高等代数
内容提要及题解

（下）

GAODENG DAISHU
NEIRONGTIYA[O]
JITIJIE

宁德师专

高等代数内容提要及题解

宁德师范专科学校
数学系高等代数教研组

（下）

前　　言

为了响应党的十一届三中全会关于全党工作的重点转移到四个现代化上来的伟大号召，我们着手教材建设工作，借以提高业务水平和教学质量；也为部分青年教师提供教学参考资料；同时考虑到能对业余自学者和中学教师有所稗益，我们编写了数学分析，高等代数，概率统计的内容提要及题解。《数学分析内容提要与题解》一套上、中、下叁册及本书一套上、下两册今已出版，其余也即将出版。

本书共分上、下两册，本册内容包括线性空间、线性变换、λ－矩阵、欧几里得空间、代数基本概念以及集合论和布尔代数初步。

本册前半部分与上册内容安排系统一样，以北京大学数学力学系编的《高等代数》一书为蓝本，其余部分及整册的习题来源和主要参考书开列于书末。

在解题中，当引用前面§×已解过的习题时，若未特别说明，均指同一章的节数。

本书由潘斯一、詹碧卿、苏林宁老师编写，并经杨克仁老师审阅。

在排印过程中，承宁德县印刷厂大力支持，我科何思贤老师为本书下册绘制了所有的插图、吴美玉老师为校阅做了许多工作。我们在此表示谢意。

因为我们水平不高且业余时间有限，所以无论在选题上或解题过程中都一定存在不少缺点以至错误，恳望同志们随时给予批评指教。

宁德师范专科学校
数学科高等代数教研组
一九八〇年六月

第　三　编

线性代数（续）

参　考　书　目

高等代数	北大数学力学系 几何与代数教研室代数小组编	人民教育出版社	1978
线性代数	谢邦杰编	人民教育出版社	1978
代数学引论	许以额编著	上海科学技术出版社	1966
高等代数	周伯埙编	人民教育出版社	1966
线性代数	蒋尔雄、高坤敏、吴景琨编	人民教育出版社	1978
线性代数	南京大学数学系 计算数学专业编	科学出版社	1978
近世代数基础	张禾瑞著	商务印书馆	1958
高等代数	张禾瑞、郝炳新编	人民教育出版社	1960
近代代数	熊全淹		
数学分析入门	杨宗磐著	科学出版社	1965

*　　　*　　　*

线性代数基础	А. И. 马力茨夫著	(柯　召译)
线性空间引论	Г. И. 希洛夫著	(周学光译)
Moder Algebra With Applications	W. J. Gilbert	(Prited in theU. S. A
逻辑方程求解	И. Я. 捷普曼	苏联《数学教学》1963年第5期 (译载《数学通报》1964年第6期)

*　　　*　　　*

《高等代数》《线性代数》习题解答(上)(中)　福州师专数学科编

人 名 译 名 对 照 表

Binet	拜尼特
Boole	布　尔
Cauchg	柯　西
Cayley	凯　莱
Euclid	欧几里得
Gram	格勒姆
Hamilton	哈密顿
Hermite	轭密特
Jordan	约　当
Kronecker	克朗南格
Schmiolt	施米特
Буняковский	布涅亚科夫斯基

目　录

第五章　线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念之一，以前所介绍过的内容，相对来说，是比较具体和直观的，而线性空间这部分则进一步把它们概括、抽象，从理论上进一步提高。

§1　线性空间的定义和基本性质

我们在线性方程组和矩阵等章中，都讨论过一些向量组，也就是向量的集合。由于在第四编中，我们对集合作了比较详细的介绍，所以在本章里对遇到的有关集合的记号、简单性质等等就不介绍了，读者可参阅第四编。

【内容提要】

定义：设 P是一个数域，V是一个非空集合，以英文字母 a，b，…，k，l 等表示 P中的数，以希腊字母 α，β，γ 等表示 V中的元素。在集合 V的元素间定义了一种代数运算，称为加法，使得对 V中任意两个元素 α 与 β，在 V中都有唯一的一个元素 γ 与之对应，称为 α 与 β 的和，记作 $\alpha+\beta$，并且满足：

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

（3）在 V中有一个元素 0，对 V中任意一个元素 α，都有 $\alpha+0=\alpha$，这样的元素 0称为零元素。

（4）对 V中每一个元素 α，都有 V中的元素 β，使得 $\alpha+\beta=0$，这样的 β 称为 α 的负元素；

在数域 P与集合 V的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法，使得对数域 P中任一数 k 与 V中任一元素 α，在 V中都有唯一的一个元素 δ 与之对应，称为 k 与 α 的数量乘积，记作 $\delta=k\alpha$。并且满足：

（5）$1\cdot\alpha=\alpha$；

（6）$k(m\alpha)=(km)\alpha$；

数量乘法与加法还满足：

（7）$(k+m)\alpha=k\alpha+m\alpha$；

（8）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

则V叫做数域P上的一个线性空间。

线性空间也叫向量空间，线性空间中的元素叫向量，读者可参阅本书上册第三编第二章§2、不过，这里所说的向量比n元有序数组所成的向量的涵义要广泛得多。

线性空间基本性质：

1．V中的零元素是唯一的；

2．任意一个V中的向量α，有唯一的V中的β，满足$\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$；这$\beta$称为$\alpha$的负向量，记$\beta=-\alpha$。

利用负向量，我们可定义向量的减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

3．$0\alpha=0$；$k0=0$；$(-1)\alpha=-\alpha$

4．若$k\alpha=0$则$k=0$或$\alpha=0$。

【例题及习题选解】

1　数域P上一元多项式环P〔x〕,按通常的多项式加法及数与多项式的乘法构成P上的一个线性空间，如果只考虑其中次数小于n的多项式，再添上零多项式，也构成P上的一个线性空间，用$P[x]_n$表示。

2　元素属于数域P上的$m\times n$矩阵之全体，按矩阵的加法和数量乘法，构成数域P上一个线性空间，记为$P^{m\times n}$。

3　定义在线段〔a，b〕上一切连续函数，其加法及乘上实数的运算都与数学分析中之规定一样，则也构成一线性空间，记为C(a，b)。

4　下面集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

次数等于$n(n\geqslant 1)$的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法：

答：不能构成线性空间，因为$n\geqslant 1$，故所给的集合中没有零向量。

5　设A是一个$n\times n$实数矩阵，A的实系数多项式f(A)的全体，对于矩阵的加法和数量乘法。

解　设$f(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{n-i}A^{n-i}$，$g(A)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_{m-j}A^{m-j}$，其中$a_i$，$b_j\in R$，$n\geqslant m$，$A^0=E$且约定当$p>m$时，$b_p=0$则$f(A)+g(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}(a_{n-i}+b_{n-i})A^{n-i}$仍为A的实系数多项式；又任一实数r，有$rf(A)=\sum\limits_{i=0}^{n}ra_{n-i}A^{n-i}$亦为A之实系数多项式。再根据上册§3－3－1性质1－4知其构成线性空间。

6　全体实对称（反对称、上三角）矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法，

答：不能构成线性空间（反对称，上三角情形也一样），因为不同阶的矩阵不能施行矩阵的加法运算。

7　平面上不平行于某一向量α的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法。

答：不能构成线性空间，因为，比如关于所给向量α为对称的两个向量就不能相加。

8 平面上，终点在原点，始点在第一象限范围里的向量集合，对向量的通常运算。

答：不能构成线性空间，因为对其中任一非零向量，不存在其负向量。

9 全体实数对，关于下面定义的数量乘法和加法：

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 + a_1 a_2)$$

$$k \circ (a_1, b_1) = \left(k a_1, k b_1 + \frac{1}{2} k(k-1) a_1^2\right)$$

解 记实数对全体为M。则

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 + a_1 a_2) \in M$$

$$k \circ (a_1, b_1) = \left(k a_1, k b_1 + \frac{1}{2} k(k-1) a_1^2\right) \in M$$

即集合M对所给的运算封闭，且

1^0 $$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 + a_1 a_2) =$$
$$= (a_2 + a_1,\ b_2 + b_1 + a_2 a_1) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1)$$

2^0 $$[(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)] \oplus (a_3 + b_3) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 + a_1 a_2) \oplus (a_3\ b_3) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3,\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 + b_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3$$
$$(a_1, b_1) \oplus [(a_2, b_2) \oplus (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \oplus (a_2 + a_3,\ b_2 + b_3 + a_2 a_3) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3,\ b_1 + b_2 + b_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3)$$

所以结合律成立：

3^0 有$(0,0) \in M$，使对任一$(a,b) \in M$，有$(a,b) \oplus (0,0) = (a,b)$；

4^0 任一$(a,b) \in M$，有$(-a, -b + a^2)$使$(a,b) \oplus (-a, -b + a^2) = (0,0)$；

5^0 $1 \circ (a,b) = (a,b)$；

6^0 若k，m为实数，则

$$k \circ [m \circ (a,b)] = k \circ \left(ma, mb + \frac{1}{2} m(m-1) a^2\right) =$$
$$= \left(kma, kmb + \frac{1}{2} km(m-1) a^2 + \frac{1}{2} k(k-1) m^2 a^2\right)$$
$$= \left(kma, kmb + \frac{1}{2} km(km-1) a^2\right)$$
$$= (km) \circ (a,b).$$

7^0 $$(k+m) \circ (a,b) = \left[(k+m)a,\ (k+m)b + \frac{1}{2}(k+m)(k+m-1) a^2\right]$$

$$[k \circ (a,b)] \oplus [m \circ (a,b)] =$$
$$= \left(ka, kb + \frac{1}{2} k(k-1) a^2\right) \oplus \left(ma, mb + \frac{1}{2} m(m-1) a^2\right)$$
$$= \left[(k+m)a,\ kb + \frac{1}{2} k(k-1) a^2 + \frac{1}{2} m(m-1) a^2 + mb + kma^2\right]$$

$$=\left[(k+m)a\ ,\ (k+m)b+\frac{1}{2}(k^2-k+m^2-m+2km)a^2\right]$$

$$=\left[(k+m)a\ ,\ (k+m)b+\frac{1}{2}(k+m)(k+m-1)a^2\right]$$

所以 $(k+m)\circ(a,b)=[k\circ(a,b)]\oplus[m\circ(a,b)]$

8^0 $k\circ[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]=k\circ[(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)]$

$$=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+kb_2+ka_1a_2+\frac{1}{2}k(k-1)(a_1+a_2)^2\right)$$

$$[k\circ(a_1,b_1)]\oplus[k\circ(a_2,b_2)]=\left(ka_1,\ kb_1+\frac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right)\oplus$$

$$\oplus\left(ka_2,\ kb_2+\frac{1}{2}k(k-1)a_2^2\right)$$

$$=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+kb_2+\frac{1}{2}k(k-1)(a_1^2+a_2^2)+k^2a_1a_2\right)$$

$$=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+kb_2+\frac{1}{2}k(k-1)(a_1^2+a_2^2)+k(k-1)a_1a_2+ka_1a_2\right)$$

$$=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+kb_2+ka_1a_2+\frac{1}{2}k(k-1)(a_1+a_2)^2\right)$$

所以 $k\circ[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]=[k\circ(a_1,b_1)]\oplus[k\circ(a_2,b_2)]$。

故M对所定义的$\oplus$，$\circ$ 运算构成线性空间。

10 若正实数全体记为R^+，定义其加法与数量乘法为

$$a\oplus b=ab\ .$$
$$k\circ a=a^k$$

解 当$a,b\in R^+$时，显然$a\oplus b=ab\in R^+$，$k\circ a=a^k\in R^+$ 且

1^0 $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$

2^0 $(a\oplus b)\oplus c=ab\oplus c=abc=a\oplus bc=a\oplus(b\oplus c)$

3^0 R^+中有零元素1存在，使得任一$a\in R^+$，$a\oplus 1=a$。

4^0 任一$a\in R^+$，因$a\neq 0$，故a^{-1}存在，且$a\oplus(a^{-1})=aa^{-1}=1$，$a^{-1}$即为$a$的负元素。

5^0 $1\circ a=1\cdot a=a$。

6^0 $k,m\in R$，则 $k\circ(m\circ a)=k\circ a^m=(a^m)^k=a^{mk}$，$(km)\circ a=a^{mk}$。即

$$k\circ(m\circ a)=(km)\circ a$$

7^0 $(k+m)\circ a=a^{k+m}=a^k\cdot a^m=(k\circ a)\oplus(m\circ a)$

8^0 $k\circ(a\oplus b)=k\circ ab=(ab)^k=a^k\cdot b^k=a^k\oplus b^k=(k\circ a)\oplus(k\circ b)$

因此R^+对所定义的$\oplus$，$\circ$ 运算构成实数域上的线性空间。

11 在线性空间V中证明

(1) $k0=0$；

(2) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$

证 (1) 设任一 $\alpha\in V$，则因 $\alpha+0=\alpha$，而 $k(\alpha+0)=k\alpha+k0$，所以

$$k\alpha=k\alpha+k0$$

由于V的零元素唯一，故 $k0=0$。

(2) 因 $\beta+(-\beta)=0$，故 $k[\beta+(-\beta)]=k\beta+k(-\beta)=0$ 又 $k\beta+(-k)\beta=[k+(-k)]\beta=0$ 因任一元素之负元素唯一，知 $k(-\beta)=(-k)\beta=-k\beta$，所以

$$k(\alpha-\beta)=k[\alpha+(-\beta)]=k\alpha+k(-\beta)=k\alpha+(-k)\beta=k\alpha-k\beta.$$

§2 基 与 坐 标

【内容提要】

一个线性空间 V可能仅有一个向量 α，这时，显然有 $\alpha+\alpha=\alpha$，且当 $a\in p$ 时，$a\alpha=\alpha$，因此 α 实际上起着零向量的作用。这样的线性空间称为零空间。

除零空间外，任何线性空间都不止含一个向量，于是由线性空间对加法及数乘的封闭性即知，它们都必含有无穷多个向量。因此，对它们的研究，正如对向量组研究过程中探讨其极大线性无关组一样，也必须寻求其一部分向量，使得其他向量均可用这部分向量表达出来，为此，我们先对某些概念定义如下：

定义 1．设 V是数域 P上的一个线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V中一组向量（$r\geqslant 1$），$k_1,\cdots,k_r$ 是 P中的数，则向量

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_ra_r$$

称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的一个线性组合，也叫做 α 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。

定义 2．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 V中两个向量组，如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中每个向量均可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表出，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r$ 线性表出。

若两个向量组可以相互表出，就称它们为等价的。

定义 3．对线性空间 V中的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$（$r\geqslant 1$），如果存在数域 P 中 r 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为线性相关。若只有全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得上式成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为线性无关。

我们看到，以上定义是完全重复了 n 元有序数组相应概念的定义，不仅如此，在第三编第二章中，由这些定义出发对 n 元有序数组所作的那些论证也完全可以逐字逐句地应用到线

性空间中来，得出完全相同的结论，这里就不重复了。

定义4．如果线性空间V中有n个线性无关的向量，但没有更多数目的线性无关向量，则V就称为n维的，n叫做V的维数，若V中可以找到任意多个线性无关的向量，则V就称为无限维的。

定义5．在n维线性空间V中，n个线性无关的向量ε_1，ε_2，…，ε_n称为V的一组基。若α为V中任一向量，则α可被基ε_1，ε_2，…，ε_n线性表出

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

其中a_1，a_2，…，a_n称为α在基ε_1，ε_2，…，ε_n下的坐标，记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，它是被α及ε_1，ε_2，…，ε_n所唯一确定。

对零线性空间，不考虑基的问题，零空间的维数规定为0．

对于基与维数，我们有下面定理：

定理1．如果线性空间V中有n个线性无关的向量α_1，α_2，…，α_n，且V中任一向量都可经它们线性表出，则V是n维的，α_1，α_2，…，α_n就是V的一组基。

定理2．若V是一个n维线性空间，则V中任何n个线性无关的向量都组成V的一个基。

既然在n维线性空间中，任意n个线性无关的向量都可作为V的基，则V中任一向量α在基ε_1，ε_2，…，ε_n下可唯一地表成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

这时$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$仅当是ε_1，ε_2，…，ε_n为V的基时，才为α的坐标，若换成另外一组基ε_1'，ε_2'，…，ε_n'时，α的坐标$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$就会有别于$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$、下面我们给出两组不同基之间的联系及在这两组不同基下，同一向量α的两组坐标之间的关系。

设两组基ε_1，ε_2，…，ε_n与ε_1'，ε_2'，…，ε_n'关系如下：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\
\varepsilon_2' &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_n' &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

把它用矩阵“形式”写出即为

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A \qquad (1)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 的**过渡矩阵**. 显然,由于基的线性无关性,过渡矩阵必是可逆矩阵.

若将 α 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 下的表达式也用矩阵"形式地"写出,即有

$$\alpha = x_1'\varepsilon_1' + x_2'\varepsilon_2' + \cdots + x_n'\varepsilon_n' = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

而 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的表达式也可写为

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是利用(1)式,即有

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

由于在同一基下同一向量坐标的唯一性得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(2)式就是在基变换(1)下,向量的坐标变换公式.

【习题选解】

1 证明:在实函数空间中, 1, $\cos^2 t$, $\cos 2t$ 是线性相关的.

证:由倍角公式知 $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,即

$$2\cos^2 t - \cos 2t - 1 = 0$$

就是说,有不全为 0 的 $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, $k_3 = -1$ 使 $k_1\cos^2 t + k_2\cos 2t + k_3 \cdot 1 = 0$ 因此它们线性相关.

2 如果 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式,但其中任意两个都不互素,那么它们线性无关.

证. 用反证法. 假如它们线性相关,则有不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + k_3f_3(x) = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$,那么

$$-f_1(x) = \frac{k_2}{k_1}f_2(x) + \frac{k_3}{k_1}f_3(x)$$

所以 $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的公因式(f_2, f_3 不互素)就应是 $f_1(x)$ 的因式. 从而 $f_1(x)$,

$f_2(x)$，$f_3(x)$ 也就有非常数公因式，这与三者互素矛盾。因此，它们线性无关。

3 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$（$r \geqslant 2$）线性相关，则一定存在 r 个不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，使得对任一向量 α_{r+1}，向量组

$$\alpha_1+\lambda_1\alpha_{r+1},\ \alpha_2+\lambda_2\alpha_{r+1},\ \cdots,\ \alpha_r+\lambda_r\alpha_{r+1}$$

线性相关。

证 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，所以存在不全为0的 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

令

$$k_1(\alpha_1+\lambda_1\alpha_{r+1})+k_2(\alpha_2+\lambda_2\alpha_{r+1})+\cdots+k_r(\alpha_r+\lambda_r\alpha_{r+1})=0 \tag{1}$$

即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_r\lambda_r)\alpha_{r+1}=0. \tag{2}$$

因 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，故只要考虑

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_r\lambda_r=0 \tag{3}$$

若存在 $k_i=0$，则令 $\lambda_i=a\neq 0$，$\lambda_j=0$，则这时 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 已不全为零；若 k_i 全不为0，则（3）式看成 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 的方程，因 $r\geqslant 2$ 显然必有非零解。所以，无论不全为0的 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 如何，必有不全为0的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使（3）式成立，从而（2）式必成立。于是（1）式也成立：而 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 已不全为0。

故 $\alpha_1+\lambda_1\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_r+\lambda_r\alpha_{r+1}$ 线性相关。

4 在 P^4 中求向量 ξ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标，设

（1）$\varepsilon_1=(1,1,1,1,)$，$\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$，$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$，$\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$；$\xi=(1,2,1,1)$；

（2）$\varepsilon_1=(1,1,0,1)$，$\varepsilon_2=(2,1,3,1)$，$\varepsilon_3=(1,1,0,0)$，$\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)$；$\xi=(0,0,0,1)$。

解（1）设 $\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4$，则

$(1,2,1,1)=(x_1+x_2+x_3+x_4,\ x_1+x_2-x_3-x_4,\ x_1-x_2+x_3-x_4,\ x_1-x_2-x_3+x_4)$

根据向量相等之规则，我们有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$$

解得 $x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=\frac{1}{4}$，$x_3=-\frac{1}{4}$，$x_4=-\frac{1}{4}$，故 ξ 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4$ 下坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$。

（2）设 $\xi = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4$，则

$(0, 0, 0, 1) = (a_1 + 2a_2 + a_3,\ \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ \ 3a_2 - a_4,\ \ a_1 + a_2 - a_4)$．

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ 3a_2 - a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 = 1 \end{cases}$$

解得 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, -1, 0)$．

5　求下列线性空间的维数与一组基．

（1）数域 P上的空间 $P^{n\times n}$

（2）$P^{n\times n}$中全体对称（反对称、上三角）矩阵作成的数域 P上的空间；

（3）全体正实数R^+对加法 $a\oplus b = ab$ 及数乘 $k\circ a = a^k$作成的线性空间；

（4）实数域上由矩阵A的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},\quad \omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$

解　（1）数域 P上的空间 $P^{n\times n}$是 n^2维的．E_{ij}，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 是其一组基．这里 E_{ij}是第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素全为 0 的 $n\times n$ 矩阵．

（2）$P^{n\times n}$中全体对称矩阵所成之空间是$\frac{1}{2}(n^2+n)$维的．E_{ij}，$i<j$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 是其一组基，这里 E_{ij}是第 i 行第 j 列与第 j 行第 i 列元素为 1．其余元素均为 0 的 $n\times n$ 对称矩阵．

$P^{n\times n}$中全体反对称矩阵所成之空间是$\frac{n^2-n}{2}$维的．E_{ij}，$i<j$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 是其一组基，这里 E_{ij}是第 i 行第 j 列元素为 1，第 j 行第 i 列元素为 -1，其余元素均为 0 的 $n\times n$ 反对称矩阵；

$P^{n\times n}$中全体上三角矩阵所成之空间是$\frac{n^2+n}{2}$维的，E_{ij}，$i\leqslant j$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$ 是其一组基，这里 E_{ij}是第 i 行第 j 列元素为 1，其余全为 0 的 $n\times n$ 矩阵．

（3）在此空间（参阅上节第10题）中，数 1 是零元，任一不等于 1 的正实数都是线性无关的向量．取空间一非零元素，例如取 2，则任一正数 a，均可由 2 表出：

设　$a = k\circ 2 = 2^k$，则 $k = \log_2 a$ 故 $a = (\log_2 a)\circ 2$

所以此空间维数是 1 、2，或者说任一个不等于 1 的数都可取作它的基．

（4）因

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}，所以\ \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \omega^3 = 1,\ \cdots,$$