高中数学

复习提纲

遵义市教育局教研室

一九七八年三月

高中数学目录

第一章 代　数

一、函 数 概 论

1. 变量与函数

在运动过程中，很多量是可以取不同数值的，但在一定条件下也有一些量可以取同一的值，前者叫做变量，后者叫做常量。客观事物在其运动过程中，量与量之间有其相互依赖关系，往往是一个变量取一个确定的值后，另一个变量就有一个确定的值和它对应。数学中把前面一个变量叫做自变量，后一个变量叫做自变量的函数。变量 y 是变量 x 的函数，用符号 $y=f(x)$ 表示。

在一个函数中自变量的可取值集合叫函数的定义域，而对应的函数值之集合叫函数的值域。

对于 x 的函数 $f(x)$，$f(a)$ 就代表自变量 x 取值 a 时，对应的函数值。

例如凸多边形的边数 n 取一个确定的值后，其内角和有确定的值和它对应，而面积就没有确定的值和它对应。因此，内角和是边数 n 的函数，而面积就不能单看成边数 n 的函数。对于内角和是边数 n 的函数可以用记号 $S(n)$ 表示，而 $S(6)=(6-2)180°$，就表示六边形的内角和（720°）。这个函数的定义域是不小于 3 的自然数，而值域为 180° 的正整数倍的

角度。

又如，x 的某一代数式，当 x 取一个确定的值后，代数式就有确定的值和它对应，故 x 的代数式是 x 的函数。其定义域是使代数式有意义时 x 取值的集合，其值域是代数式一切值的集合。

2．函数图象

在直角坐标系中，自变量取的值用横坐标表示，函数的对应值用纵坐标表示，由这些全体点而且再无其它别的点组成的几何图形叫做函数的图象。常可以对自变量在定义域内取一系列的值 $x_1<x_2<x_3<\cdots$，求出对应的函数值 y_1，y_2，y_3，…，在直角坐标系中描出点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，…。然后用一条光滑的曲线顺次连接起来。就得到函数的图象。函数图象直观地形象地表现了函数的特性。

3．函数的表示法

一般常用的表示法是解析法、列表法、图象法。三者各有优缺点，但在数学上，由于要从理论上研究函数性质，故常采用解析法，即用一个式子或符号来表示一个函数。

4．增(减)函数

如果对于函数 $f(x)$，在定义域内，对于 x_1,x_2 两个自变量之值，当 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 叫增函数。如果对于 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 叫减函数。增函数、减函数都叫单调函数。其图象是随 x 值的增加总是伸向右上方或右下方的。

5．奇(偶)函数

对于函数 $f(x)$，如果对于 x 取任意一个值 $x=a$，都有 $f(-a)=f(a)$，则 $f(x)$ 叫偶函数；如果都有 $f(-a)=-f(a)$，

则 $f(x)$ 叫奇函数，偶函数的图象关于 OY 轴对称，奇函数的图象关于原点对称。例如 $|x|$，$2x^2+1$，…等都是偶函数，而 x^3，x^3+x，…等都是奇函数，而 $x+1$，x^2+x，… 等既非偶函数，又非奇函数。

6．有界函数与无界函数

对于在函数 $f(x)$ 的定义域内一切自变量的值所对应的函数值的绝对值均小于某一正的定数，即 $|f(x)|<m$，则 $f(x)$ 叫有界函数，否则叫无界函数。例如 $\frac{5}{x^2+1}$，$\sqrt{1-x^2}$ 是有界函数，而 x^2，$x+1$ 是无界函数，有界函数的图象一定夹在平行于 OX 轴的两条直线的带形内。

7．周期函数(见三角部分)

8．反函数

y 是 x 的函数，如果反过来 y 取一个确定的值，若 x 有确定的值和它对应，即把 y 看成自变量，x 是 y 的函数，这个函数叫原来函数的反函数，从定义可知；原来函数的值域是它的定义域，而原来函数的定义域是它的值域。对于用 x 的数学式表示的 x 的函数 $y=f(x)$，可以由此解出 x，使 x 用 y 表示。然后由于习惯是把 x 当作自变量，x，y 互换后，就可以得到用 x 来表示的原来函数的反函数。

例如函数 $y=\frac{2x+1}{x-3}$，由此解出 $x=\frac{3y+1}{y-2}$，交换 x、y 便得 $y=\frac{3x+1}{x-2}$，故 $y=\frac{2x+1}{x-3}$ 的反函数是 $y=\frac{3x+1}{x-2}$，由于 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的定义域是不等于 2 的一切实数，故函数 $y=\frac{2x+1}{x-3}$ 的值域是 y 不等于 2 的一切实数。

由于反函数的定义，在习惯上要求以 x 为自变量，必须交换 x、y 的位置，故一个函数的图象和它的反函数的图象关于一、三象限的角平分线为对称图形。

一个函数不一定有反函数存在，例如 $y=\frac{|x|}{x}$，另外有些函数的反函数也不一定唯一，例如 $y=x^2$ 的反函数有两个，即 $y=\pm\sqrt{x}$。

例1．已知 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，求 $f(x^3)$、$f(1-x)$、$f\left(\frac{1}{x}\right)$。

解：$\because \quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$$\therefore \quad f(x^3)=\frac{1}{(x^3)^2+1}=\frac{1}{x^6+1},$$

$$f(1-x)=\frac{1}{(1-x)^2+1}=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{x^2}{1+x^2},$$

例 2．求函数 (1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$，(2) $g(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 之定义域与值域。

解：$\because$ 要使 $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 有意义，必须被开方数非负，而且分母不能为零。即

$\frac{x-3}{x-2}\geqslant 0$，$x\neq 2$，解此不等式得 $x<2$ 或 $x\geqslant 3$，

$\therefore$ $f(x)$ 的定义域是小于 2 的全体实数与不小于 3 的全体实数的总体。

但当随着 x 越来越接近于2，则 $x-2$ 就越来越小，而 $x-3$ 又不会越来越小，故在定义域内，$\frac{x-3}{x-2}$ 可以取一切正数。另外当 $x=3$ 时、$f(3)=0$、加之算术平方根非负，故这函数的值域是不等于 1 的一切非负实数。

要使 $g(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，必须而且只须被开方数同时非负，且分母不能为零。即

$$x-3\geqslant 0 \qquad\qquad x-2>0$$

解之得 $\qquad\qquad x\geqslant 3$

故函数 $g(x)$ 的定义域是不小于 3 的一切实数，又因为 $x\geqslant 3$，$x-3\geqslant 0$，当然 $x-2>0$。

$$\text{但 } x-3<x-2, \qquad \therefore \quad \frac{x-3}{x-2}<1。$$

又因 $x=3$ 时 $g(3)=0$。所以函数的值域是不小于零且小于 1 的实数。

习　　题

1．已知函数 $y=\frac{5}{x^2+1}$。

(1) 确定这函数的定义域。

(2) 求函数图象与 OY 轴交点的坐标。

(3) 证明函数图象不与 OX 轴相交。

(4) 为什么这函数的值不能为 6、为 0。

(5) 证明这个函数是偶函数。

(6) 证明这个函数是有界函数。

(7) 当 x 在什么范围内变化时，这个函数是增函数。

2. 求下列函数的定义域和值域

(1) $y=\dfrac{|x|}{x}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$; (4) $y=\sqrt{|x|-1}$。

3. 证明：若 $f(x)$，$g(x)$ 都是奇函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数。

4. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $xf(x)$ 是奇函数。

5. 求函数 $y=\dfrac{4x+3}{x+2}-1$ 的反函数。

6. 已知函数 $y=x-\sqrt{25-x^2}$，画出它的图象。

二、几个初等函数

在中学已学过正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、对于这些函数的性质、图象等，列表如下(见 8—11 页)：

例 1. 求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x$ 的定义域。

解：要使对数函数有意义必须真数为正。

$\therefore \quad \log_2 x>0$,

$\because \quad 2>1, \quad \therefore \quad x>1$,

$\therefore \quad y=\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x$ 的定义域是 $x>1$ 的实数。

例 2. 比较下列各数的大小。

(1) $0.2^{-2.2}$ 与 $0.2^{-\sqrt{5}}$; (2) $\log_2 3$ 与 $\log_2\sqrt{10}$;

(3) $\log_2\log_{\frac{1}{2}}0.1$ 与 $\log_2\log_{\frac{1}{2}}0.2$。

解：(1) $\because\ 0.2<1$，0.2^x 为减函数，又 $-2.2>-\sqrt{5}$

$\therefore \quad 0.2^{-2.2} < 0.2^{-\sqrt{5}}$。

(2) $\therefore \quad 2 > 1$，$\log_2 x$ 为增函数，又 $3 < \sqrt{10}$，

$\therefore \quad \log_2 3 < \log_2 \sqrt{10}$。

(3) $\because \quad \frac{1}{2} < 1$，$\log_{\frac{1}{2}} x$ 为减函数，又 $0.1 < 0.2 < 1$

$\log_{\frac{1}{2}} 0.1 > \log_{\frac{1}{2}} 0.2 > 0$，

$\because \quad 2 > 1$，$\log_2 x$ 为增函数

$\therefore \quad \log_2 \log_{\frac{1}{2}} 0.1 > \log_2 \log_{\frac{1}{2}} 0.2$。

例 3. 确定 $\log_2 0.018$ 在哪两个整数之间。

解：$\because \quad 2^{-6} < 0.018 < 2^{-5}$，$2 > 1$，

$\therefore \quad \log_2 2^{-6} < \log_2 0.018 < \log_2 2^{-5}$，

即 $\quad -6 < \log_2 0.018 < -5$。

例 4. 已知二次函数 $f(x)$：$f(1) = 6$，$f(3) = 16$，$f(-3) = -2$。(1) 确定 $f(x)$ 的函数表达式，(2) x 在取什么范围的值时函数递增、递减。(3) 在整个实数范围内，$f(x)$的极值是多少。(4) 在 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 范围内，$f(x)$ 的最大值是多少。(5) 画出函数图象。(6) 当 x 取何值时 $f(x) > 0$，$f(x) = 0$，$f(x) < 0$，$f(x) = 2.5$。

解：(1) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$，

$\because \quad f(1) = 6$，　得 $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 6$，即

$$a + b + c = 6,$$

$f(3) = 16$，　得 $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 16$，即

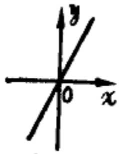
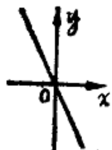
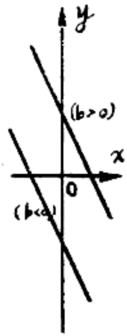
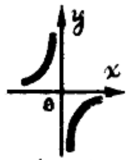
$$9a + 3b + c = 16,$$

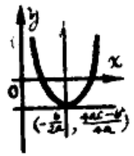
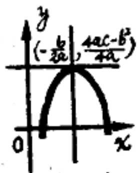
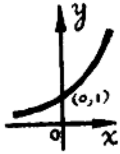
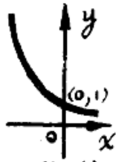
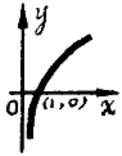
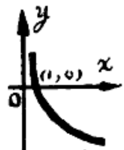
$f(-3) = -2$，得 $a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = -2$，即

$$9a - 3b + c = -2。$$

性质＼名称	正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$	一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$	反比例函数 $y=\frac{k}{x}$
定义域	一切实数	一切实数	一切不为零的实数
值　域	一切实数	一切实数	不为零的一切实数
单调性	$k>0$，递增 $k<0$，递减	$k>0$，递增 $k<0$，递减	$k>0$，递减 $k<0$，递增
有界性	无界	无界	无界
奇偶性	奇函数	$b\neq 0$， 非奇非偶	奇函数

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$	指数函数 $y=a^x\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$	对数函数 $y=\log_a x\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$
一切实数	一切实数	一切正实数
$a>0$ 时，$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$， $a<0$ 时，$y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$，	一切正实数	一切实数
当 $a>0$ 时，$x\leqslant-\frac{b}{2a}$ 递减，$x\geqslant-\frac{b}{2a}$ 递增，当 $a<0$ 时 $x\leqslant-\frac{b}{2a}$ 递增，$x\geqslant-\frac{b}{2a}$ 递减。	$a>0$，递增 $a<0$，递减	$a>0$，递增 $a<0$，递减
无界	无界	无界
当 $b=0$，$c=0$ 偶函数，否则非奇非偶。	非奇非偶	非奇非偶

图象	 (k>0)  (k<0)		 (k>0)  (k<0)
图象与 x 轴的交点	原点	$\left(-\frac{b}{k},0\right)$	无
图象与 y 轴的交点	原点	$(0,b)$	无
极值	无	无	无

 (a>0)  (a<0)	 (a>1)  (a<1)	 (a>1)  (a<1)
△>0，二公共点 △＝0，一公共点 △<0，无公共点	无	(1.0)
$(0,c)$	$(0,1)$	无
$x=-\dfrac{b}{2a}$，$\left(\begin{array}{c}a>0\\ \text{极小}\end{array}\right)$ $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，$\left(\begin{array}{c}a<0\\ \text{极大}\end{array}\right)$	无	无

解之：得 $a=\frac{1}{2}$，$b=3$，$c=\frac{5}{2}$。

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}。$$

(2) $\because\quad -\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\times\frac{1}{2}}=-3$，$a=\frac{1}{2}>0$。

$\therefore$ 当 $x\leqslant-3$ 时，$f(x)$ 递减。$x\geqslant-3$ 时，$f(x)$ 递增。

(3) 在整个实数范围内，因为 $a>0$，故 $f(x)$ 有极小值，无极大值，这个值等于

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}-3^2}{4\times\frac{1}{2}}=\frac{5-9}{2}=-2。$$

(4) 在 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，因 $f(x)$ 是递增的，故有最小值 $f(-1)=0$，最大值 $f(0)=\frac{5}{2}$。

(5) 以 $O'(-3,-2)$ 为新原点，平移坐标轴得一新坐标系，$x'O'y'$，在 $x'O'y'$ 上画出 $y'=\frac{1}{2}x'^2$ 的图象，对原坐标系来说，就是 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 的图象

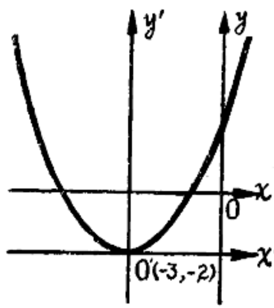


图 1

(6) 由图象观知：

当 $x<-5$ 或 $x>-1$ 时，

$f(x)>0$。

当 $-5<x<-1$ 时，

$f(x)<0$。

当 $x=-5$ 或 $x=-1$ 时，$f(x)=0$。

当 $x=0$ 或 $x=-6$ 时，$f(x)=2.5$。

（注：从图象观察并不精确，可用解不等式或方程的方法来解决上述问题，它相当于解下列不等式或方程，

$$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}>0; \qquad \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}<0;$$

$$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=0; \qquad \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=2.5。)$$

*例 5. 求函数 $y=\frac{k}{3x^2+\sqrt{3}x+2}$（$k$ 是非零常数）的极值。

解：分母是一个二次函数，当 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2\times3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，取极小值 $\frac{4\times3\times2-(\sqrt{3})^2}{4\times3}=\frac{7}{4}>0$。故分母为正数。在这种情况下，

$$当\ k>0\ 时，f(x)\ 取极大值\ \frac{4}{7}k。$$

$$当\ k<0\ 时，f(x)\ 取极小值\ \frac{4}{7}k。$$

（注：本题如果分母极小值为负，讨论较繁。）

例 6. B 在 A 正东 10 浬，已知甲船以每小时 12 浬的速度从 A 向北航行，乙船同时从 B 出发以每小时 16 浬的速度向西航行，问何时两船相距最近，这个距离是多少。

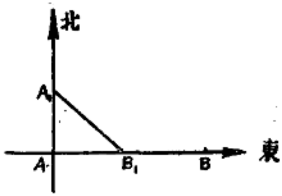


图 2

解：设 t 小时后两船相距为 s 浬，如图 t 小时后甲船到达 A_1，乙船到达 B_1。

$$AA_1=12t, \quad BB_1=16t, \quad AB_1=10-BB_1=10-16t。$$

因两船航向互相垂直，由勾股定理得：

$$s=\sqrt{(12t)^2+(10-16t)^2}=20\sqrt{t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{4}}。$$

因被开方数是 t 的二次函数，当 $t=-\frac{-\frac{4}{5}}{2\times 1}=\frac{2}{5}$ 时，

$t^2-\frac{4}{5}t+\frac{1}{4}$ 取极小值（$\because a>0$），$\frac{4\times1\times\frac{1}{4}-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}{4\times 1}=\frac{9}{100}$，

故当 $t=\frac{2}{5}$ 时 s 取极小值 $20\sqrt{\frac{9}{100}}=6$。

答：开船后24分钟，两船相距最近，最近距离为6浬。

例7. 用定长 L 米的材料做成一个上面是半园，下面是矩形的窗子，问按怎样尺寸做才能使面积最大。

解：设窗子下部矩形的宽为 $2x$ 米，高为 y 米，面积为 S 平方米。由题意得

$$4x+2y+\pi x=L$$

即 $$(4+\pi)x+2y=L,$$

$$S=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2,$$

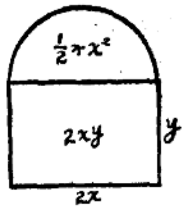


图 3

得 $$y=\frac{L}{2}-\frac{4+\pi}{2}x。$$

$\therefore$ $$S=2x\left(\frac{L}{2}-\frac{4+\pi}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}x^2,$$

化成 $$S=-\left(4+\frac{\pi}{2}\right)x^2+Lx。$$

当 $$x=-\frac{L}{2\left[-\left(4+\frac{\pi}{2}\right)\right]}=\frac{L}{8+\pi}\text{ 时，}$$

$$y=\frac{L}{2}-\frac{4+\pi}{2}\cdot\frac{L}{8+\pi}=\frac{2}{8+\pi}L\text{ 时，}S\text{ 取极大值 }(a<0)\text{。}$$

这时 $2x=y$，故窗子要做成下面为边长是 $\frac{2L}{8+\pi}$ 的正方形时，才能使窗子的面积最大。

利用二次函数求极值，不仅能解决能归结为二次函数的问题，也能解决可以转化成求二次函数极值的那种问题，如例 5、例 6。解决问题分为两步，一是建立二次函数式，二是利用二次函数的理论求极值，而题目的问题也分几种；一是问在什么情况下取极值，这只需求自变量的值，二是问在什么情况下取极值，极值是多少，这要求求出自变量的值和极值，三是只问极值是多少，这就不必求自变量的值，解决极值问题的难点是建立函数式，例 7 提供了一个值得参考的方法，有些问题由于受实际限制，对于自变量取值有限制，还必须考察边界值，这不仅能求出极大(小)值，还能求出最大(小)值。这一点必须要注意理论联系实际。

习　题

1．为什么指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

2．已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(1)=5$，$f(-2)=-4$，求 (1) $f(-7)$ 是多少，　(2) 当 x 取何值时 $f(x)=0$。

3．用图象法求下列方程的近似解。