高等数学题解集

第 四 册

福州大学数学系高等数学教研室编

高 等 数 学 题 解 集

第 四 册

*

福州大学数学系高等数学教研室编

福 州 五 中 印 刷 厂 印 刷

*

1 9 8 0. 6.

前　言

本题解集是在同济大学数学教研室编《高等数学习题集》（1965年修订本）的基础上，结合我校情况进行适当地增补，为我校非数学系各专业的一、二年级同学学习《高等数学》这门课的需要编写的，也可作为从事高数学教学工作的老师和学习高等数学的同志的参考资料。

全集共分五册。第四册内容为：多元函数的微分法及其应用、重积分和曲线积分与曲面积分。限于篇幅，每道习题虽都给出解答（附在各章习题之后），但详简不一；对有多种解法者，最多也仅给出两种。鉴于水平有限，经验不足，时间又匆促，因此在选题和解法上缺点、错误一定不少，欢迎使用本书的同志批评指正。

本题解集是在校、系领导的鼓励和支持下，由我室徐进明执笔，郭有龙、李秋秀、林可容、王启泰、罗由学、李炳光、陈增政、高觉诚、王传荣等全室同志集体审核的。在编写过程中还得到兄弟院校的同志提供宝贵资料，另外参阅和选用了一些高等数学教学参考书或习题集上的习题，在这里一并表示道谢！

福州大学数学系高等数学教研室

一九八〇年六月

目　录

第十八章　多元函数的微分法及其应用

多 元 函 数

18.1. 求 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，$y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$时函数$z=$ $=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right]^2$的值。

18.2. 已给函数 $f(u, v)=u^v$，试求 $f(xy, x+y)$。

18.3. 已给函数 $f(u, v, w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y, x-y, xy)$。

18.4. 已给函数 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\,\mathrm{tg}\frac{x}{y}$，试求 $f(tx, ty)$。

18.5. 试证函数 $F(x, y)=\ln x\ln y$ 满足关系式 $F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v)$。

18.6. 试证函数 $F(x,y)=xy$满足关系式 $F(ax+by, cu+dv)=acF(x,u)+bcF(y,u)+adF(x,v)+bdF(y,v)$。

18.7. 函数 $z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是经过怎样的两个关系式复合而成的？

18.8. 若函数 $z=f(x, y)$ 恒满足关系式 $f(tx, ty)=t^kf(x, y)$ 就叫做 k 次齐次函数。试证 k 次齐次函数 $z=f(x, y)$ 能化成 $z=x^kF\left(\frac{y}{x}\right)$的形式。

在题 18.9—18.22 中，求各函数的定义域：

18.9. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$。

18.10. $z=\ln xy$.

18.11. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

18.12. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

18.13. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

18.14. $z=\arcsin\frac{y}{x}$. 18.15. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

18.16. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$. 18.17. $z=\sqrt{x\sin y}$.

18.18. $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

18.19. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$.

18.20. $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

18.21. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

18.22. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$.

在题 18.23—18.27 中，求各极限：

18.23. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

18.24. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{(x+y)}$. 18.25. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{x}$.

18.26. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

18.27. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

18.28. 验证当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，$u=\dfrac{x+y}{x-y}$ 的极限不存在。(x, y) 以怎样的方式趋于 $(0, 0)$ 时能使 (a) $\lim u=1$，(b) $\lim u=2$?

18.29. 函数 $z=\dfrac{1}{x-y}$ 在何处是间断的?

18.30. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

偏 导 数

18.31. 设 $f(x, y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f'_x(3,4)$.

18.32. 设 $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=1\\ y=0}}$

18.33. 设 $z=(1+xy)^y$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=1\\ y=1}}$ 及 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=1\\ y=1}}$.

18.34. 设 $z=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$，求 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}}$ 及 $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}}$.

18.35. 设 $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$，求 $\left[\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]_{\substack{x=0\\ z=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$.

18.36. 设 $f(x, y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f'_x\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 与 $f'_y\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

18.37. 设 $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$，当 $x=y=z=1$ 时求 $u'_x+u'_y+u'_z$。

在题 18.38—18.57 中，求各函数对于每一个自变量的偏导数：

18.38. $z=\dfrac{xe^y}{y^2}$.　　18.39. $z=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

18.40. $z=\arcsin(y\sqrt{x})$.

18.41. $z=\ln\sin(x-2y)$.

18.42. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.　　18.43. $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$.

18.44. $z=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$.　　18.45. $z=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$.

18.46. $l=\rho e^{\pi\cos\varphi}$.　　18.47. $z=xye^{\sin\pi xy}$.

18.48. $z=\ln(x+\ln y)$.　　18.49. $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

18.50. $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$.

18.51. $u=x^{\frac{y}{z}}$.　　18.52. $u=x^{y^z}$.

18.53. $u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$.

18.54. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

18.55. $z=\dfrac{e^{xy}}{e^x+e^y}$.

18.56. $u=\rho e^{t\varphi}+e^{-\varphi}+t$.

18.57. $u=e^{\varphi+\theta}\cos(\theta-\varphi)$.

18.58. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点 (2,4,5) 处的切线与横轴的正向所成的角度是多少?

18.59. 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ 在点$(1,1,\sqrt{3})$处的切线与y轴的正向所成的角度是多少?

18.60. 二曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ 和 $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ 与平面 $y=2$ 相交的曲线交成什么角度?

18.61. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，求证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

18.62. 设 $z=e^{xy^{-2}}$，求证$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

18.63. 设 $z=x^y$，求证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

18.64. 设 $T=\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，求证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$.

全微分及其应用

在题18.65—18.69中，求函数的全微分:

18.65. $u=\dfrac{s+t}{s-t}$.　　　　18.66. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

18.67. $u=\ln(3x-2y+z)$.

18.68. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

18.69. $u=x^{yz}$.

18.70. 求函数 $z=x^2y^3$ 当 $x=2, y=-1$，$\Delta x=0.02$,

$\Delta y=-0.01$ 时的全微分及全增量。

18.71. 求$z=\frac{y}{x}$当$x=2$，$y=1$，$dx=0.1$，$dy=0.2$时的全微分及全增量。

18.72. 计算函数 $z=2x^2+3y^2$当$x=10$，$y=8$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.3$时的Δz及dz，并估计用dz来替代Δz所产生的相对误差。

18.73. 试求当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.01$，$\Delta y=0.03$时，函数 $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$的全微分的值。

18.74. 试求当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$时，函数 $z=e^{xy}$的全微分的值。

18.75. 计算$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$的近似值。

18.76. 计算$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$的近似值。

18.77. 计算$(10.1)^{2.03}$的近似值。

18.78. 已知边长$x=6$米与$y=8$米的矩形，如果 x 边增加 5 厘米而 y 边减少10厘米，问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

18.79. 设有一圆柱体，它的底半径R由 2 厘米增到2.05厘米，其高H由10厘米减到9.8 厘米，试求其体积 V 的近似变化。

18.80. 有一用水泥做成的开顶长方形水池，它的外形长 5 米，宽 4 米，高 3 米，又它的四壁及底的厚度为20厘米，试求所需水泥量的近似值和精确值。

18.81. 扇形中心角 $\alpha=60°$，半径$R=20$米，如果将中心角增加1°，为了使扇形面积仍然不变，应把扇形半径减少若干?（近似值）

18.82. 设有直角三角形，其两腰的测量值为7厘米与24厘米，测量的精确度到0.1厘米。试求利用上述二值来计算斜边长度时的误差。

18.83. 当圆锥体形变时，它的底半径R由30厘米增到30.1厘米，高H由60厘米减到59.5厘米。试求体积变化的近似值。

18.84. 若量得一三角形两边的长分别为63±0.1米及78±0.1米，其夹角为60°±1°。求从这些数据用余弦定律计算这三角形的第三边时的误差及相对误差。

18.85. 利用全微分，试证乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；又商的相对错误等于被除数及除数的相对误差之和。

18.86. 在直角坐标系中弧微分公式为 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$，试导出在极坐标系中弧微分公式。

复合函数的微分法

18.87. 设 $z=x^2y-xy^2$，而 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$。

18.88. 设 $z=x^2\ln y$，而 $x=\frac{u}{v}$，$y=3u-2v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$。

18.89. 设 $z=\frac{y}{x}$，而 $x=e^t$，$y=1-e^{2t}$，求 $\frac{dz}{dt}$。

18.90. 设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$。

18.91. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t, y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$。

18.92. 设 $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)$，而$y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$.

18.93. 设 $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$，而 $x=\frac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$，求$\frac{dz}{dt}$.

18.94. 若 $z=\frac{x^2}{y}$，而$x=u-2v$，$y=v+2u$，求$\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$.

18.95. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求$\frac{du}{dx}$.

18.96. 设 $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，求$dz$.

18.97. $z=(2x+y)^{2x+y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

18.98. $z=x^{x^y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

18.99. 若 $u=F(x,y)$，而$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，求$\frac{\partial u}{\partial r}$，$\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

18.100. 验证函数 $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$，其中 $x=u+v$，$y=u-v$，满足关系式$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

18.101. 设 $z=xy+xF(u)$，而$u=\frac{y}{x}$，证明$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

18.102. 设 $z=u^v$，而u，v均为x的函数，求$\frac{dz}{dx}$.

18.103. 设 $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

18.104. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中f为可微分函数，验

证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$。

18.105. 试证明零次齐次可微分函数 $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足关系式 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

18.106. 设 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$，验证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$。

18.107. 若函数 $f(x,y,z)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$，就称为 k 次齐次函数。试证明 k 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf。$$

18.108. 一圆柱形的容器充气后膨胀，如果体积每秒增加27立方厘米，半径每秒增加 0.003 厘米。试求当体积和半径分别为1.18立方米和0.6米时，其长度的增加速率。

18.109. 一圆锥体如果它的高以每秒 10 厘米的速率减小，底半径以每秒 5 厘米的速率增加着。试求当高为 100 厘米，底半径为50厘米时，其体积的变化率。

高阶偏导数

在题18.110—18.116中，由所给函数求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$：

18.110. $z=\sin^2(ax+by)$。

18.111. $z=\arcsin(xy)$。

18.112. $z=y^{\ln x}$。　　18.113. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$。

18.114. $z=e^{xe^y}$。　　18.115. $z^3-3xyz=a^3$

18.116. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

18.117. 设 $z=x^y$，验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

18.118. 设 $z=x^{2y}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

18.119. 设 $z=e^x(\cos y+x\sin y)$，

验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

18.120. 设 $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，验证 $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

18.121. 设 $z=\ln(e^x+e^y)$，

验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

18.122. 若 $u=z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$，试证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

18.123. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}.$$

18.124. 设 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$，

验证 $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

18.125. 设 $u=f(x,y)$，而 $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$，$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. 求证

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$.

18.126. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f''_{xx}(0,0,1)$，

$f''_{xz}(1,0,2)$，$f''_{yz}(0,-1,0)$及$f'''_{zzx}(2,0,1)$。

18.127. 设 $z=2\cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$，求证$2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$。

18.128. 设 $u=f(x,\ y)$，而 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。求证$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$。

18.129. 设 $u=f(x,\ y)$，而 $x=e^s\cos t$，$y=e^s\sin t$，求证$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$。

18.130. 设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

18.131. 设 $u=f\left(x,\ \frac{x}{y}\right)$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。

18.132. 设 $u=f(x,\ xy,\ xyz)$，

求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$。

18.133. 设 $y=\varphi(x+\mu t)+\psi(x-\mu t)$，其中 φ，ψ是任意的二次可微分函数。求证$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\mu^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$。

18.134. 设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+(x-1)y\ln x$，其中 f 是任意的二次可微分函数。求证 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$。

18.135. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$，其中φ是可微分函数，f是二次可微分函数。求证$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

18.136. 在函数 $u=f(x,\ y,\ z)$中，

(a) 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$z=z$，证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

(b)*再令(a)中之 ρ, z, θ 依次为 $\rho = r\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, $\theta = \theta$, 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

18.137. 设 $u = f(s) + g(t)$, 其中 $s = x - y$, $t = x + y$. 验证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

18.138. 设 $z = f(x, y)$, $u = x + ay$, $v = x - ay$.

证明 $a^2 z_{xx} - z_{yy} = 4a^2 z_{uv}$.

18.139. 证明在微分方程 $z_{xx} + 2xy^2 z_x + 2(y - y^3)z_y + x^2y^2z = 0$ 中，令 $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$,则方程的形式不变。

18.140. 在微分方程 $u^2 z_{uu} - 2uvz_{uv} + v^2 z_{vv} + 2vz_v = 0$ 中，若令 $u^2 = xy$, $v^2 = \frac{x}{y}$, 则此方程应取怎样的形式?

隐函数的微分法

在题 **18.141—18.145** 中,求$\frac{dy}{dx}$:

18.141. $xy - \ln y = 0$.

18.142. $\sin y + e^x - xy^2 = 0$.

18.143. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

18.144. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

18.145. $xy + \ln y + \ln x = 0$.

在题 **18.146—18.150** 中,求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$及$\frac{\partial x}{\partial y}$:

18.146. $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$.

18.147. $e^z - xyz = 0$。

18.148. $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$。

18.149. $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$。

18.150. $z^2y - xz^3 - 1 = 0$。

18.151. 设 $xyz = a^3$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z$。

18.152. 设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$，证明

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

18.153. 求由方程 $\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z = 1$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$的全微分 dz。

18.154. 求由方程 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ 所确定的函数$z = f(x, y)$的全微分。

18.155. 求出当 $x = 2.001$，$y = 0.998$ 时，由方程 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ 所确定的函数 z 的近似值。

18.156. 证明由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$（$\varphi$ 为任意的可微分函数）所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$。

18.157. 证明方程 $ax + by + cz = F(x^2 + y^2 + z^2)$（F是任意的可微分函数）所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

18.158. 函数$z = z(x,y)$是由方程$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$所确定，证明

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

18.159. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + zy^{-1},$