控制论基础数学

下　册

（苏）B.A.依万诺夫等著
叶　冬　陵　　译
赵学之　张启人　校

长沙市公共交通系统工程优化总指挥部印

一九八三年

目　　录

第四部分

谱分析及其在自动控制理论中的应用。

第十一章

福利叶级数和福利叶积分。

§34 福利叶级数

1．调和分析

自动控制理论中经常遇到一些周期性过程。

如果存在某个常数 $T>0$，使得函数 $f(x)$ 满足等式。

$$f(t)=f(t+nT) \qquad (1)$$

则 $f(x)$ 称为周期函数，T叫做函数的周期，n是任意正整数（正的或负的），自变量t在函数定义的区域取值。

周期函数 $f(x)$ 具有下述性质：若在长度为T的区间内对函数求积分，如果改变积分限而区间长度保持不变，则积分值不变，即

$$\int_a^{a+T} f(t)dt=\int_b^{b+T} f(t)dt \qquad (2)$$

这里 $a.b$ 为任意值。

事实上，设 $0<a<T$，$0\leq b<T$，有

$$\int_a^{a+T} f(t)dt=\int_a^{T} f(t)dt+\int_T^{a+T} f(t)dt$$

令 $t=\tau+T$，右边第二项积分为

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(\tau+T)d\tau = \int_0^a f(\tau)d\tau = \int_0^a f(t)dt,$$

代入上式得

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

同理可得

$$\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

比较上面两个等式可知，式（2）正确。

最简单的周期函数是余弦（或正弦）谐振动 $f(t)=\cos(\omega t-\varphi)$（图89 a），这个函数称为振幅为A，角频率为 ω，初相为 φ 的谐波。不难看出，谐波的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，事实上

$$A\cos\left[\omega\left(t+n\frac{2\pi}{\omega}\right)-\varphi\right]=A\cos\left[(\omega t-\varphi)+2n\pi\right]=A\cos(\omega t-\varphi).$$

即满足等式（1）。

角频率分别是 ω、2ω、3ω 的谐波 $f_1=A_1\cos(\omega t-\varphi)$，$f_2=A_2\cos(2\omega t-\varphi_2)$、$f_3=A_3\cos(3\omega t-\varphi_3)$ 迭加也是一个周期函数，其周期等于频率为 ω 的一次谐波的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，这个函数不同于谐波 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$。

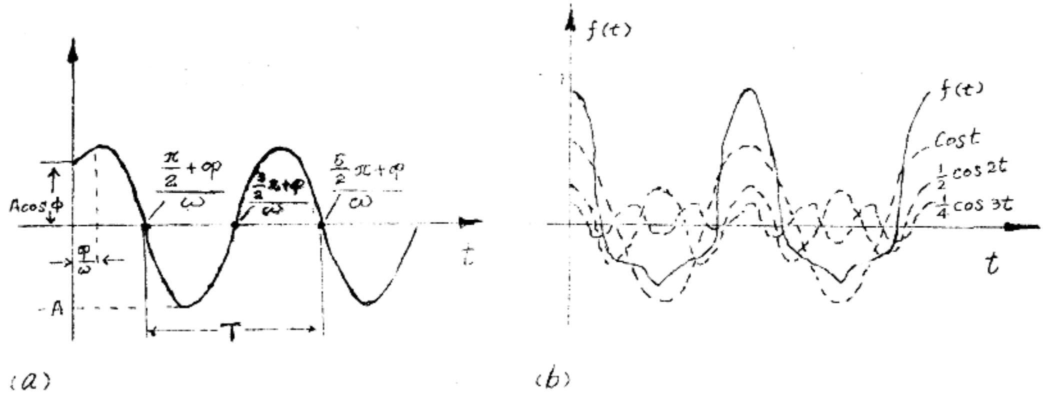


图 89

图 89b 是函数 $f(t)=\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 3t$ 的图形，其中每一项都是余弦振动，但 $f(t)$ 的图形不是余弦的。同样地，无限个谐波之和 $f(t)=\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos(K\omega t-\varphi_K)$（任意两个相邻谐波的频率相差 ω）也是周期函数，其周期等于一次谐波的周期，但它的图形与正弦曲线差异更大了。

下面我们用 $\Delta\omega$ 表示 K 次谐波到相邻的 K+1 次谐波的频率增量。这时，一次谐波的频率也将是 $\Delta\omega$，即 $\Delta\omega=\frac{2\pi}{T}$，T 为函数 $f(t)$ 的周期。

这样一来，无穷级数之和记作

$$f(t)=\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos(K\Delta\omega t-\varphi_K) \qquad (3)$$

它的一般项 $A_K\cos(K\Delta\omega t-\varphi_K)$ 叫做 K 次谐波，其角频率为 $K\Delta\omega$ 是一次谐波的频率的整数倍。

由上面看到由谐波组成的级数是周期函数，必然引出了下述相反的问题：

是否能 将周期函数化为谐波分量之和的形式？或者说化为三角级开式？如果函数 $f(t)$ 能展开为谐波之和，又怎样求这些谐波的未知参数。下面我们将证明大部分的周期函数都能展开为谐

波分量之和。

如果存在所谓零次谐波，则周期为T的函数 $f(t)$ 能够写为

$$f(t)=A_0+A_1\cos(\Delta\omega t-\varphi_1)+A_2\cos(2\Delta\omega t-\varphi_2)+\cdots$$
$$=A_0+\sum_{K=1}^{\infty}A_K\cos(K\Delta\omega t-\varphi_K) \quad (4)$$

考虑到

$$A_K\cos(K\Delta\omega t-\varphi_K)=A_K\cos K\Delta\omega t\cos\varphi_K+A_K\sin K\Delta\omega t\sin\varphi_K,$$

令

$$A_K\cos\varphi_K=a_K, \quad A_K\sin\varphi_K=b_K. \quad A_0=\frac{a_0}{2}$$

则

$$A_K\cos(K\Delta\omega t-\varphi_K)=a_K\cos K\Delta\omega t+b_K\sin K\Delta\omega t \quad (5)$$

函数（4）能写成更简便的形式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos K\Delta\omega t+b_K\sin K\Delta\omega t) \quad (6)$$

若函数 $f(t)$ 的周期 $T=2\pi$，则 $\Delta\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=$ $=1$，则式（6）成为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos Kt+b_K\sin Kt) \quad (7)$$

设 $f(t)$ 是周期为 2π 的函数，且展开式（7）存在，我们就能确定未知的常系数 a_0、a_K、b_K（$K=1, 2, \cdots$）。

首先考虑函数簇

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cdots, \cos nt, \sin nt \cdots \quad (8)$$

的性质：函数簇（8）中任意两个函数的乘积在长度为 2π 的区间的积分等于零、与积分下限无关，也就是说函数簇在长为 2π 的区间内是正交的。

事实上（设 C 为任意实数）

$$\int_C^{C+2\pi}\cos Kt\,dt=\frac{\sin Kt}{K}\Big|_C^{C+2\pi}=0,$$

因为 $\sin(KC+2K\pi)=\sin KC$；

$$\int_{C}^{C+2\pi}\sin Kt=-\frac{\cos Kt}{K}\Bigg|_{C}^{C+2\pi}=0\,;$$

$$\int_{C}^{C+2\pi}\cos Kt\cos lt\,dt=\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\cos(K-l)t\,dt+\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\cos(K+l)t\,dt=0\,;$$

$$(K\neq l)$$

$$\int_{C}^{C+2\pi}\sin Kt\sin lt\,dt=\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\cos(K-l)t\,dt-\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\sin(K+l)t\,dt=0\,;$$

$$(K\neq l)$$

$$\int_{C}^{C+2\pi}\sin Kt\cos lt\,dt=\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\sin(K-l)t\,dt+\frac{1}{2}\int_{C}^{C+2\pi}\sin(K+l)t\,dt=0\,.$$

下面来求系数 a_0 。假定级数（7）是均匀收敛的，对这个级数(7)是均匀收敛的，对这个级数由 $-\pi$ 到 π 逐项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\int_{\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos Kt+b_K\sin Kt)\,dt\,.$$

由于级数均匀收敛，上式右边第二项等于各项积分的和，这时得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\pi a_0+\sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kdt+b_K\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\,dt\right)=\pi a_0\,,$$ 由

于函数簇（8）的正交性，故和号下的所有积分皆为零，于是得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

再来确定系数 a_K 和 b_K。为此等式（7）两边同乘以 $\cos nt$，这里 n 为正整数，然后再由 $-\pi$ 到 π 逐项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nt\,dt +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos Kt\cos nt + b_K\sin Kt\cos nt)\,dt$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt + \sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kt\cos nt + b_K\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\cos nt\,dt\right)$$

根据函数簇（8）的正交性，上式右边的第一个积以及和号下第一个积分中除 $K=n$ 一项外其余各项均为零。于是得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nt\,dt = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nt}{2}\,dt = \pi a_n$$

因此

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos Kt\,dt \quad (K=1,2,\cdots) \qquad (10)$$

同样地，式（7）两边同乘以 $\sin nt$，积分后得到

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin Kt\,dt \quad (K=1,2,\cdots) \qquad (11)$$

公式（9）——（11）能够计算出周期为2π的已知函数$f(t)$的三角展开式的系数，这些系数叫做福利叶系数，级数（7）叫做福利叶级数。

如果函数$f(t)$是区间$(-\pi, \pi)$上的偶函数，则乘积$f(t)\cos Kt$也是偶函数，$f(t)\sin Kt$是奇函数，这时$b_K=0$（$K=1, 2, 3, \cdots$）系数a_0和a_K是

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt, \tag{12}$$

$$a_K=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos Kt\,dt \qquad (K=1, 2, \cdots) \tag{13}$$

如果$f(t)$是区间$(-\pi, \pi)$上的奇函数，则乘积$f(t)\sin kt$，是偶函数，$f(t)\cos Kt$是奇函数，显然，有$a_0=0$，$a_K=0$（$K=1, 2, \cdots$），而b_K决定于式

$$b_K=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \qquad (K=1, 2, \cdots) \tag{14}$$

公式（9）——（11）中积分区间是$(-\pi, \pi)$，其实，应取一个长度为2π的区间，这些值不改变。

已知系数a_K和b_K，很容易确定谐波的振幅和初相：

$$A_K=\sqrt{a_K^2+b_K^2}, \quad \varphi_K=\operatorname{arctg}\frac{b_K}{a_K} \tag{15}$$

例1 把函数

$$f(t)=\begin{cases} a, & 0\le t\le\pi, \\ -a, & \pi< t<2\pi. \end{cases}$$

定义的矩形波（图 90）展开为谐波分量之和。

假定函数可展开为福利叶级数，求展开式的系数 a_0、a_K、b_K。由于 $f(t)$ 是奇函数，则有

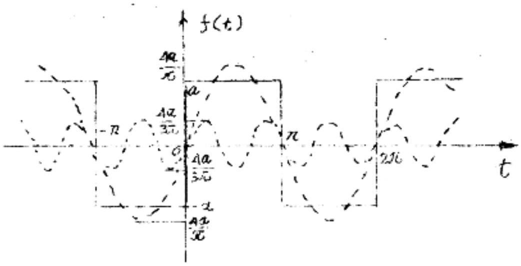


图 90

$a_0=0$，$a_K=0$（$K=1,2,\cdots$）。由公式（14）决定系数 b_K：

$$b_K=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a\sin Kt\,dt=\frac{2a}{\pi K}\Big[-\cos Kt\Big]_0^{\pi}=\frac{2a}{\pi K}\Big[-\cos K\pi+1\Big]=$$

$$=\frac{2a}{\pi K}\Big[1-(-1)^K\Big]=\begin{cases}0, & K\text{ 为偶数时，}\\ \dfrac{4a}{\pi K}, & K\text{ 为奇数时。}\end{cases}$$

因此，由式（7）矩形波的福利叶级数为

$$f(t)=\frac{4a}{\pi}\Big[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots\Big].$$

一次谐波的振幅 $A_1=\dfrac{4a}{\pi}$，角频率 $\Delta\omega=1$ 1/秒；
二次谐波的振幅为零；
三次谐波的振幅 $A_3=\dfrac{4a}{3\pi}$，角频率 $3\Delta\omega=3$ 1/秒，等等，而且所有谐波的初相都相同：

$$\varphi_K=\frac{\pi}{2}。$$

设函数 $f(t)$ 定义于区间（$-\pi$，π），且可以展开为福利叶级数，这就表明，系数为 a_0、a_K、b_K 的级数（6）收敛于函数 $f(t)$。这种情况下，函数 $f(t)$ 可以是非周期的，这时函数在区间（$-\pi$、π）上的福利叶级数，可以周期性的延拓到区间［$-\pi$，π］之外（图 91），延拓后得到的函数 $f(t)$ 是周期为 2π 的周期函数，而在区间（$-\pi$，π）上和原函数 $f(t)$ 相合。它的谐波分量在区间（$-\pi$、π）内求和就得到原函数 $f(t)$。

从上面看出，不仅周期函数藉助于福利叶级数表为谐波分量之和，就是定义在区间（$-\pi$，π）上的非周期函数的福利叶级数也与延拓到整个 Ot 轴上的周期函数的福利叶级数相同，因此我们在研究福利叶级数的收敛性时，可以只研究周期函数的福利叶级数的收敛性。

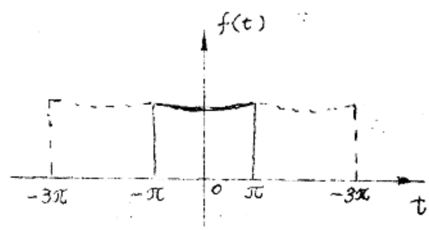
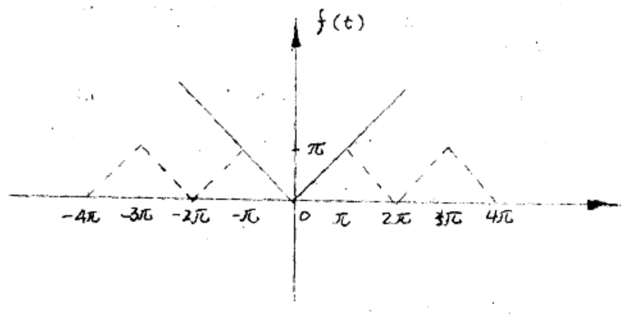


图 91

例 2，在区间（$-\pi$，π）内把函数 $f(t)=|t|$ 展开为福利叶级数（图 92）。

虽然 $f(t)$ 是非周期函数，不能在整个 Ot 轴上展开为福利叶级数，为此必须先把 $f(t)$ 延拓到区间（$-\pi$，π）之外成为周期为 2π 的周期函数（图 92 上虚线所示）。这一周期函数的福利叶级数在区间（$-\pi$，π）上求和等于给定的函数。



$f(t)=|t|$ 是偶函数，故有 $b_K=0$，由式（12）和（13）计算系数 a_0 和 a_K：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt=\pi\ .$$

$$a_K=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos Kt\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{K}\sin Kt\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{K}\int_0^{\pi}\sin Kt\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{K^2}\cos K\pi-\frac{1}{K^2}\right]=\frac{2}{\pi K^2}\left[(-1)^K-1\right]=\begin{cases}0, & K\text{为偶数。}\\ -\frac{4}{\pi K^2}, & K\text{为奇数。}\end{cases}$$

因此，在区间（$-\pi$，π）内的展开式为

$$|t|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots\right)$$

$$(-\pi<t<\pi)$$

而在区间（$-\pi$，π）外级数之和不是函数 $f(t)$。

此外、公式（12）　　（14）中积分是由 0 到 π 进行的，因此在计算系数 a_0、a_K、b_K 时没有必要作出延拓后的周期函数的图象。

在许多技术问题中需要把周期函数展成谐波分量之和，但是，一般来说只需要前面几个谐波，其余的都可略去．这种情形下用谐波分量得到的函数表示式与原函数的差异取决于所取谐波的项数。借助于下述三角多项式近似地表示函 $f(t)$：

$$S(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K\cos Kt+\beta_K\sin Kt)$$

误差大小依赖于计算系数 α_0、α_K、β_K 的方法。对周期为 2π 的函数 $f(t)$ 要估计误差的大小最方便的是均方差 δ_n，

它由下式决定：

$$S_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(t)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K\cos Kt+\beta_K\sin Kt)\right\}^2dt \qquad (16)$$

下面我们来研究在什么条件下 δ_n 有最小值。

定理1 用 n 级三角多项式近似地表示函数 f(t) 时，如果多项式的系数是 f(t) 的福利叶系数，则均方差最小。

证明： 式（16）中积分号下的花括弧展开并逐项积分得

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f^2(t)-2f(t)\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K\cos Kt+\beta_K\sin Kt)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K\cos Kt+\beta_K\sin Kt)\right]^2\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{n}\alpha_K\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos Kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{n}\beta_K\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin Kt\,dt+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dt+\frac{1}{2\pi}\sum_{K=1}^{n}\alpha_K^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2Kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{K=1}^{n}\beta_K^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2Kt\,dt+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{K=1}^{n}\alpha_K\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{K=1}^{n}\beta_K\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\,dt+\frac{1}{\pi}\underset{(K\neq l)}{\sum_{K=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}}\alpha_K\alpha_l\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kt\cos lt\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_K\beta_l\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kt\sin lt\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{K=1\\(K\neq l)}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\beta_K\beta_l\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\sin lt\,dt\ .$$

分别考究等式右边各项：由式(9)——(11)得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=a_0\ ,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos Kt\,dt=a_K\ ,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin Kt\,dt=b_K$$

就是说，得到的表示式是函数 $f(t)$ 的福利叶系数；又

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 Kt\,dt=\pi\ ,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 Kt\,dt=\pi\ ;$$

考虑到函数簇(8)在区间$(-\pi,\pi)$上的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\cos lt\,dt=0\ ,$$

当 $K\neq l$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos Kt\cos lt\,dt=0\ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin Kt\sin lt\,dt=0\ ;$$

因此，均方差 δ_n 的平方是

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K a_K+\beta_K b_K)+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}(\alpha_K^2+\beta_K^2).$$

在上式右边加上和减去和 $\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)$：

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)+\frac{1}{4}(\alpha_0-a_0)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\left[(\alpha_K-a_K)^2+(\beta_K-b_K)^2\right]$$

上式右边与量 α_K 和 β_K 有关的只有三个非负项，因此要使 δ_K^2 为最小，必须这些项为零，也就是，$\alpha_K=a_K$，$\beta_K=b_K$。

由定理还可以得到贝塞尔不等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt\geq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K^2+b_K^2) \qquad (17)$$

均方差的最小值的平方是

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{n}f^2(t)dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)$$

由于 $\delta_n^2\geq 0$，对任何值 n 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt\geq\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)$$

在上述讨论中我们假定函数 $f(t)$ 的积分存在（这样才可以使用公式（9）——（11）计算福利叶系数），这函数的平方的积分也存在。在满足这些条件时上式左边是一个确定的正数，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，上式右边的无穷级数是收敛的，由此贝塞尔不等式得证。

A．M．李亚普诺夫指出所有平方可积函数在 $n\longrightarrow\infty$ 时，均方差 $\delta_n\longrightarrow 0$，不等式（17）成为等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}(a_K^2 + b_K^2) \qquad (18)$$

称之为李亚谱诺夫等式。

福利叶系数具有下述性质：

定理 2　所有在区间（$-\pi$，π）连续或逐段连续的函数 $f(t)$ 的福利叶系数 a_n、b_n 在 $n \to \infty$ 时趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0。$$

证明：根据定理的条件，函数 $f(t)$ 在区间（$-\pi$，π）连续或逐段连续，因此这一函数的平方是可积的，即积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$ 存在、不等式（17）右边的无穷级数收敛，它的一般项（$a_K^2 + b_K^2$）趋于零，这仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 时才可能。

所谓逐段连续，是指函数在这一区间内只有有限个第一类间断点。

2、福利叶级数的收敛性

下面我们来研究什么样的函数能够展开为福利叶级数，也就是说，要使福利叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}(a_K \cos K\Delta\omega t + b_K \sin K\Delta\omega t)$$

收敛于 $f(t)$，这个函数需要加以一些怎样的限制性条件。

要解决福利叶级数的收敛性问题，首先需要给出级数部分和的积分公式。设 $f(t)$ 是周期为 2π 的周期函数，它的福利叶级数的第 n 个部分和为

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{n}(a_K \cos Kt + b_K \sin Kt)，$$

其中

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos K\tau\,d\tau, \quad b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin K\tau\,d\tau .$$

把 a_K 和 b_K 代入 S_n 的表示式*)：