
* 中国人民解放军测绘学 *
* 一九七九年度技术讨论会 *

水准路线的重力点密度与正常高计算

陆 仲 连

一九七九年四月

水准路线的重力点密度与正常高计算

陆仲连

国家大地测量法式规定，我国高程系统采用正常高系统。为了推求每个水准点的正常高，必须沿水准路线布测重力点，以便为计算水准点间正常高差的异常改正项提供空间异常值。那末，究竟在水准路线上重力点密度多大为最宜呢？即既能满足精度要求，而测量工作又最少，这个问题目前尚无确切之答案。

对此问题作过较多论述的有别里宁 (Л. П. Беринг) 发表的一篇论文，其主要内容在 (1) 中有引述，它给出了如下的计算水准路线上重力点间距的公式：

$$S = \frac{\eta}{2xt_g\beta_m} \quad (1)$$

式中 η 为水准路线上重力点的间距，以公里为单位； x 为水准路线所在地区空间异常公里内偶然中误差，以毫米为单位； $t_g\beta_m$ 为水准路线的平均坡度。别里宁认为，代表误差系数的两倍； $t_g\beta_m$ 为水准路线的平均坡度。别里宁认为，有这样密度的重力点，所算出的每段异常改正项的误差将小于 $\sqrt{L}/2$ (其中 L 为该段水准点的间距) 因而可以认为没有因计算而损害精度。

按照 (1) 式，可以算得如表 1 所示的结果。

表 1

平均坡度 $t_g\beta_m$	代表误差系数的两倍 x	水准点间距 S	
		I 等 ($\eta = \pm 0.5 \text{ m}$)	II 等 ($\eta = \pm 1.0 \text{ m}$)
0.005	1	50 ^{mm}	100 ^{mm}
0.01	2	12	25
0.02	2.5	5	10
0.03	3	3	6

根据《国家水准测量规范》(2)的规定,一、二等水准路线上“每隔2—6公里”埋设一座普通水准标石,在特殊困难地区“可放宽至10公里左右”。若按表1的要求,在水准点点距较长的段,除了在水准点上必须测定重力外,还需在中间加测重力点,这不仅增加了重力测量的工作量,而且实施起来还有很大的困难。

问题在于是否一定要有这么多的重力点才能保证精度。如果确实需要,即使有困难,也应尽力克服,按要求完成重力测量。但一些试验数据证明,并非如此。在表2中给出了一段水准路线上的实测数据和计算结果。

表2

水准点号	点距 L	观测高差 Δh	空间异常 $\varepsilon - \gamma$	$(\varepsilon - \gamma)_m$	λ (*)
62	5.2 ^{km}	+80.1058 ^m	+375 ^{mgL}	+43.8 ^{mg}	+3.6 ^{mm}
63			+50.1		+15.6
补2	6.3	+231.6522	+81.7	+65.9	+33.6
65—1	5.4	+327.0446	+119.5	+100.6	+33.6
66—1	4.1	-261.5187	+92.0	+74.4	-28.2
68	5.9	-368.1124	+56.7	+52.0	-7.1
中41	3.3	-132.8994	+47.3		

(*) —

计算异常改正项 λ 时, $1/\gamma$ 采用 10208×10^{-10} 。

从表2看出,这段水准路线的坡度是很大的,绝大部分大于表1中的最大坡度0.03。在这线段上每个水准点都实测了重力,因而每小段都可算得一个 λ 之值。下面假定其中有些水准点上未测重力,这样

能把两小段合为一段计算之，看其结果有多大的变化。

①将点66—1与点中41作为一段计算，异常改正项之值为
 -35.3 mm ，与表2的结果相差 0.5 mm ；

②将点63与点65—1作为一段计算，异常改正项之值为
 $+48.4 \text{ mm}$ ，与表2的结果相差 0.8 mm ；

③将点62与补2作为一段计算，异常改正项之值为
 $+19.0 \text{ mm}$ ，与表2的结果相差 0.3 mm ；

④将点补2与点66—1作为一段计算，异常改正项之值为
 $+5.8 \text{ mm}$ ，与表2的结果相差 0.4 mm 。

根据要求，所算得的异常改正项的中误差应小于 $\frac{\eta}{2}\sqrt{L}$ ，取 $\eta = 0.5 \text{ mm}$ ，上述差值全都在一倍中误差以内。这说明表2中的实测重力点减少一半，计算结果仍然是合乎要求的。对于平均坡度较小的地区，差值要小得多。这些实际数据说明了水准路线上重力点的密度完全不需要如别里宁所提出的那么大。这是由于别里宁的论述中存在着一一些不妥之外而引起的。

仔细地研究了(1)式导出的根据和过程，可以发现其中主要的不妥之外有两点，现分别说明于下。

一 异常改正项的原始公式为：

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \frac{B}{A} (g - \gamma) \Delta h \quad (2)$$

在实用时又将它变为：

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} (g - \gamma)_{mAB} \Delta h_{AB} \quad (3)$$

式中 Δh_{AB} 为A、B两水准点间的观测高差； $(g - \gamma)_{mAB}$ 应为A、

B 线段间空间异常 $(g-\gamma)$ 随高程的积分中数, 即

$$(g-\gamma)_{mAB} = \frac{1}{\Delta h_{AB}} \int_A^B (g-\gamma) dh \quad (4)$$

当按 (3) 式计算异常改正项时, 误差来源于 $(g-\gamma)_{mAB}$ 不能严格按照 (4) 式计算而产生的误差。别里宁取内插误差 δg 作为 $(g-\gamma)_{mAB}$ 的中误差, 这是不妥的。

因为在实际计算时, 总是令

$$(g-\gamma)_{mAB} = \frac{1}{2} [(g-\gamma)_A + (g-\gamma)_B] \quad (5)$$

如果在 A、B 点间, 空间异常确实是随高程成线性变化的话, 以 (5)

式取代 (4) 式求得的 $(g-\gamma)_{mAB}$ 是没有误差的。因为只要以

$g-\gamma = a + b h$ (其中 a 、 b 为任意常数, h 为点的高程) 代入 (4)

式, 即可求得 (5) 式。那末, 若 $(g-\gamma)_A$ 和 $(g-\gamma)_B$ 是根据实测重力值算得的, 由于 g 的观测误差很小而可以忽略, 因而以按

(5) 式求得的 $(g-\gamma)_{mAB}$ 代入 (3) 式所算得的异常改正项可认为是精确无误的。然而, 事实上空间异常不可能完全随高程线性变化, 因而以 (5) 式求得的 $(g-\gamma)_{mAB}$ 与 (4) 式的理论值有差别, 这种差别是由于空间异常随高程的非线性变化部分所引起的, 它决不能视为内插误差。

那末怎样来估算这项误差呢? 可以这样来讨论。

当按 (5) 式求取 $(g-\gamma)_{mAB}$ 时, 实质上就是认为在 A、B 线段上空间异常 $(g-\gamma)$ 随高程线性变化。其变化率 b' 为:

$$b' = \frac{(g-\gamma)_B - (g-\gamma)_A}{\Delta h_{AB}} \quad (6)$$

另一方面，虽然线段 A、B 间的空间异常不完全随高程线性变化，但我们可以假定一个变化率 b ，利用这个变化率 b 可以算得正确的 $(s-\gamma)_{m_{AB}}$ 。显然，这个 b 与按 (6) 式算得的 b' 是不相等的。正是由于这个差值 $\Delta b = b - b'$ 引起了按 (5) 式算出的值作为 $(s-\gamma)_{m_{AB}}$ 有误差。很容易求得， $(s-\gamma)_{m_{AB}}$ 的中误差 $m(s-\gamma)_{m_{AB}}$ 与 b' 的中误差 $m_{b'}$ 有如下的关系：

$$m(s-\gamma)_{m_{AB}} = \frac{\Delta b_{AB}}{2} m_{b'} \quad (7)$$

这样一来，由 (3) 式可以求得，按 (5) 式的 $(s-\gamma)_{m_{AB}}$ 算得的异常改正项 λ 的中误差 m_{λ} 为

$$m_{\lambda} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta b_{AB})^2}{2} m_{b'} \quad (8)$$

我们假定了一些数值，按 (8) 式算得如表 3 所示的结果。表 3 中所用的 $m_{b'}$ 值是否小了呢？可以用

表 3

Δb $m_{b'}$	300 ^m	200 ^m	100 ^m
± 0.004	$\pm 0.18^m$	$\pm 0.08^m$	$\pm 0.02^m$
± 0.006	± 0.27	± 0.12	± 0.03

表 2 中的数据来比较一下。由点 65—1 和点 68 按 (6) 式算得 $b' = 0.09974$ ；由点 65—1 和点 66—1 按 (6) 式算得 $b' = 0.1052$ ；由点 66—1 和点 68 按 (6)

式算得 $b' = 0.0959$ 。比较这三个 b' 值，在这两段水准路线中 b' 的最大变化为 0.01。实际上我们要的是一段间的变化，其数值可认为会缩小为 0.005。因而取按 (5) 式算得的 b' 的中误差 $m_{b'}$ 为 ± 0.004 或 ± 0.006 已是不小了。

按照对异常改正项 λ 的精度要求 m_λ 应小于 $\frac{\eta}{2}\sqrt{L}$, η 取 ± 0.5 mm, L 取 6 公里 (此时最大坡度为 $\frac{300}{6000} = 0.05$, 已是很大的了) 可以算得 m_λ 只须小于 ± 0.6 mm 就可以了。将表 3 的结果与之相比, 可以看出: 如果每个水准点上都实测了重力, 那末所算得的异常改正项误差是很小的, 精度大大高于所要求的。

那末少测一些重力点是否就满足不了要求精度呢? 下面就来讨论这种情况。可以假设两种情况来讨论之。

1. 每隔一个水准点测一个重力值。

如右图所示, 在 1 号和 3 号水准点上测了重力, 在 2 号点上未测, 要计算 λ_{12} 和 λ_{23} , 首先要内插出 2 号水准点的空间异常值。当然, 由此求得的空间异常值含有内插误差 δg 。以 $\frac{1}{2}[(g-\gamma)_1 + (g-\gamma)_3]$ 作为 $(g-\gamma)_{m_{12}}$ 忽略 $(g-\gamma)_1$ 的微小的观测误差, $(g-\gamma)_{m_{12}}$ 的中误差为 $\delta g / \sqrt{2}$ 。

2. 每隔两个水准点测一个重力值。

如右图所示, 在 1 号及 4 号水准点上测了重力, 在 2 号和 3 号点上未测。用内插求出的 $(g-\gamma)_2$ 和 $(g-\gamma)_3$ 含有内插误差 δg 因而 $(g-\gamma)_{m_{12}}$ 和 $(g-\gamma)_{m_{34}}$ 的中误差仍为 $\delta g / \sqrt{2}$, 而 $(g-\gamma)_{m_{23}}$ 的中误差则为 $\delta g / \sqrt{2}$ 。

归纳这两段分析, $(g-\gamma)_m$ 的中误差也不是别里宁所说的内插误差, 而是内插误差的 $1/\sqrt{2}$ 或 $1/\sqrt{2}$ 。

三 内插误差 δg 怎样估算呢? 别里宁认为内插误差与代表误差相等, 因而以代表误差的经验公式 $n\sqrt{S}$ 来估算内插误差, 这是第二个不妥之处。

大家知道，代表误差是以一个点的异常值代表它所在的那个面积内的平均异常值所产生的中误差，而这里所要的内插误差是根据线段两端点的异常值内插出线段中一点的异常值所具有的中误差，两者在概念上是不同的。另一方面，如果在线段上异常成线性变化，则内插出的任一点的异常值都将没有误差，也就是此时内插误差为零。这说明内插误差主要是由于异常的非线性变化引起的。但对于代表误差，即使异常成线性变化，它也不为零。因此，一般来说，代表误差大于内插误差，尤其是在山区的较小范围内更为明显。所以，用计算代表误差的经验公式来估算内插误差是不妥的。

下面以表2中的数据来看看内插误差的大小，由于在山区空间异常主要与高程有关，内插时按高程作线性内插为好，而不应用按平面位置内插。

先研究每隔一点测重力的情况：以点65—1及点68内插得 $(g-\gamma)_{66-1} = +93.4 \text{ mgL}$ ，与实测值相差 1.4 mgL ；以点65—1及点63内插得 $(g-\gamma)_{\text{补}2} = +78.9 \text{ mgL}$ ；与实测值相差 2.8 mgL 。以点补2及点62内插得 $(g-\gamma)_{63} = +48.9 \text{ mgL}$ ，与实测值相差 1.2 mgL ；以点66—1及点补2内插得 $(g-\gamma)_{65-1} = +133.1 \text{ mgL}$ ；与实测值相差 13.6 mgL 。综合这些结果看出这些结果看出，在处于水准路线坡度激烈变化处的水准点上测重力是非常重要的，表2中的点65—1就是这样的点，其两侧的水准点同时比它高或低很多，这会使内插值误差很大。除此以外，内插误差都是较小的，比代表误差 $\kappa\sqrt{S} = 3\sqrt{10} = 9.48 \text{ mgL}$ 小得多。由此看出，当满足在坡度激烈

变化处的水准点上测了重力的条件下，隔一点测一重力点，按异常随高程线性内插中间水准点的异常值，内插误差 δ_g 一般可认为在 $\pm 3 \text{ mgL}$ 以内。用它算得的异常改正项的误差为：

$$m_\lambda \leq \frac{1}{\gamma} \frac{3}{2} \Delta A = 0.45 \text{ mm} (\Delta A \text{ 取 } 300 \text{ m})$$

按一等水准路线要求应小于 $\frac{0.5}{2} \sqrt{L} = 0.6 \text{ mm}$ ，完全满足。下面以表 2 的数据为例作试算，结果是：以内插值 $(g-\gamma)_{66-1} = 93.4 \text{ mgL}$ 算得 $\lambda_{65-1-66-1} = 58.4 \text{ mm}$ 和 $\lambda_{66-1-68} = 28.2 \text{ mm}$ ，与表 2 的结果都差 0.2 mm ；以内插值 $(g-\gamma)_{补2} = +78.9 \text{ mgL}$ 算得 $\lambda_{63-补2} = +15.3 \text{ mm}$ 和 $\lambda_{补2-65-1} = +33.1 \text{ mm}$ ，与表 2 的结果相差为 0.3 mm 和 0.5 mm ，这些差值都小于 $\frac{\eta}{2} \sqrt{L}$ ，证明结论是对的。

再研究每隔两点测一重力点的情况：以点 62 及点 65-1 内插得 $(g-\gamma)_{63} = +47.8 \text{ mgL}$ 和 $(g-\gamma)_{补2} = +77.5 \text{ mgL}$ ，与实测值相差 2.3 mgL 和 4.2 mgL ；以点 65-1 及点中 41 内插得

$(g-\gamma)_{66-1} = +94.7 \text{ mgL}$ 和 $(g-\gamma)_{68} = +59.9 \text{ mgL}$ ，与实测值相差 2.7 mgL 和 3.2 mgL 。由此看出，当隔两点测定重力时，按异常随高程线性内插中间两点的空间异常，其内插误差一般可估为 $\pm 4 \text{ mgL}$ 左右，用它算得的异常改正项的误差为：

$$m_\lambda \leq \frac{1}{\gamma} \frac{4}{\sqrt{2}} \Delta A = \pm 0.65 \text{ mm} (\Delta A \text{ 取 } 300 \text{ m})$$

它不能满足一等水准的要求，但能满足二等水准的要求。以上面的数据为例，用内插得的 $(g-\gamma)_{63}$ 和 $(g-\gamma)_{补2}$ 之值算得 $\lambda_{63-补2} =$

+14.8mm, 与表2的结果相差0.8mm; 用内插得的 $(g-\gamma)_{66-1}$ 及 $(g-\gamma)_{66}$ 之值算得 $\lambda_{66-1-68} = -29.0\text{mm}$, 与表2的结果相差1.0mm. 这些数值说明了上面论述的正确性.

综合全文, 可以得到如下的结论. 为了推求水准点的正常高, 水准路线上重力点的密度不需要别里宁所说的那么密, 而可以大为减少. 在一等水准路线上, 即使是在大山区, 只要每隔一个水准点测一个重力值就可满足要求; 在二等水准路线上, 则可每隔两个水准点测一个重力值; 当在水准点间高差较小的地区, 重力点数还可适当减少. 但实施时要注意, 在处于坡度激烈变化处的水准点上一定要测重力. 此外, 在计算时, 内插未测重力的水准点的空间异常必须按空间异常随高程线性变化进行之, 而不能按平面位置内插. 若在坡度激烈变化处的水准点上未测重力, 则算出的该点的正常高值精度稍低, 应在成果表中予以说明.

参 考 文 献

(1) 大地重力学 中国人民解放军测绘学院
1963年10月

(2) 国家水准测量规范 国家测绘总局
1976年