{1}{3}(l_1+l_4+l_5)-\frac{1}{6}(l_2+l_3+l_6)\\
x_3 &= \frac{1}{3}(l_2+l_4+l_6)-\frac{1}{6}(l_1+l_3+l_5)\\
x_4 &= \frac{1}{3}(l_3+l_5+l_6)-\frac{1}{6}(l_1+l_2+l_4)
\end{aligned}\right\} \qquad (1—9)
$$

测量数据的标准误差按下式计算：

$$
\sigma=\sqrt{\frac{[vv]}{n-t}}=\sqrt{\frac{[vv]}{2}} \qquad (1—10)
$$

式中　n——测量次数，即误差方程的个数，这里$n=6$；

t——未知量的个数，这里$t=4$。

估计量的标准误差为：

$$
\sigma_{x1}=\sigma_{x2}=\sigma_{x3}=\sigma_{x4}=\sigma\sqrt{d_{11}} \qquad (1—11)
$$

设有不定乘数

$$
\begin{matrix}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14}\\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24}\\
d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34}\\
d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44}
\end{matrix}
$$

将不定乘数d_{11}、d_{12}、d_{13}、d_{14}代替正规方程的x_1、x_2、x_3、x_4，方程右边代以1、0、0、0，即得不定乘数的方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
3d_{11}+d_{12}+d_{13}+d_{14}&=1\\
d_{11}+3d_{12}+d_{13}+d_{14}&=0\\
d_{11}+d_{12}+3d_{13}+d_{14}&=0\\
d_{11}+d_{12}+d_{13}+3d_{14}&=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1—12)
$$

由上列方程组可解得$d_{11}=\frac{5}{12}$，于是得：

$$\sigma_x=\sigma\sqrt{\frac{5}{12}}=0.645\,\sigma \qquad (1—13)$$

2. 五个齿轮的组合测量

对于五个齿轮的组合测量，可写出如下误差方程组：

$$\left.\begin{aligned}
x_1+x_2&=l_1\\
x_1+x_3&=l_2\\
x_1+x_4&=l_3\\
x_1+x_5&=l_4\\
x_2+x_3&=l_5\\
x_2+x_4&=l_6\\
x_2+x_5&=l_7\\
x_3+x_4&=l_8\\
x_3+x_5&=l_9\\
x_4+x_5&=l_{10}
\end{aligned}\right\} \qquad (1—14)$$

用同法可求得：

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\frac{1}{4}(l_1+l_2+l_3+l_4)-\frac{1}{12}(l_5+l_6+l_7+\\
&\quad+l_8+l_9+l_{10})\\
x_2&=\frac{1}{4}(l_1+l_5+l_6+l_7)-\frac{1}{12}(l_2+l_3+l_4+\\
&\quad+l_8+l_9+l_{10})\\
x_3&=\frac{1}{4}(l_2+l_5+l_8+l_9)-\frac{1}{12}(l_1+l_3+l_4+\\
&\quad+l_6+l_7+l_{10})
\end{aligned}\right\} \qquad (1—15)$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_4 &= \frac{1}{4}(l_3 + l_6 + l_8 + l_{10}) - \frac{1}{12}(l_1 + l_2 + l_4 + \\
&\quad + l_5 + l_7 + l_9) \\
x_5 &= \frac{1}{4}(l_4 + l_7 + l_9 + l_{10}) - \frac{1}{12}(l_1 + l_2 + \\
&\quad + l_3 + l_5 + l_6 + l_8)
\end{aligned}\right\}
$$

测量数据的标准误差为：

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{n-t}} = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{5}} \tag{1—16}$$

估计量的标准误差为：

$$\sigma_x = \sigma\sqrt{d_{11}} = \sigma\sqrt{\frac{7}{24}} = 0.54\,\sigma \tag{1—17}$$

由公式（1—13）和（1—17）可知采用组合测量时，测量精度可得到很大的提高。

（三）测量实例及精度分析

我们加工了五个标准齿轮，其参数如下：模数 $m = 1.5$ 毫米，齿数 $Z = 17$。将五个标准齿轮互相组合，两两错位对滚测量，测得最大径向综合误差，见图左边图形。现将测量结果列入表 1—1，表中同时列出了按式(1—15)求得的 x_i 值以及剩余误差值 ν_i。最后按式（1—16）计算测量数据的标准误差：

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\nu\nu]}{5}} = 1.5\text{微米}$$

估计量的标准误差为：

$$\sigma_x = 0.54\sigma = 0.81\text{微米}$$

我们同时将这五个齿轮按三轮法互检，组成 10 组，对每组齿轮，按表1—1的测量数据和公式（1—2）求得每个齿轮的 x_i 值，计算结果见表 1—2。

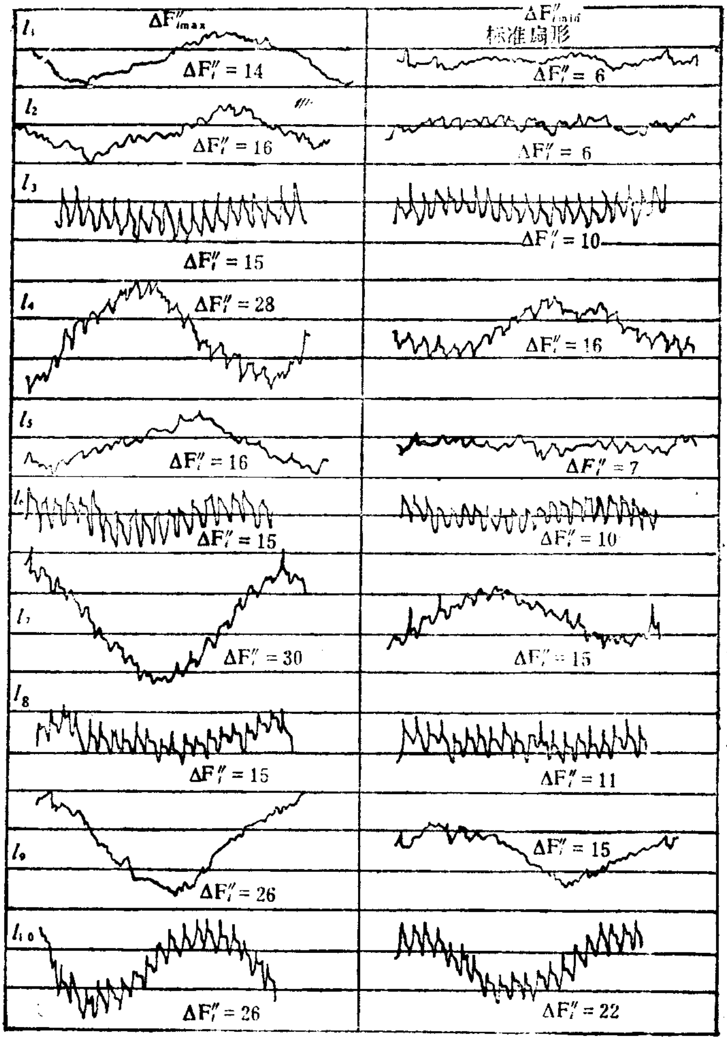

图1—1　测得的双啮误差曲线

因为每个齿轮组合 6 次，故共求得 6 个值。为了求出三轮法的标准误差，对每 6 个 x_i 值，求出其平均值（值得注意的是，这样求得的 x_i 值的平均值，与用五轮组合测量法所求得的值是完全相同的，见表 1—1），并按下式算出其标准误差：

$$\sigma_{3i}=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{6-1}}=\sqrt{\frac{[\nu\nu]}{5}} \tag{1—18}$$

计算结果见表1—2最后一行。这样共求得五个 σ_{3i} 值，最后取其平均值作为三轮法的标准误差。五个 σ_{3i} 值的平均值为：

$$\sigma_3=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}\sigma_{3i}}{5}=1.1\text{微米}$$

表 1—1　五个齿轮组合测量的计算结果　　（微米）

组合齿轮	x_1+x_2	x_1+x_3	x_1+x_4	x_1+x_5	x_2+x_3	x_2+x_4
测量值 l_i	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
	14	16	15	28	16	15
求得的值 x_i	x_1		x_2		x_3	
	7.58		8.25		7.58	
剩余误差 ν_i	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6
	−1.83	0.84	0.5	0.5	0.17	−0.17

组合齿轮	x_2+x_5	x_3+x_4	x_3+x_5	x_4+x_5
测量值 l_i	l_7	l_8	l_9	l_{10}
	30	15	26	26
求得的值 x_i	x_4		x_5	
	6.92		19.92	
剩余误差 ν_i	ν_7	ν_8	ν_9	ν_{10}
	1.83	0.5	−1.5	−0.84

表 1—2　　用三轮法求得的10组齿轮的 x_i 值　　(微米)

组号	组合齿轮			测量值			求得的值 x_i				
							x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2=14$	$x_2+x_3=16$	$x_1+x_3=16$	7	7	9		
2	x_1	x_2	x_4	$x_1+x_2=14$	$x_2+x_4=15$	$x_1+x_4=15$	7	7		8	
3	x_1	x_2	x_5	$x_1+x_2=14$	$x_2+x_5=30$	$x_1+x_5=28$	6	8			22
4	x_2	x_3	x_4	$x_2+x_3=16$	$x_3+x_4=15$	$x_2+x_4=15$		8	8	7	
5	x_2	x_3	x_5	$x_2+x_3=16$	$x_3+x_5=26$	$x_2+x_5=30$		10	6		20
6	x_3	x_4	x_5	$x_3+x_4=15$	$x_4+x_5=26$	$x_3+x_5=26$			7.5	7.5	18.5
7	x_1	x_3	x_4	$x_1+x_3=16$	$x_3+x_4=15$	$x_1+x_4=15$	8		8	7	
8	x_1	x_3	x_5	$x_1+x_3=16$	$x_3+x_5=26$	$x_1+x_5=28$	9		7		19
9	x_1	x_4	x_5	$x_1+x_4=15$	$x_4+x_5=26$	$x_1+x_5=28$	8.5			6.5	19.5
10	x_2	x_4	x_5	$x_2+x_4=15$	$x_4+x_5=26$	$x_2+x_5=30$		9.5		5.5	20.5
平均值							7.58	8.25	7.58	6.92	19.92
标准误差 σ_{3i}							1.11	1.26	1.02	0.86	1.24

通过以上计算实例，可见五轮组合测量法的标准误差比三轮法减小约 0.3 微米，估计量的标准误差 σ_x 仅 0.8 微米，测量方法误差 $3\sigma_x = 2.4$ 微米。因此，这种测量方法可用来检定新国标 3 级精度的齿轮。

至于二轮互检法，由于径向相邻齿综合误差 $\Delta f_i''$ 的影响，径向综合误差的最小读数 $\Delta F_i''_{min}$（见图右边图形）不能真实反应误差的抵消情况，故此法的测量误差是比较大的。我们根据图所示 10 对齿轮的最大和最小读数（最小读数是由最大读数位置错位 180° 后读得的），按公式（1—1）计算各个齿轮的 $\Delta F_i''$ 值，计算结果见表1—3。因每个齿轮组合四次，故有四个值，从表中数值可见各次数值的差异甚大，这是由于 Δf_i 较大之故。因此，当 $\Delta f_i'$ 在 $\Delta F_i'$ 中占有较大的份额时，二轮互检法是不适用的。

表 1—3　用二轮法求得的10组齿轮的 x_i 值　　(微米)

组号	组合齿轮	最大读数 $\Delta F''_{imax}$	最小读数 $\Delta F''_{imin}$	求得的值 x_i				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1 x_5	28	16	6				22
2	x_2 x_5	30	15		7.5			22.5
3	x_3 x_5	26	15			5.5		20.5
4	x_4 x_5	26	22				2	24
5	x_1 x_4	15	10	12.5			2.5	
6	x_2 x_4	15	10		12.5		2.5	
7	x_3 x_4	15	11			13	2	
8	x_1 x_3	16	6	11		5		
9	x_2 x_3	16	7		11.5	4.5		
10	x_1 x_2	14	6	10	4			

（四）径向相邻齿综合误差的检定

文献〔1〕推荐采用三轮互检法检定 $\Delta f_i'$，并认为齿轮 A 和 B 的 $\Delta f_{iAB}'$ 为单个齿轮的 $\Delta f_{iA}'$ 和 $\Delta f_{iB}'$ 之和，故可按下式

计算每个齿轮的$\Delta f_i''$：

$$\left.\begin{aligned}\Delta f_{iA}'' &= \frac{1}{2}(\Delta f_{iAB}'' - \Delta f_{iBC}'' + \Delta f_{iAC}'')\\ \Delta f_{iB}'' &= \frac{1}{2}(\Delta f_{iAB}'' + \Delta f_{iBC}'' - \Delta f_{iAC}'')\\ \Delta f_{iC}'' &= \frac{1}{2}(\Delta f_{iBC}'' + \Delta f_{iAC}'' - \Delta f_{iAB}'')\end{aligned}\right\} \qquad (1-19)$$

有人认为两个齿轮的$\Delta f_{iAB}''$为单个齿轮的$\Delta f_{iA}''$和$\Delta f_{iB}''$之差[2]，并认为由于双啮误差曲线不能识别$\Delta f_i''$的正负号，故只可写出下列方程组：

$$\left.\begin{aligned}|\Delta f_{iA}'' - \Delta f_{iB}''| &= \Delta f_{iAB}''\\ |\Delta f_{iB}'' - \Delta f_{iC}''| &= \Delta f_{iBC}''\\ |\Delta f_{iC}'' - \Delta f_{iA}''| &= \Delta f_{iAC}''\end{aligned}\right\} \qquad (1-20)$$

即

$$\left.\begin{aligned}\pm(\Delta f_{iA}'' - \Delta f_{iB}'') &= \Delta f_{iAB}''\\ \pm(\Delta f_{iB}'' - \Delta f_{iC}'') &= \Delta f_{iBC}''\\ \pm(\Delta f_{iC}'' - \Delta f_{iA}'') &= \Delta f_{iAC}''\end{aligned}\right\} \qquad (1-21)$$

上式是不可解的，故不能由此方程求出$\Delta f_{iA}''$、$\Delta f_{iB}''$和$\Delta f_{iC}''$。

作者通过试验，证明两个齿轮的$\Delta f_{iAB}''$，可能是单个齿轮的$\Delta f_{iA}''$与$\Delta f_{iB}''$之和，也可能是二者之差，由两个齿轮的边缘基节偏差是同号还是异号而定。同号时为二者之差；异号时为二者之和。因此，我们认为对于$\Delta f_i''$的检定，三轮法是不适用的。

文献〔2〕提出在标准齿轮上确定$\Delta f_i''$足够小（$\Delta f_i'' \leq 2$微米），约1/6圆周的扇形，把它当作检定$\Delta f_i''$的标准量具。此法是切实可行的。我们从10对齿轮的双啮误差曲线中，