

S.M.P.

中學數學教程

第5冊

9634.6
881
J

017018

英國 S.M.P. 中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

BOOK 5

石景宜先生贈書
年 月 日



S9000142

九章出版社 出版
製作・發行：學英文化事業有限公司

THE
SCHOOL
MATHEMATICS

英國 S.M.P. 中學數學教程

●(中文版第五冊)●

出版者：九章出版社

製作・發行：學英文化事業有限公司

地址：羅斯福路四段52巷6號

電話：(02)3946693

印刷者：九章打字印刷行

出版日期：中華民國72年10月

定價：普及版700元整

郵政劃撥：578690 學英文化公司帳戶

九章出版社
學英文化事業有限公司

第五冊 序言

第五冊是S.M.P. 初級數學課程的最後一冊。在我們說明各章內容之前，利用這個機會，我們再說明一些有關這套書的目標與希望，這些都是在第一冊序中所提到的：“……這套書著重於……基本觀念的了解……”；“我們希望這套書更能配合學生自然學習的過程，並預期能鼓勵教師們試著創新教學法。”

我們感覺這些敘述所定的原則都已溶入這套書中。課程中介紹許多涉及數學基本觀念思考的新教材，特別如關係與變換的觀念；方程式有解的代數結構。直接的參考後者，可以討論廣泛的代數，而從這種類比的學習，利用基本的共同性來加強了解。

利用試驗法，在第一年內最初的重點是強調經驗和簡單的觀念，避免運算和計算。這是根據自然學習過程的認知論原則，但是根據這種學習過程，在第3~5冊也激發我們將前面所介紹各種觀念組合，並在第4、5冊中介紹運算和計算，以熟練運算技巧，滿足獲得正確答案的心理。有人認為現代的數學課程應省略計算，這種觀念是不正確的，但是我們深信在早期花較多時間於吸收數學經驗，以引導學生提早做基本觀念的討論，這種做法是正確的。而且能比一般的方式更有效的達到了解的目的，並減少不愉快的學習過程。或許在S.M.P. 初級數學課程下的學生需要進一步加強其計算技巧，但我們相信這種能力很快的就能做到。而這套初級課程事實上確實能激發學生學習各種教材的興趣，並主動的致力於研究問題和尋求答案的準備。

另外還有一點要特別強調的。在S.M.P. 每冊書的前言中，都有這麼一段話，“……為避免發展成新的教條……，我們希望有持續不斷改變的可能性。”

參與這套書的工作人員，在製作初級數學課程時就已要求各方的協助；他們想了解那些教材，如網路、變換幾何確實在初級

課程可教，那些教材，如代數結構的利用，確實能提供致力於研究代數的工具。利用這套課程，他們了解這套書確實提供了可行的計畫，並要求能形成他們自己的觀念。一但傳統課程所形成的模式被打破後，教師們會覺得呈現在他們面前可能性非常廣泛。我們可以確定的是這套書不應該也不被認為是處理初級數學教材，唯一令人滿意的方式。我們所要說明的是處理這些教材要經過謹慎的考慮和經過試驗。

在發展學生自己的觀念時，或許教師們認為應比傳統教材要更加深入。比方說相似性，在這套書是在變數幾何中等距變換的範圍內，而教師們可能願意花更多的時間深入到布氏代數上，或是教師們對電腦的教材也有意見，認為應該立刻將電腦加入，而準備的重點在數值研究與程式。在另一方面，或許他們也感覺到新的方式也適用於傳統教材的範圍內，因此應該包括更多的實用算術，或統計，或開始利用函數接觸微積分。我們希望能鼓勵任何的這種研究，並以最真誠的態度加以批評。這就是我們所談論“持續不斷改變”的這種發展。我們認為在數學課程中，有一些基本的概念和技巧，不同的重點，在未來的幾年中都是數學的中心。而我們期望由這些觀念和技巧所組成的教材能獲得不斷的改進並考慮加以擴展。我們更期望這種研究的興趣和教材安排的新方式，能在全國各地出現，以改進初級課程中的數學大綱。

第5冊的教材分成兩大部份：新的教材與複習部份。新的教材一部份是完成S.M.P. 初級數學會考的內容，其餘所包含的教材，考慮為圓滿處理某些教材而加上的。可能稍微超過會考內容。複習部份包含複習的各章和各類的例題。

新的教材有八章，或許最基本的是第6章幾何的不變量。不變量首先做純幾何的說明，然後使用矩陣來檢驗。這一章也指出進行一般證明的方式，但並不實際的這樣去做。目前，我們仍然遵循S.M.P.的政策，利用特例來討論一般結果的可能性。

二次函數這一章研究函數與圖形的檢驗，一般方程式的圖形解。然後局限在二次方程式解的研究，首先利用反函數，其次再

用“乘積為零”這個性質來解。並將後者的觀念加以延伸，如同大多數 S.M.P. 處理教材一樣，考慮在變換、集合、矩陣代數和有限算術中的類似敘述。

線性規劃這一章中，利用圖解法解不等式是第三冊的延續。只要將這一章的觀念擴展，就包括極大、極小的處理，並借機直接發展數學模型的觀念。另外，面積與圖形一章，對圖形的詮釋也扮演著很重要的角色。

在數學的應用上有兩章：第 5 章實用算術，第 7 章平面圖與正視圖。前者我們留下“錢”的算術為習題，做比率的計算，並說明如何設計的一些步驟。而這一章可刺激學生，引起更多有關的算術事件，做全盤的討論。後者是利用畫圖與計算兩者，對三維空間的表示法與研究。至於第 2 章中，三角是向量的中心，而向量的重點在向量的大小，如速度，與向量的分量；由這裏也引導出一般旋轉矩陣的發展。在球體的幾何一章中，三角也不可避免的被提到，這一章是強調在三維空間中數學應用的另一個例子。

在準備複習章節的教材時，作者企圖將初級課程的內容全部包括在內，並以能看出主要數學觀點形成的方式來表現。對初學者而言，是強調觀念之間的相關性，而非做一步一步的發展。這幾章也是資料的根源，有時也可提供做參考。

在結構一章，特別強調方程式有解的條件與公式的運用這些教材，也討論了關係與函數。

以圖形來說明函數是在坐標與函數這一章中加強的。同時也提到算術與代數的圖形。

在計算這一章中，包括很廣泛的教材：數系、計算方法與精確性、比及比例式、面積與畢氏定理、一次方程式與不等式的解、公式的重排。

統計與機率這一章中，以一個簡單的實例，說明許多統計的觀念，認識統計在日常生活中的應用。

幾何這一章中，包括變換幾何、向量幾何與傳統幾何課程中所熟悉的角度問題。在課文中不以定理的形式表示加以學習，這

是希望在需要用幾何方式證明時，假設這些事實是已知的。

矩陣可以用來表示許多不同的事物：關係、路線、變換等，因此矩陣的利用已成為初級數學課程中，一個主要的溝通因素。矩陣能使我們將變換幾何表成代數形式，而在矩陣這一章的結尾，我們剛好欣賞到矩陣代數其本身的結構。

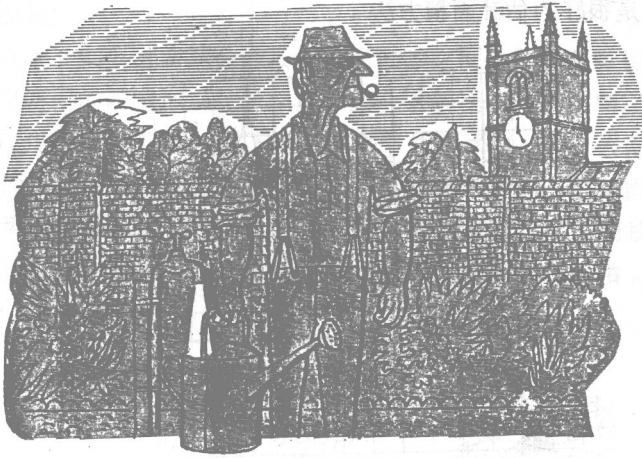
最後有四十節的複習題，這些複習題包含整個課程中的所有教材。這些問題有些是取材於初級的考試題，或是取材於S.M.P.各所學校中15歲級的考試題。這些習題主要是以簡短的問題發展而成，需要相當的努力，以持續不斷專心一致的精神來做。注意有許多題目需要很好的計算與運算能力。

如同這套書的前幾冊，習題解答附於教師手冊上。

目 錄

1	面積與圖形	1
2	向量與三角形	17
3	球	31
4	二次函數	48
5	實用算術	62
6	幾何學中的不變性	90
7	平面圖與正面圖	111
8	線性規劃	137
9	結構	156
10	坐標與圖形	183
11	計算	200
12	統計與機率	230
13	幾何	253
14	矩陣	293
	綜合複習題	314

1 面積與圖形



1. 不規則圖形的面積

在人類的生命旅程中，往往會遇做估計面積大小的需要。比方說計算一塊土地的大小；一塊地毯的價值；或是粉刷廚房時，決定需要多少罐的油漆等等。一般長方形形狀的房間，要測量地面的面積，你們大致都沒有困難；但是任意一塊土地的面積要你來測量，可能就是個問題了。

(a)圖 1 是起居室的平面圖，如果地毯的價錢為每平方公尺 3 鎊，那麼起居室地板鋪上地毯時，需要多少錢呢？

(b)圖 2 是一塊土地的平面圖，要賣 1200 鎊。如果這個地段的土地每平方公尺價值 2.50 鎊，那麼賣 1200 鎊是不是很合理？

要估計圖形的面積有很多方法，其中有一些你早已經會使用了。上面問題中的面積或許你會利用方格紙中的方格來計算，如果這樣的話，對於不完整的方格，你要怎麼處理呢？

如果將一塊土地大略的分成直角三角形和梯形（如圖 3），你會發現到這是很好的估計面積方法。

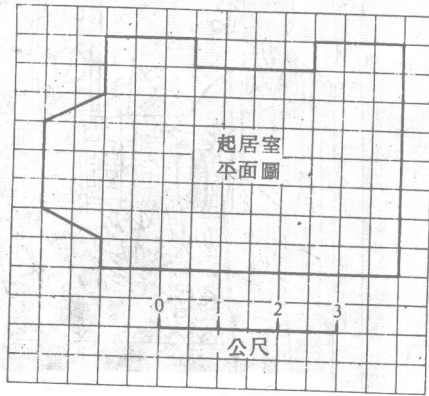


圖 1

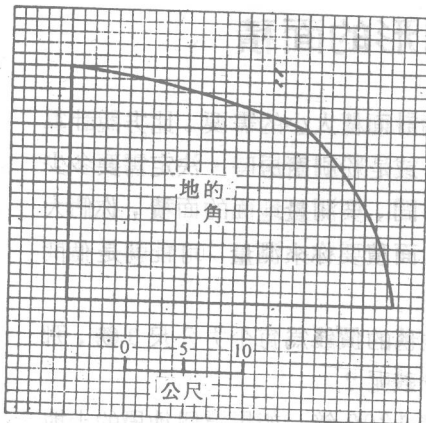


圖 2

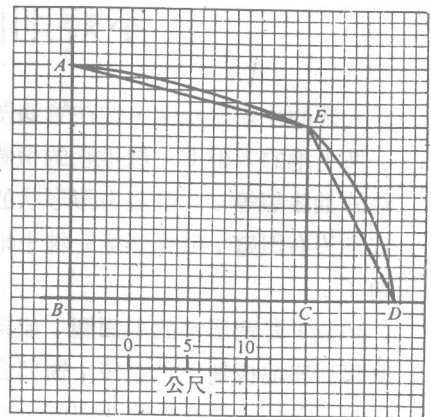


圖 3

(c)求 AB , BC , CE 和 CD 的長。利用這些長度去計算梯形 $ABCE$ 和三角形 ECD 的面積，並求出四邊形 $ABDE$ 的面積。這個面積比原來土地的面積大呢？還是小呢？

(d)利用幾個簡單的形狀，作成一個包含圖 2 圖形的多邊形，並求此多邊形面積。

現在圖 2 圖形的面積會介於兩個已知數之間。將這些數值與利用計算方格所得的答案加以比較，並檢查一下答案會介於他們之間。

在實用上，我們可以用下面的方法來估計面積：在一張薄紙板上剪下平面圖並準確的秤出重量。再以同樣的紙板秤出一已知面積（比方 60 平方公分）圖形的重量，比較兩者的重量就可求出面積。利用這種方法（如果你有材料的話），求圖 4 中花園平面圖的面積。

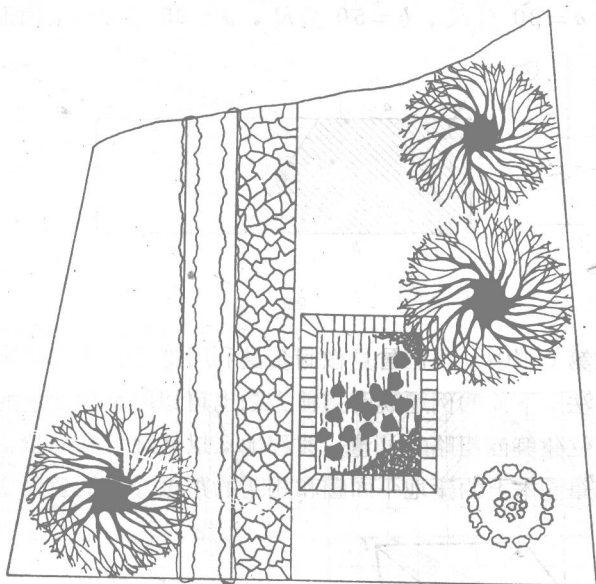


圖 4 花園平面圖；比例尺：1 公分表 4 公尺

(e)描出圖 4 中的圖形，以三角形，長方形，梯形作成網路，逼近這個圖形，計算這些三角形，長方形，梯形的面積，因此得到兩個面積

p 和 q ，使得

$$p \leq \text{花園面積} \leq q。$$

你如何增加準確性呢？

利用多邊形來逼近一個區域，我們發現梯形是一種特別有價值的形狀，因為梯形的面積很容易計算。

(f) 考慮圖 5 中陰影部份的梯形，並將梯形繞傾斜邊的中點旋轉 180° 。那麼梯形與其映像合併得到什麼圖形呢？

所得長方形的邊長是多少？

說明為什麼梯形的面積(A)公式為

$$A = \frac{1}{2}(a+b)d。$$

當 $a=30$ 公尺， $b=50$ 公尺， $d=25$ 公尺時，梯形的面積是多少？

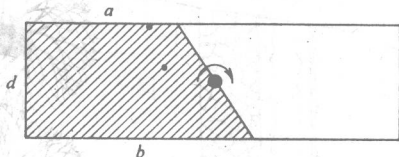
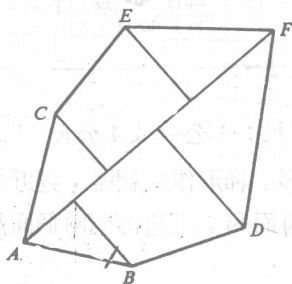


圖 5

在第 1 冊中，我們曾見做測量員利用支柱與基準線來固定土地邊界的方法。下面的例題說明這種方法也可以用來估計土地的面積。

有位建築商粗略的測量一塊建地，以估計他的面積。圖 6 是這位建築商筆記本上的建地平面圖和相關的距離（單位公尺）。



	F	
E 90	300	
	200	
	160	120 D
C 70	100	
	60	80 B
	0	
	A	

圖 6

有位建築商粗略的測量一塊建地，以估計他的面積。圖 6 是這位建築商筆記本上的建地平面圖和相關的距離（單位公尺）。

(g) 從這些資料，計算近似的面積（單位平方公尺）。

如果法律規定房屋的密度為每 500 平方公尺一棟時，那麼這塊建地可建多少棟？

習題 A

1 要培養一塊草地，需要以 60 克/平方公尺的比率來播種（圖 7）。求這塊草地的近似面積及所需要的種子量。

2 橫斷一山谷建立一水壩，形成一水庫。水庫的平面圖如圖 8。

(a) 求水庫的面積。

(b) 如果水面上升 5 公分，求水庫中水量大約增加多少公升？

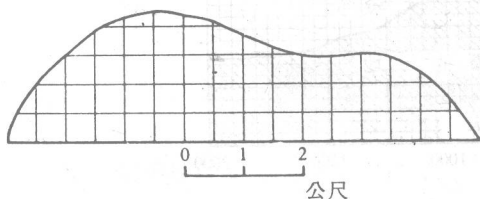


圖 7

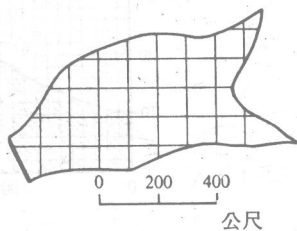


圖 8

3 求陰影梯形的面積（圖 9）

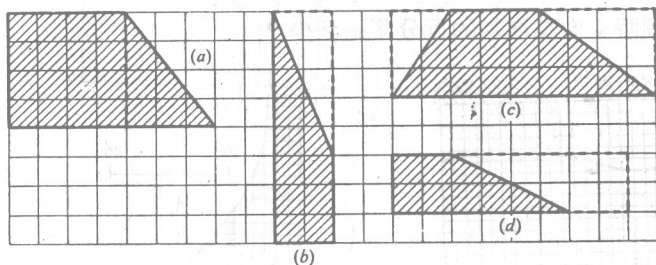


圖 9

4. 一梯形兩平行邊長度為 a 和 b （參閱圖 10），兩平行線之間的距

離為 d 。以 a , b 和 d 表示梯形的面積(A)公式。

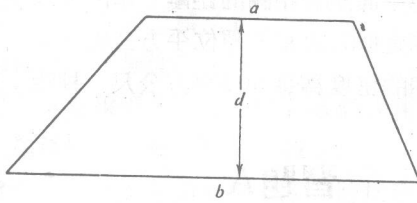


圖 10

5. 爲了拓寬車道，圖 11 中的陰影部份是所需要購買的土地。利用計算方格或分割成梯形的方法，求所購買土地的面積。如果土地價值爲每 1000 平方公尺 80 鎊，那麼土地價值多小？（注意兩軸的單位不一致。）

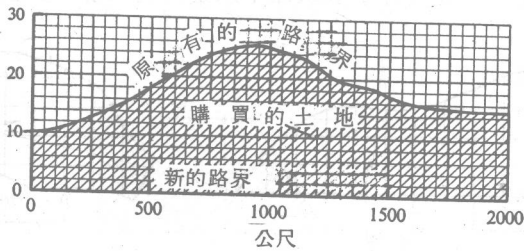


圖 11

6. 圖 12 是某一天海岸的平面圖。

求未被(a)高潮； (b)低潮所覆蓋的面積
當退潮時，面積增加的百分率是多少？

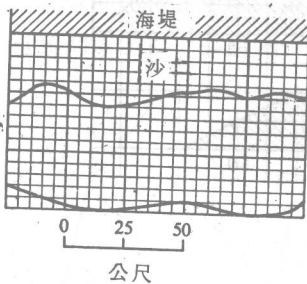


圖 12

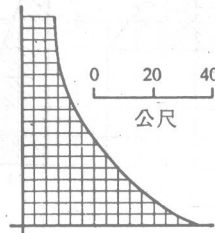


圖 13

7. 橫斷山谷要構築一水壩，圖13是水壩的縱切面。如果每立方公尺的水泥重1.8噸，那麼長100公尺的水壩需要多少噸的水泥？（1噸=1000公斤）

8. 在一條交通的幹道上，有一段路面凹陷時常造成車禍。圖14為這段道路的縱切面，虛線為計畫中新的路面。

如果道路寬12公尺，那麼需要運多少立方公尺的土，才能造成新的路面。

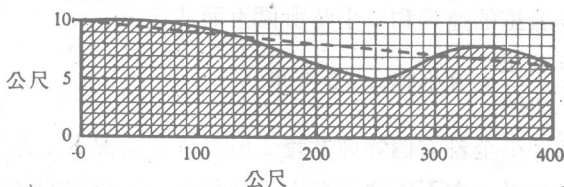


圖 14

2. 圖形下的面積

圖15是一個男孩散步時的速率記錄。

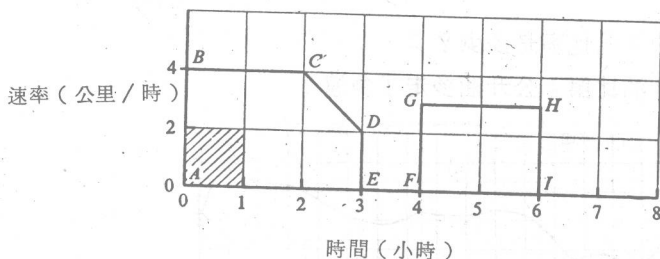


圖 15

- 在前2小時，他得有多快？
- 圖形中 CD 部份說明了些什麼？
- 如果他早上9:30離開家，那麼在什麼時間他在午餐呢？
- 在前兩小時裏，他走了多遠？
- 陰影的方格面積表示什麼意思呢？

(f)求五邊形 $ABCDE$ 的面積，計算男孩在休息前已經走了多少距離。

(g)男孩全部總共走了多遠？

後面的三個問題或許會令你迷惑，為什麼“面積”能“代表”“距離”呢？

答案的關鍵在“代表”這個字眼上。在上面的圖形中，水平線的長度代表時間；而鉛直線的長度代表速率，或是說代表每小時的距離。因此求圖形下的面積時，我們將時間的單位量和速率的單位量相乘。例如因每小時5公里的速率和2小時所圍的面積代表

$$\frac{5 \text{ 公里}}{1 \text{ 小時}} \times 2 \text{ 小時} = 10 \text{ 公里}$$

圖形下的面積並不全都有個物理意義，但是許多情況下，他們確實代表一個有意義的量。在下面的例題中，雖然兩軸所代表的量意義和上題不同，但是面積仍然代表距離。

有一段旅程需要2公升的汽油量。圖16是一輛汽車在這段旅程中汽油消耗的比率情形。

(h)說明為什麼陰影的正方形代表 $\frac{1}{2}$ 公里。

(i)利用計數方格的方法，求出圖形下的面積。並由此導出這輛汽車的旅程長度。

(j)汽油消耗量的平均比率是多少？

(k)汽車第2公升油比第1公升油多走了多遠？

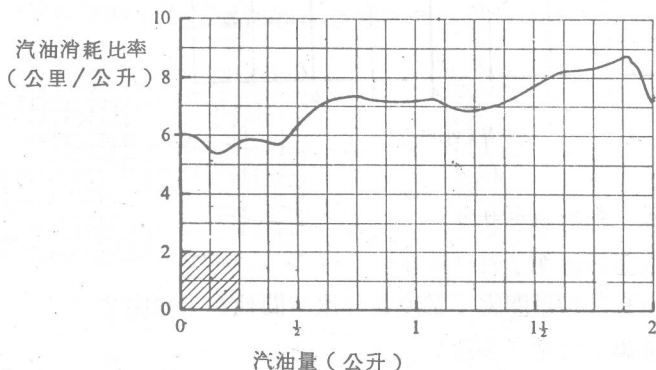


圖 16
~ 8 ~

習題B

1 說明圖 17 中陰影面積代表什麼？

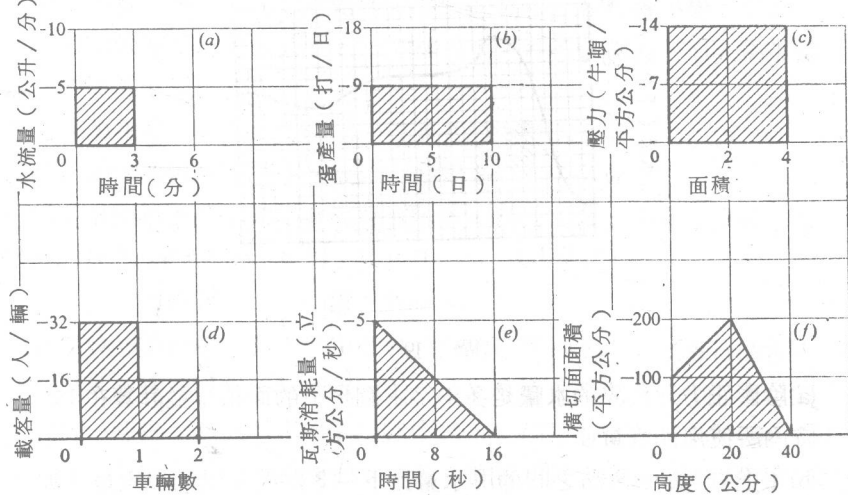


圖 17

2 圖 18 表示在一短暫的冬季裏，一家庭所使用的煤炭數。

(a) 陰影的正方形代表什麼？

(b) 圖形下全部的面積是多少？

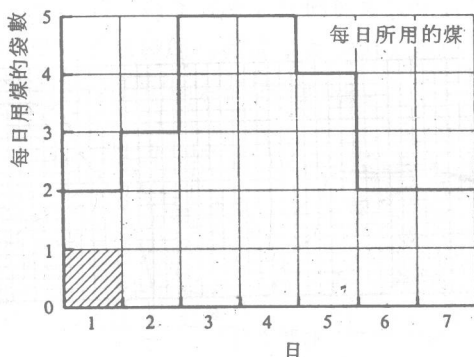


圖 18