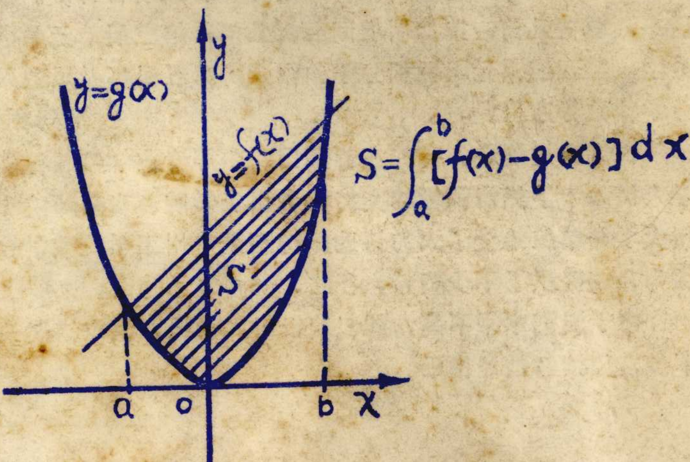
《高等数学习题集》题解

第五册



贵州省中等专业学校数学校际组编

目　　录

（第五册）

第二十章　多元函数的微分法及其应用

多　元　函　数

【20.1】 求 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，$y=(\frac{1}{2}1-\sqrt{3})$ 时函数

$z=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right]^2$ 的值。

解： 当 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，$y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ 时

$$x+y=1,\qquad x-y=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ z=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right]^2=\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}1}{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

【20.2】 已给函数 $f(u,v)=u^v$，试求 $f(xy,x+y)$.

解： 由于 $f(uv)=u^v$，令 $u=xy$，$v=x+y$，

$\therefore\quad f(xy,x+y)=(xy)^{x+y}$.

【20.3】 已给函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，

试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解： 由于 $f(u、v、w)=u^w+w^{u+v}$

$\therefore\quad f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

【20.4】 已给函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\frac{x}{y}$，

试求 $f(tx,ty)$.

解： $f(tx,ty)=t^2x^2+t^2y^2-t^2xy\operatorname{tg}\frac{x}{y}$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,\ y).$$

【20.5】 试证函数$F(x,\ y)=\ln x\ \ln y$满足关系式

$$F(xy,\ uv)=F(x,\ u)+F(x,\ v)+F(y,u)+F(y,\ v).$$

证： $F(xy,\ uv)=\ln xy\cdot\ln uv=$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)=$

$=\ln x\ \ln u+\ln y\ \ln u+\ln x\ \ln v\ ++\ln y\ \ln v=$

$=F(x,\ u)+F(y,\ u)+F(x,\ v)+F(y,\ v).$

【20.6】 试证函数 $F(x,\ y)=xy$ 满足关系式

$$F(ax+by,\ cu+dv)=acF(x,\ u)+bcF(y,\ u)+$$
$$+adF(x,\ v)+bdF(y,\ v).$$

证： 由于 $F(x,\ y)=xy$

∴ $F(ax+by,\ cu+dv)=(ax+by)(cu+dv)=$

$=ac\cdot xu+bc\cdot yu+ad\cdot xv+bd\cdot yv=acF(x,u)+$

$+bcF(y,u)+adF(x,\ v)+bdF(y,\ v).$

【20.7】 函数 $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}$ 是经过怎样的两个关系式复合而成的？

解：∵ $z=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}=\left(\dfrac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2-xy}\right)^{xy}$

令 $u=x^2+y^2,v=xy$，则得 $z=\left(\dfrac{u+v}{u-v}\right)^{v}$

∴ 原来函数是由$z=\left(\dfrac{u+v}{u-v}\right)^{v}$.

其中 $u=x^2+y^2$， $v=xy$ 复合而成的

【20.8】 若函数 $z=f(x,\ y)$恒满足关系式$f(tx,\ ty)=$ $=t^kf(x,\ y)$就叫做K次齐次函数。试证K次齐次 函数

$z=f(x,y)$ 能化成$z=x^kF\left(\frac{y}{x}\right)$的形式。

证明：∵ $z=f(x,y)$是K次齐次函数，

则 $z=f(x,y)=t^{-k}f(tx,ty)$

令 $t=x^{-1}$

∴ $z=f(x,y)=t^{-k}f(tx,ty)=x^kf(1,\frac{y}{x})=$

$=x^kF\left(\frac{y}{x}\right)$.

在题20.9—20.22中，求各函数的定义域：

【20.9】 $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

解： 函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$的定义域为

$x>0,\ y>0,\ z>0$。

【20.10】 $z=\ln xy$.

解： 函数$z=\ln xy$，在$xy>0$时有定义

∴ 函数$z=\ln xy$的定义域为：

$x>0,\ y>0$和$x<0,\ y<0$.

【20.11】 $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

解： 函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$的定义域是满足于

$\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases}$ 的一切点(x,y)的全体

∴ 函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$的定义域为

$x+y>0,\ x-y>0$。

【20.12】 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$。

解：函数$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$的定义域为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$

【20.13】 $z=\ln(y^2-4x+8)$。

解：函数$z=\ln(y^2-4x+8)$的定义域是满足于

$y^2-4x+8>0$的一切点(x, y)的全体

∴ 函数$z=\ln(y^2-4x+8)$的定义域为：$y^2>4x-8$。

【20.14】 $z=\arcsin\frac{y}{x}$。

解：函数$z=\arcsin\frac{y}{x}$的定义域是满足于

$\begin{cases} x\neq 0 \\ \left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1 \end{cases}$ 的一切点(x, y)的全体

∴ 函数$z=\arcsin\frac{y}{x}$的定义域为：

$|y|\leqslant|x|$，$x\neq 0$。

【20.15】 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$。

解：函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是满足于

$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x-\sqrt{y}\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 的一切点(x,y)的全体

∴ 函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域为：

$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^2\geqslant y$。

【20.16】 $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$。

解：∵函数 $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域是满足于

$$\begin{cases}4x-y^2\geqslant 0\\1-x^2-y^2>0\\1-x^2-y^2\neq 1\end{cases}$$ 的一切点(x,y)的全体

∴ 函数$z=f(x,y)$的定义域为：

$y^2\leqslant 4x$，$x^2+y^2<1$，$x^2+y^2\neq 0$。

【20.17】 $z=\sqrt{x\sin y}$.

解：函数 $z=\sqrt{x\sin y}$在$x\sin y\geqslant 0$时，有定义

即当 $x\geqslant 0$，$2n\pi\leqslant y\leqslant(2n+1)\pi$

及当 $x\leqslant 0$，$(2n+1)\pi\leqslant y\leqslant(2n+2)\pi$

$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\cdots\cdots)$

时函数 $z=\sqrt{x\sin y}$有定义。

【20.18】 $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arc\,sec}(x^2+y^2)$.

解：设 $z_1=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$，$z_2=\operatorname{arc\,sec}(x^2+y^2)$

则 $z=z_1+z_2$

函数$z_1=f(x,y)$的定义域为：$-4\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$

函数$z_2=g(x,y)$的定义域为：$x^2+y^2\geqslant 1$

∴ 函数$z=z_1+z_2=f(x,y)+g(x,y)$的定义域为：

$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$

【20.19】 $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$.

解：函数$z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$的定义域为：

$x+y\neq n$，n为整数。

【20.20】 $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

解： 当 $\frac{R^2}{x^2+y^2}\geqslant 1$ 和 $x^2+y^2-R^2\geqslant 0$ 时

函数 $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ 有定义，

即 函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为： $x^2+y^2=R^2$

【20.21】 $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

解： 当 $x\ln(y-x)>0$，函数 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 有定义即由 $x>0$，$\ln(y-x)>0$ 得 $x>0$，$y-x>1$

由 $x<0$，$\ln(y-x)<0$ 得到 $x<0$，$0<y-x<1$

∴ 函数 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域为：

$x>0$，$y>1+x$ 及 $x<0$，$x<y<x+1$。

【20.22】 $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

$(R>r>0)$.

解： 函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域：$r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$

在题【20.23】—【20.27】中，求各极限：

【20.23】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$。

解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$。

【20.24】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{(x+y)}$。

解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(k+1)x\cdot(\sqrt{kx^2+1}+1)}$$
令$y=kx\to 0$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{kx}{(k+1)(\sqrt{kx^2+1}+1)}=0.$$

20.25】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{x}$。

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\leftarrow 0}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 0}y=0.$$

【20.26】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2\frac{(x^2+y^2)}{2}}{x^2y^2(x^2+y^2)}=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{2\sin^2\frac{(x^2+y^2)}{2}\cdot(x^2+y^2)}{4x^2y^2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

∴ 极限不存在.

【20.27】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$。

解：当点P(x，y)沿着直线$y=kx$趋近于点(O，O)时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to 0}(1+kx^2)^{\frac{1}{(1+k)x}}$$

因 $$=\lim_{x\to 0}(1+kx^2)^{\frac{1}{xk^2}\cdot\frac{kx}{1+k}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+kx^2)^{\frac{1}{kx^2}}\right]^{\frac{kx}{1+k}}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx^2)^{\frac{1}{xk^2}}=e$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{1+k}=0$

因此极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=1$。

【20.28】 验证当(x，y)→(0，0)时，$u=\frac{x+y}{x-y}$的极限不存在。(x，y)以怎样的方式趋于(0，0)时能使，
(a) $\lim u=1$，(b) $\lim u=2$？

证明：设当(x，y)→(0，0)时，$u=\frac{x+y}{x-y}\to A$

即(x，y)以任何方式趋于(0，0)时，u皆趋于一个确定的常数A。但(x，y)沿着路径$y=kx$趋于(0，0)时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}u=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}$$

由此u的极限值随不同的k值而异

故当$(x, y)\to 0$时，$u=\dfrac{x+y}{x-y}$的极限不存在.

(a)当$\lim u=1$时. 令$\dfrac{1+k}{1-k}=1$ $\therefore k=0$

故当(x, y)沿$y=0$（横轴）趋于$(0, 0)$时，u的极限为1.

(b)当$\lim u=2$时，即令$\dfrac{1+k}{1-k}=2$ $\therefore k=\dfrac{1}{3}$

故当(x,y)沿$y=\dfrac{1}{3}x$趋于$(0, 0)$时,函数u的极限为2

【20.29】 函数$z=\dfrac{1}{x-y}$在何处是间断的?

解: $\because$ 函数$z=\dfrac{1}{x-y}$在平面$y=x$上没有定义

$\therefore$ 函数$z=\dfrac{1}{x-y}$在平面$y=x$上是间断的。

【20.30】 函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的?

解: $\because$函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在抛物柱面$y^2=2x$上没有定义

$\therefore$ 函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在$y^2=2x$处是间断的.

偏　导　数

【20.31】 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求$f'_x(3,4)$。

解: $\because$ $f'_x(x, y)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore \quad f'_x(3,\ 4) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$。

【20.32】 设 $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}$ ·

解： $\because \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2x^2 + y}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = \dfrac{1}{2}$

【20.33】 设 $z = (1 + xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}$

解： $\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}$，$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1$；

$\because \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy(1 + xy)^{y-1} + (1 + xy)^x \ln(1 + xy)$，

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1 + 2\ln 2$．

【20.34】 设 $z = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}$．

及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}$．

解： $\therefore \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{(\cos y + y\sin x)(1 + \sin x + \sin y)}{(1 + \sin x + \sin y)^2} -$

$$- \frac{(x\cos y - y\cos x)\cos x}{(1 + \sin x + \sin y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-[(x\sin y + \cos)(1 + \sin + \sin)}{(1 + \sin x + \sin y)^2} +$$

$$+ \frac{(x\cos y - y\cos x)\cos y]}{(1 + \sin x + \sin y)^2}$$

$\therefore \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1$， $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = -1$

【20.35.】 设 $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$，

求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\y=0\\z=\frac{\pi}{4}}}$.

解: $\because \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}$

$\therefore \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\y=0\\z=\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【20.36】 设 $F(x,\ y)=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $F'_x\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

与 $F'_y\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

解: $\because F'_x(x,\ y)=e^{-x}[\cos(x+2y)-\sin(x+2y)]$

$F'_y(x,\ y)=2e^{-x}\cos(x+2y)$

$\therefore\ F'_x\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)=-1,\qquad F'_y\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

【20.37】 设 $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$，当 $x=y=z=1$ 时求

$u'_x+u'_y+u'_z$.

解: 令 $w=1+x+y^2+z^3$ 则: $u=\ln w$

$u'_x=\dfrac{1}{w},\qquad u'_y=\dfrac{2y}{w},\qquad u'_z=\dfrac{3z^2}{w}$

当 $x=y=z=1$ 时 $w=4$

$\therefore\ u'_x+u'_y+u'_z=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

在题20.38—20.57中，求各函数对于每一个自变量的偏导数：

【20.38】 $z=\frac{xe^y}{y^2}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy^2e^y-2xye^y}{y^4}=\frac{xe^y(y-2)}{y^3}$

【20.39.】 $z=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

【20.40.】 $z=\arcsin(y\sqrt{x})$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-xy^2}}=\frac{y}{2\sqrt{x-x^2y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-xy^2}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{\frac{x}{1-xy^2}}$.

【20.41】 $z=\ln\sin(x-2y)$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sin(x-2y)}\cdot\cos(x-2y)=\operatorname{ctg}(x-2y)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\operatorname{ctg}(x-2y)$.

【20.42】 $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}.$$

【20.43】 $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$.

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln\frac{1}{3}\left[-\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln 3.$$

【20.44】 $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^y}$.

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^y}}\cdot yx^{y-1}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^y}}\cdot x^y\ln x=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}.$$

【20.45】 $z=\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

解: $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{y}{(x^2+y^2)(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{-x}{(x^2+y^2)(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x})^2}$$

【20.46】 $L=\rho e^{\pi\cos\varphi}$.

解: $\frac{\partial L}{\partial\rho}=e^{\pi\cos\varphi}$, $\quad\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-\pi\rho\sin\varphi\, e^{\pi\cos\varphi}$

【20.47】 $z=xye^{\sin\pi xy}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot e^{\sin\pi xy}+xye^{\sin\pi xy}\cos\pi xy\cdot\pi y=$

$$=ye^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin\pi xy}+xye^{\sin\pi xy}\cos\pi xy\cdot\pi x=$

$$=xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy).$$

【20.48】 $z=\ln(x+\ln y)$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$; $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

【20.49】 $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$

$$=\left(-\frac{y}{x^2}\right)\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}.$$

【20.50】 $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$