

十二年制学校初級中学課本

# 平面几何

PINGMIAN JIHE

(試教本)

第一册

(供二年級一学年用)

人民教育出版社

## 引 言

在生产劳动中，常常要研究和确定物体的形状、大小和相互的位置关系。例如，制造各种生产工具和生活用具，都要根据它们的不同的用途，确定它们的不同的形状和大小，规划耕地、兴修水利、铺设铁路、建筑厂房，都要考虑最适当的位置。在进一步学习数学、物理以及其他各种科学技术的时候，也经常要接触到各种物体的形状、大小和相互的位置关系。因此，研究物体的形状、大小和相互间的位置关系，可以为进一步学习和参加社会主义建设作好必要的准备。

研究物体的形状、大小和相互间的位置关系的科学叫做几何学。

十二年制学校初級中学課本平面几何(試教本)第一册

目 录

引 言

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 第一章 緒論                | 1   |
| I 基本概念                | 1   |
| II 直綫                 | 6   |
| III 圓和弧               | 18  |
| IV 角                  | 21  |
| V 定义、公理、定理            | 49  |
| 第二章 平行綫               | 67  |
| 第三章 三角形               | 95  |
| I 三角形和它的內角和           | 95  |
| II 等腰三角形              | 112 |
| III 全等三角形             | 125 |
| IV 綫段的垂直平分綫和角的平分綫     | 149 |
| V 三角形的作图              | 156 |
| VI 三角形的边角关系           | 166 |
| 第四章 四边行               | 186 |
| I 平行四边行               | 186 |
| II 几种特殊的平行四边行         | 202 |
| III 以平行四边行的性质为基础的一些定理 | 210 |
| IV 梯形                 | 222 |
| 第五章 多边形的面积            | 234 |

# 第一章 緒論

## I 基本概念

### 1.1 体、面、綫、点

1. 体 我們来看图 1.1 所示的紙盒、木块和铁块，它們的顏色、重量、硬度以及制造它們的材料都不相同，但是它們的形狀和大小相同。

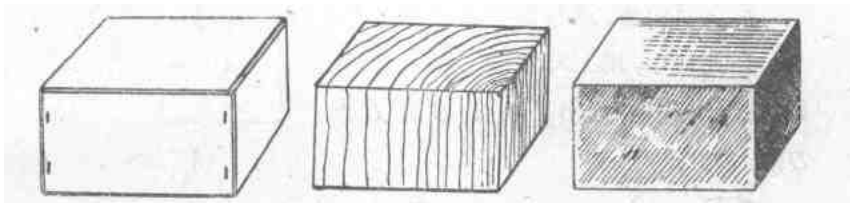


图 1.1

如果只研究一个物体的形状和大小，而不考虑它的其他性质，我們就把这个物体叫做**几何体**，简称**体**。

体都有长短、寬狹和高低(厚薄)，都占有一定的空間。我們說：

**体有长、寬和高。**

2. **面** 一个长方体的木块是用它的六个面作为界限的，一个鉛球也是用它的表面作为界限的。

**面是体的界限。**

**面只有长和寬，沒有高。**

3. **綫** 长方体的每一个面是用它的四条棱来和相邻接的

面分开的，这四条棱就是这个面的界限。如果把一张白纸上的一部分涂上某种颜色(图 1.2)，涂着颜色的部分和白色的部分是由一条封闭的线分开的，这条封闭的线就是这张纸上涂着颜色的部分的界限。

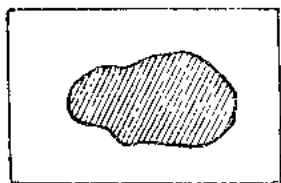


图 1.2

线是面的界限。

线只有长，没有宽和高。

4. 点 长方体的每一条棱是用它的两个端点来和相邻接的棱分开的，这两个端点就是这条棱的界限。

点是线的界限。

点只有位置，没有大小。

在几何中，用大写字母来表示点。例如，在图 1.3 中，画出了 A 点、B 点、C 点、D 点、E 点。

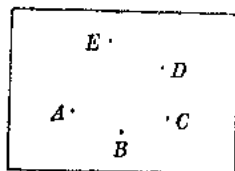


图 1.3

### 练习

1. 几何学研究的是什么?
2. 下面所举的一些性质，哪一些是属于几何学所研究的范围之内的?

一个物体是绿的，

一个物体是脆的，

一个物体是球形的，

一个物体重 3 公斤，

一个物体的体积是 4 立方公分。

3. 举出一些实例来说明体、面、线、点。

1.2 直线 把一张纸对折过来，折痕成为直线的形状(图 1.4)。紧紧拉着的细线也成直线的形状



图 1.4

(图 1.5), 如果把这条細綫放松, 就变成曲綫的形状(图 1.6).



图 1.5



图 1.6

作直綫可以用直尺, 把直尺放在紙上, 沿着直尺的边可以作出直綫.

經過一点可以作无数条直綫, 經過两点就只可以作一条直綫. 这說明了直綫有下面的性质:

**經過两点可以作一条直綫, 并且只可以作一条直綫.**

在实践中經常用到直綫的性质, 例如, 要在平地上确定一条直綫, 我們先把一根标杆插到地上, 然后在另一个地方插上第二根标杆, 这两根标杆着地的两点就确定了一条直綫, 根据这两根标杆可以确定直綫上的其他各点(图 1.7). 又如, 鋸木料时, 我們先在木料两端的两点之間, 彈出一条直綫, 然后根据这条

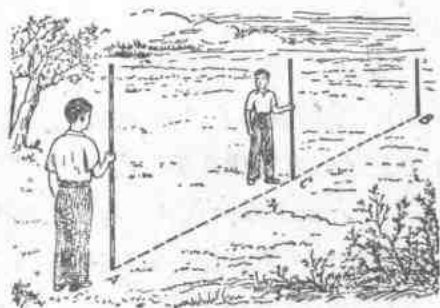
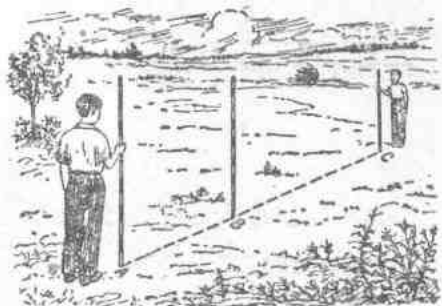


图 1.7

直線來鋸開木料(圖 1.8)。



圖 1.8

應用直線的性质,还可以檢查直尺的边直不直. 方法是:先选定两个点,让尺边紧靠这两点,經過这两点沿尺边画一条綫,再把尺調轉过来,放在所画的綫的另一側,經過这两点沿尺边再画一条綫. 如果两次画出的綫相重合,就可以确定尺边是直的(圖 1.9 甲),否則就不直(圖 1.9 乙).



圖 1.9

从上面所說的性质,可以推出:

**两条直綫相交,只有一个交点.**

这是因为,如果有两个交点,那么这两条直綫就要重合成一条直綫.

### 练习

1. 在紙上取一点  $A$ , 經過这点用直尺任意作 4 条直綫. 能不能經過这点再作几条直綫?
2. 在紙上取两点  $A$ 、 $B$ , 經過这两点用直尺作一条直綫. 能不能經過这两点再作一条直綫?
3. 应用直綫的性质檢查你的直尺的边直不直.

**1.3 平面** 平靜的水面、磨平的鏡面都成为平面的形状.

把一根直尺的边放在磨平的鏡面上，無論把这根尺的边放在什么地方，只要經過鏡面上的两点，边上所有的点就都紧貼在鏡面上。这說明了平面的性质：

經過平面內任意两点作一条直綫，这条直綫上所有的点都在这个平面內。

### 练习

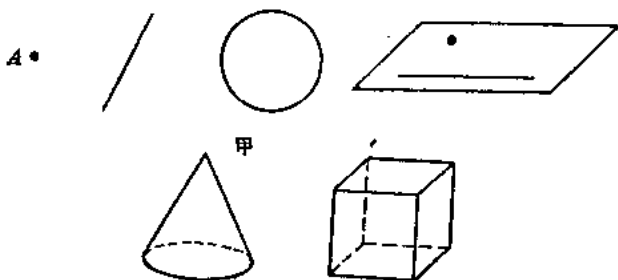
1. 說明怎样用一根直尺来檢驗木板刨平了沒有。
2. 用直尺檢驗一下你用的課桌面是不是一个平面。
3. 根据平面的性质来檢驗一个圓柱的底面是不是平面，圓柱的側面是不是平面。



(第3題)

1.4 几何图形 点、綫、面、体或者它們的組合，叫做几何图形，简称图形(图 1.10)。

几何图形分平面的和立体的两种，如果图形上所有的点都在一个平面內，这个图形叫做平面图形(图1.10甲)；如果图形上所有的点不都在一个平面內，这个图形叫做立体图形(图1.10乙)。



乙  
图 1.10

只研究平面图形的几何学叫做平面几何学。



## 习 題 一

1. 在几何学中,我們研究物体的哪些性质?
2. 体的界限是什么?面的界限是什么?綫的界限是什么?
3. 面有没有长短,有没有寬狹,有没有厚薄?綫呢?点呢?
4. 在紙上任意取四个点,分別用字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  来表示它們.
5. 經過一点可以作几条直綫?經過两点呢?在紙上任意取三个点,能不能經過这三个点作一条直綫?
6. 要在牆上釘穩一根橫木条,至少要釘几个釘?为什么?
7. (1) 在紙上任意取不在一条直綫上的三个点,經過每两点用直尺作一条直綫,一共可以作几条直綫?  
(2) 在紙上任意作不經過一点的三条直綫,使每两条都相交,一共有几个交点?
8. 作两条相交于  $A$  点的直綫,在这两条直綫外任意取一点  $B$ ,經過  $A$ 、 $B$  两点作一条直綫.
9. 平面有什么性质?如果一条直綫上所有的点都在一个面內,这个面一定是平面嗎?为什么?
10. 什么叫做几何图形?什么叫做平面图形?什么叫做立体图形?各举一个例子.

## II 直綫

**1.5 直綫、射綫、綫段** 几何中所說的直綫,都是向两方无限伸长着,它沒有端点.

直綫用表示它上面任何两点的两个大写字母来表示,如“直綫  $AB$ ”(图 1.11);也可以用一个小写字母来表示,如“直綫  $l$ ”(图 1.12).



图 1.11

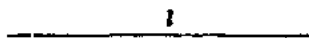


图 1.12

在直线上某一点一旁的部分叫做射线。射线是向一方无限伸长着，它有一个端点。

射线用表示它的端点和射线上另外任何一个点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面，如“射线  $OC$ ”(图 1.13)。

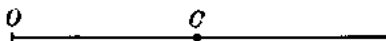


图 1.13

直线上任意两点间的部分叫做线段。线段有两个端点。

线段用表示它的两个端点的大写字母来表示，如“线段  $AB$ ”(图 1.14)；也可以用一个小写字母来表示，如“线段  $a$ ”(图 1.15)。



图 1.14

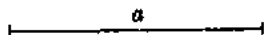


图 1.15

利用直尺，我们可以把一条线段向两方任意延长。例如，我们可以从  $B$  点把线段  $AB$  延长(图 1.16)，也可以从  $A$  点把这条线段延长(图 1.17)。照前一种情形，我们说延长  $AB$ ；照后一种情形，我们说延长  $BA$ ，或者说反向延长  $AB$ 。延长部分叫做原线段的延长线(图 1.16 和 1.17 中用虚线表示的部分)。

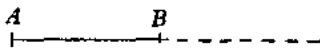


图 1.16

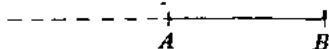


图 1.17

### 练习

1. 图中的直线  $a$  和直线  $b$  相交于哪一点？ $b$  和  $c$  呢？ $c$  和  $a$

呢？分別用兩個大寫字母來表示直線  $a$ 、 $b$  和  $c$ 。

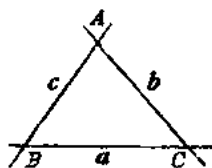
2. 取一點  $O$ ，以  $O$  點為端點作兩條射線，用大寫字母表示這兩條射線。

3. 一條綫段有幾個端點？一條射綫呢？一條直綫呢？

4. (1) 任意作一條綫段  $AB$ ，再延長  $AB$ 。

(2) 任意作一條綫段  $CD$ ，再延長  $DC$ 。

(3) 任意作一條綫段  $EF$ ，再反向延長  $EF$ 。



(第 1 題)

**1.6 綫段的比較** 要比較兩條綫段  $AB$ 、 $CD$  的長短，可以把  $AB$  放到  $CD$  上，使  $A$  點和  $C$  點重合，綫段  $AB$  順着綫段  $CD$  落下，如果  $B$  點和  $D$  點重合(圖 1.18)，那麼綫段  $AB$  和綫段  $CD$  相等。這時可以寫成： $AB=CD$  或者  $CD=AB$ ；

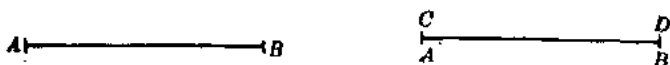


圖 1.18

如果  $B$  點落在  $C$ 、 $D$  兩點之間(圖 1.19)，那麼綫段  $AB$  較短，這時可以寫成： $AB<CD$  或者  $CD>AB$ ；



圖 1.19

如果  $B$  點落在綫段  $CD$  的延長綫上(圖 1.20)，那麼綫段  $AB$  較長。這時可以寫成： $AB>CD$  或者  $CD<AB$ 。

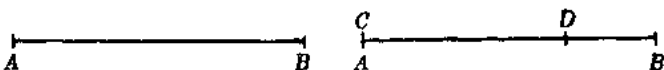


圖 1.20

### 练习

1. 怎样应用綫段长短的比較方法来比較两枝鉛笔的长短?
2. 已知  $AB < CD$ .

(1) 如果把  $AB$  放到  $CD$  上, 使  $A$  点和  $C$  点重合,  $AB$  順着  $CD$  落下, 那么  $B$  点落在什么地方?

(2) 如果把  $CD$  放到  $AB$  上, 使  $C$  点和  $A$  点重合,  $CD$  順着  $AB$  落下, 那么  $D$  点落在什么地方?

**1.7 綫段的度量** 在算术里, 我們已經学会了用刻度尺(带有刻度的直尺)来度量綫段的长度. 要比較准确地度量綫段, 可以用圓規. 方法是: 把圓規的两个尖端分別放在綫段的两个端点上(图 1.21 甲), 然后不改变圓規張口的大小, 把它移到刻度尺上, 使一个尖端落在刻度尺上記着 0 的刻度上, 这时另一个尖端所指出的刻度綫的讀数就是所量綫段的长度(图 1.21 乙).

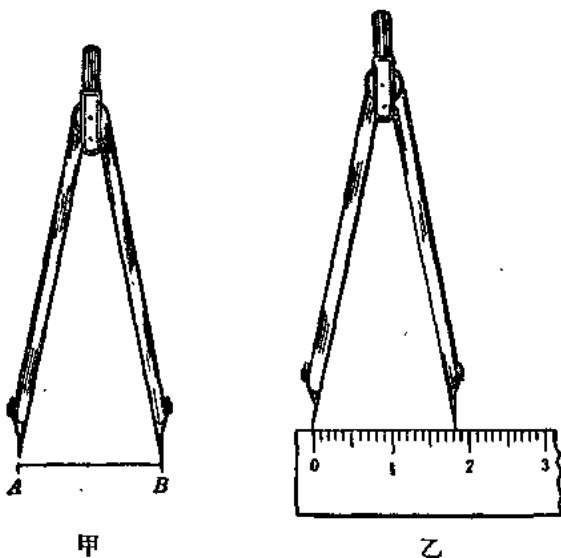


图 1.21

把  $A$ 、 $B$  两点用不同形状的綫連結起来(图 1.22), 可以看到:

在所有連結两点的綫中, 綫段最短.

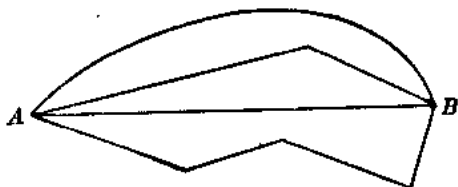
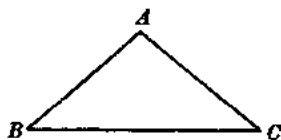


图 1.22

連結两点的綫段的长, 叫做这两点間的距离.

### 练习

1. 用圆規和刻度尺量出图中綫段  $BC$ 、綫段  $BA$ 、綫段  $AC$  的长.



(第1題)

2. 上題的图中, 綫段  $BC$  連結  $B$ 、 $C$  两点, 由綫段  $BA$  和  $AC$  組成的綫也連結  $B$ 、 $C$  两点. 这两条綫哪一条較短?  $B$ 、 $C$  两点間的距离是这两条綫中哪一条的长?

**1.8 綫段的作法** 要作一条已知长度的綫段(例如长度是 5cm 的綫段), 我們可以先任意作一条直綫  $l$ , 然后用圆規在刻度尺上量得这个已知长度, 在直綫  $l$  上截取一条綫段等于这个已知长度.

如果  $C$  点在綫段  $AB$  上, 那么綫段  $AB$  就是綫段  $AC$  与綫段  $CB$  的和, 綫段  $AC$  (或  $CB$ ) 就是綫段  $AB$  与綫段  $CB$  (或  $AC$ ) 的差. 这时, 如果  $AC = CB$ , 那么綫段  $AB$  就是綫段  $AC$  (或  $CB$ ) 的 2 倍, 綫段  $AC$  (或  $CB$ ) 就是綫段  $AB$  的二分之一,  $C$  点叫做綫段  $AB$  的中点.

線段的和、差、几倍或几分之一，可以利用刻度尺來作。先用刻度尺量出已知線段的長度，計算它們的和、差、几倍或几分之一，再用刻度尺作出等于所得結果的線段。

現在我們來說明用直尺（指沒有刻度的，以後同）和圓規作線段的方法。

**(1) 作線段等于已知線段**

已知：線段  $a$  (圖 1. 23)。



圖 1. 23

求作：線段  $x$ ，使  $x=a$ 。

作法：

1. 任意作一條直線  $l$ 。
2. 在  $l$  上任意取一點  $A$ 。
3. 在  $l$  上截取線段  $AB=a$ 。

$AB$  就是所求的線段  $x$ 。

**練習**

1. 已知線段  $a$ ，在直線  $l$  上一點  $A$  的兩旁分別截取等于  $a$  的線段  $AB$  和  $AC$  (關於作圖的習題，現在只要求畫出圖形，不必寫已知、求作和作法。以後有新的要求時，再加說明)。

2. 用圓規和刻度尺作出下列長度的線段：

3 cm; 5.5 cm; 4.8 cm; 23 mm。

3. 在直線上作出一條估計約長 50 mm 的線段，量出它的長度，然後計算這個長度和 50 mm 相差多少。

(2) 作綫段等于几条已知綫段的和

已知: 綫段  $a, b, c$  (图 1. 24).

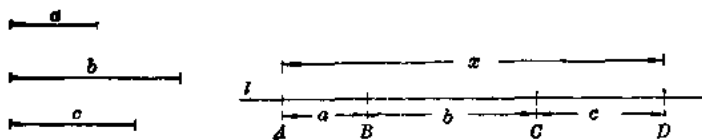


图 1. 24

求作: 綫段  $x$ , 使  $x = a + b + c$ .

作法:

1. 任意作一条直綫  $l$ .
2. 在  $l$  上任意取一点  $A$ .
3. 在  $l$  上从  $A$  点起向一方順次截取  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ .  $AD$  就是所求的綫段  $x$ .

练习

1. 作一条射綫, 然后从端点  $O$  起, 順次截取  $OA = 2.4$  cm,  $AB = 1.9$  cm,  $BC = 2.7$  cm, 并且量出  $OC$  的长度.
2. 已知綫段  $a$  和  $b$ , 作綫段  $AB = a + b$ , 綫段  $CD = b + a$ , 并且用圓規比較  $AB$  和  $CD$  的长短.

这說明綫段的相加也适用加法的什么定律?

3. 已知綫段  $a, b, c$ .

- (1) 作綫段  $m = a + b$ , 綫段  $AB = m + c$ ;
- (2) 作綫段  $n = b + c$ , 綫段  $CD = a + n$ ;
- (3) 用圓規比較  $AB$  和  $CD$  的长短.

这說明綫段的相加也适用加法的什么定律?

### (3) 作綫段等于两条已知綫段的差

已知: 綫段  $a$  和  $b$ ,  $a > b$  (图 1. 25).



图 1. 25

求作: 綫段  $x$ , 使  $x = a - b$ .

作法:

1. 作綫段  $AC = a$ .
  2. 在  $AC$  上截取  $AB = b$ .
- $BC$  就是所求的綫段  $x$ .

#### 练习

1. 已知綫段  $a, b, c$ ,  $a > b > c$ , 作出下列綫段:  
(1)  $d = a - b$ ; (2)  $e = a - c$ ; (3)  $f = b - c$ .
2. 在射线  $OC$  上截取  $OA = 2\text{cm}$ ,  $OB = 5\text{cm}$ . 量出  $AB$  的长度.
3. 已知綫段  $a, b$  ( $a > b$ ), 任意作一条直綫  $l$ , 在  $l$  上任意取一点  $A$ , 并且从  $A$  点向一个方向截取  $AB = a$ , 再从  $B$  点向相反的方向截取  $BC = b$ ,  $l$  上哪一条綫段等于  $a - b$ ?

### (4) 作綫段等于已知綫段的几倍

已知: 綫段  $a$  (图 1. 26).

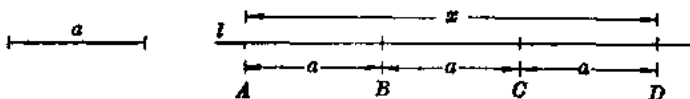


图 1. 26

求作: 綫段  $x$ , 使  $x = 3a$ .



作法:

1. 任意作一条直线  $l$ .
2. 在  $l$  上任意取一点  $A$ .
3. 在  $l$  上从  $A$  点起向一方顺次截取  $AB=BC=CD=a$ ,  $AD$  就是所求的线段  $x$ .

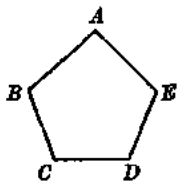
用同样的方法,可以作线段,等于已知线段的其他正整数倍.

### 练习

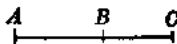
1. 已知线段  $a$ , 作出下列线段:  
(1)  $x=2a$ ;                      (2)  $y=5a$ .
2. 已知线段  $a$  和  $b$ ,  $a>b$ , 作出下列线段:  
(1)  $x=2a+b$ ;                      (2)  $y=3a-b$ .
3. 用圆规和刻度尺 (1) 作线段等于已知线段的 3 倍;  
(2) 五等分一条已知线段.
4. 有一张长方形的纸, 怎样用折纸法求出它的一边的中点?

### 习题二

1. 直线、射线、线段有什么区别?
2. 一条直线上的两个点, 把直线分成三部分, 这三部分各是什么图形?
3. 在图甲和图乙中, 各有多少条线段? 把它们一一写出来.



甲



乙

(第3题)