

振动分析基础

[美] L. 米罗维奇著
上海交通大学理论力学教研室译



1983

36

目 录

下 册

第七章 连续系统。近似法	1
7.1 概述	1
7.2 瑞利能量法	1
7.3 瑞利 - 里兹法	6
7.4 假定振型法	20
7.5 对称和反对称振型	23
7.6 用假定振型法求系统的响应	27
7.7 用于扭振的霍尔茨法	31
7.8 应用影响系数的集总参数法	37
习题	42
第八章 有限元法	45
8.1 概述	45
8.2 单元的运动方程	45
8.3 参考系	57
8.4 全系统运动方程	64
8.5 特征值问题	82
8.6 系统的响应	91
习题	98
第九章 非线性系统。几何理论	101
9.1 引言	101
9.2 稳定性的基本概念	102

9.3	单自由度自治系统。相平面图	112
9.4	劳斯—霍尔维茨判据	123
9.5	保守系统。大范围运动	125
9.6	极限环	128
9.7	李亚普诺夫直接法	131
	习题	139
第十章 非线性系统。摄动法		142
10.1	概论	142
10.2	基本的摄动方法	143
10.3	长期项	147
10.4	林滋泰德法	150
10.5	克雷洛夫—包戈留波夫—米屈劳包尔斯基 (<i>KBM</i>)法	157
10.6	准谐波系统的强迫振动、跳跃现象	163
10.7	次谐波与组合谐波	172
10.8	具有时间依赖系数的系统、马丢方程	177
	习题	184
第十一章 随机振动		186
11.1	概论	186
11.2	总体平均。平稳随机过程	187
11.3	时间平均。各态历经随机过程	190
11.4	均方值	194
11.5	概率密度函数	195
11.6	用概率密度函数描述随机数据	204
11.7	自相关函数的性质	207
11.8	功率谱密度函数	208

11.9	窄带和宽带随机过程	211
11.10	线性系统对平稳随机激励的响应	218
11.11	单自由度系统对随机激励的响应	225
11.12	两个随机变量的联合概率分布	231
11.13	平稳随机过程的联合性质	236
11.14	各态历经随机过程的联合性质	240
11.15	线性系统的响应互相关函数	243
11.16	多自由度系统对随机激励的响应	247
11.17	连续系统对随机激励的响应	259
	习题	264
附录 A 傅立叶级数		269
A.1	引言	269
A.2	正交函数组	269
A.3	三角级数	272
A.4	傅立叶级数的复数形式	276
附录 B 拉普拉斯变换基础		278
B.1	一般定义	278
B.2	导数的变换	279
B.3	常微分方程的变换	279
B.4	拉普拉斯逆变换	280
B.5	卷积积分。波莱尔定理	284
B.6	拉普拉斯变换对表	286
附录 C 线性代数基础		288
C.1	概述	288
C.2	矩阵	288

C.3 向量空间	300
C.4 线性变换	303
文献目录	309
索引	311
汉英对照	350

第七章 连续系统。近似法

7.1 概述

本章对于从事实际工作的工程师特别重要，因为它提供了多种方法来处理精确解不存在或求解不可行的特征值问题。必须指出，由于不均匀的质量或刚度分布使很多连续系统的特征值问题不能有封闭解。因此，通常人们致力于寻找特征值问题的近似解。从这点来看，可能有人会认为第五章中对于均匀分布系统的精确解的讨论是多余的。但作此结论未免过早，因为这些解（指第五章的精确解）是非常有助于得到非均匀分布系统的近似解的。

这里所考虑的近似方法，是对连续系统离散化的方案，就是说用一个相当的离散系统来代替一个连续系统。离散化方法可分成两大类：第一类方法是把解用依赖于空间的函数乘以依赖于时间的广义坐标组成的有限级数来表示；第二类方法是把质量集总到本来是连续系统的各离散点上。第一种方法中依赖于空间的函数不满足微分方程，但根据所列公式的形式必须满足全部或部分边界条件。由于所讨论的函数经常可以选用对应均匀系统的特征函数，因而第五章中的精确解在这里证明是有用的。当系统的不均匀性很明显时，或是当系统在边界以外的点上具有集中质量时建议用集总法。本章讨论了两种类型的几种近似法。

7.2 瑞利能量法

瑞利法是一个不需要解有关的特征值问题而能估算出系统基本频率的方法。此法基于瑞利原理，可叙述如下：保守系统在其平衡位置附近振动的估计频率，在其固有振型附近有平稳

值。此平稳值是在基本振型附近的最小值，这在 4.13 和 5.8 节中已用瑞利商分别对离散系统和连续系统证明过了。因此，我们可以预料到瑞利法可适用于两种类型的数学模型。显然，瑞利原理只不过是 4.13 和 5.18 节中用瑞利商导出的结果的一个说明而已。

为了再一次强调离散系统与连续系统之间的相似性，我们从离散系统来着手讨论瑞利能量法，然后再将其结果推广到连续系统。

在第四章和第五章中，我们已证明固有振型作谐运动。因此，考察如图 5.11 所示那种具有 n 个自由度的保守系统，并以 $q_i(t)$ 作为质量 m_i 相对于惯性空间的广义座标，我们可写出

$$q_i(t) = u_i f(t) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7.1)$$

式中 u_i 为一常振幅， $f(t)$ 为一时间的谐函数。式 (7.1) 可写成简洁的矩阵形式

$$\{q(t)\} = f(t)\{u\} \quad (7.2)$$

因为 $\{u\}$ 是常数，于是有

$$\{\dot{q}(t)\} = \dot{f}(t)\{u\} \quad (7.3)$$

将式 (7.3) 代入 (4.116) (以 $\{\dot{q}\}$ 代替 $\{\dot{u}\}$)，我们得到动能

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \{\dot{q}(t)\}^T [m] \{\dot{q}(t)\} \\ &= \frac{1}{2} \dot{f}^2(t) \{u\}^T [m] \{u\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

注意，矢量 $\{q(t)\}$ 在这里起到 4.11 节中，依赖于时间的矢量 $\{u\}$ 的作用，而矢量 $\{u\}$ 在本节中却是常数。类似地，以式 (7.2) 代入 (4.113) (以 $\{q\}$ 代替 $\{u\}$)，我们得到势能

$$V(t) = \frac{1}{2} \{q(t)\}^T [k] \{q(t)\}$$

$$= \frac{1}{2} f^2(t) \{u\}^T [k] \{u\} \quad (7.5)$$

以 $f(t) = \cos(\omega t - \phi)$ 表示时间的谐函数，于是有

$$\dot{f}(t) = -\omega \sin(\omega t - \phi),$$

因而式 (7.4) 和 (7.5) 可分别写成

$$T(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T [m] \{u\} \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) \quad (7.6)$$

和

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \cos^2(\omega t - \phi) \quad (7.7)$$

从式 (7.6) 和 (7.7) 我们得出：当 $\cos(\omega t - \phi) = 0$ 时，势能等于零，意即系统经过平衡位置。与此同时 $\sin(\omega t - \phi) = \pm 1$ ，所以当 $\cos(\omega t - \phi) = 0$ 时，动能达到它的最大值。类似地，当 $\cos(\omega t - \phi) = \pm 1$ 时， $\sin(\omega t - \phi) = 0$ ，此时势能达到最大值而动能等于零。但是，对于保守系统其总能量是常数，因而有

$$E = T_{\max} + 0 = 0 + V_{\max} \quad (7.8)$$

或

$$T_{\max} = V_{\max} \quad (7.9)$$

引进符号

$$T^* = \frac{1}{2} \{u\}^T [m] \{u\} \quad (7.10)$$

T^* 这里称为参考动能，我们有

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \{u\}^T [m] \{u\} \omega^2 = T^* \omega^2 \quad (7.11)$$

另外

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (7.12)$$

将式(7.11)和(7.12)代入式(7.9)我们得

$$\omega^2 = R(u) = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} \quad (7.13)$$

比较式(7.13)与(4.142), 我们断定式(7.13)相当于瑞利商。虽然我们是在考虑能量的基础上导出式(7.13)的, 但是4.13节所得到的结论依然正确, 即可以用瑞利商来得到最低特征值 ω_1^2 的估计量(这里 ω_1 是系统基本频率)。因为瑞利商在第一振型附近有一最小值, 为了得到 ω_1^2 的估计量, 我们必须选择一尽可能近似于系统第一特征函数 $\{u^{(1)}\}$ 的试算矢量 $\{u\}$ 并代入式(7.13)。 ω_1^2 的估计量与精确值之间的接近程度取决于试算矢量 $\{u\}$ 与 $\{u^{(1)}\}$ 之间的接近程度, 而这又取决于分析者的技巧和经验。

的确, 瑞利法对于连续系统较之对于离散系统更为有用, 由于大量的诸如那些含有非均匀质量或刚度分布的连续系统, 求其特征值问题的封闭解一般是不可能的。我们注意到当式(7.13)以最大势能和参考动能来表达时, 此公式对于连续系统同样成立。当然, 与离散系统对照, 对于连续系统不再能写出动能与势能(特别是后者)的一般表达式, 但对于所考虑的具体系统, 则必须写出特有的表达式。例如: 考虑非均匀圆截面轴的扭振。以 $\theta(x, t)$ 表示轴的角位移, 利用在5.2节中指出的相似性, 结合5.11节的(5.144)式, 可以证明在点 (x) 处扭矩表达式为

$$M(x, t) = GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (7.14)$$

此外, 对应于轴的长度为 dx 的微分单元的扭角为 $[\partial \theta(x, t) / \partial x] dx$ 。考虑一扭角与扭矩成正比的线性系统, 对于长为 L , 两端未用扭转弹簧(能储存势能)支承的轴, 其势能写成

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L GJ(x) \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (7.15)$$

这与杆作纵向振动时的势能式 (5.142) 具有相同的结构。另一方面, 若 $I(x)$ 是轴单位长度的极转动惯量, 则动能简单地

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L I(x) \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (7.16)$$

注意它与式 (5.138) 的相似性。仍考察一保守系统, 并假设其角位移 $\theta(x, t)$ 对空间变量与时间变量是可分离的,

$$\theta(x, t) = \Theta(x)F(t) \quad (7.17)$$

这里 $F(t)$ 是谐波的, $F(t) = \cos(\omega t - \phi)$, 我们得瑞利商

$$\begin{aligned} \omega^2 = R(\Theta) &= \frac{V_{\max}}{T^*} \\ &= \frac{\int_0^L GJ(x) [d\Theta(x)/dx]^2 dx}{\int_0^L I(x) \Theta^2(x) dx} \quad (7.18) \end{aligned}$$

我们看到式 (7.18) 与 5.8 节中式 (5.92) 所导出的瑞利商不一样, 然而这种差异只是形式上的, 因为式 (7.18) 可自 (5.92) 考虑达界条件 (5.91) 通过分部积分得到。这样看来, 对任一满足系统的边界条件和对基本振型具有合理近似程度的试算函数 $\Theta(x)$, 都可由式 (7.18) 得到第一特征值 ω_1^2 的估计量。

考察在 5.8 节中所研究的 $x=0$ 处固定, $x=l$ 处自由的锥形轴, 此处

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{6}{5} I \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right], \\ GJ(x) &= \frac{6}{5} GJ \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (7.19) \end{aligned}$$

并假定试算函数 $\Theta(x) = \sin \pi x / 2L$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{\pi^2 GJ \int_0^L \left[1 - \frac{1}{2} (x/L)^2\right] \cos^2(\pi x/2L) dx}{4IL^2 \int_0^L \left[1 - \frac{1}{2} (x/L)^2\right] \sin^2(\pi x/2L) dx} \\
&= \frac{\pi^2 GJ (L/12\pi^2)(5\pi^2 + 6)}{4IL^2 (L/12\pi^2)(5\pi^2 - 6)} \\
&= 3.150445 \frac{GJ}{IL^2} \quad (7.20)
\end{aligned}$$

如所予期，其结果与 5.8 节中由式 (5.103) 所给出的完全相同。

瑞利法可用于求得系统基本频率的粗糙近似值。必须注意，由瑞利法求得的估计值高于真实的基本频率。要得到比较正确的估算值，宜用更精细的方法，诸如在 7.3 节中所讨论的瑞利-里兹法。瑞利-里兹法的基本思想是降低估计量，从而使它从上面来接近真实的固有频率。

7.3 瑞利-里兹法

对于连续系统，特征值问题的解是不容易得到的。希望快速（但不十分精确）地估计一连续系统的基本频率时一般用瑞利能量法。它基于这一事实：如瑞利商所证明的那样，固有频率在固有振型附近有平稳值。另外，瑞利商对第一特征值 λ_1 ，提供了一上限（见 5.8 节）

$$R(u) \geq \lambda_1$$

这里 λ_1 与基本频率 ω_1 有关，而 u 是一满足问题的所有边界条件但不满足微分方程的函数（否则 u 即为特征函数）。希望函数 u 尽可能地近似于第一固有振型。事实上，函数 u 愈近似于第一振型，估计量就愈接近于第一特征值。瑞利-里兹法仅仅是用来降低 λ_1 估计量的一种方法，它引入一个试算函数 u 使其合理地接近于第一固有振型。但是，此法不仅与第一

特征值有关，它还提供了有限个数的较高特征值。

我们回顾一下，在 5.8 节中瑞利商的表达式取决于所考虑的系统。此外，瑞利商中所用的试算函数必须满足问题的各种边界条件。在继续讨论瑞利-里兹法之前，导出一个适用于大量连续系统（包括本书中所讨论的各种系统）的瑞利商表达式将是有益的。此外，用此一般表达式时，试算函数所需满足的边界条件数目可以得到某些放宽。利用与离散系统的相似性，在 7.2 节中我们用最大势能与参考动能写出了瑞利商的一般表达式，在本节中我们从一个任意连续系统开始得到同样的一般表达式。

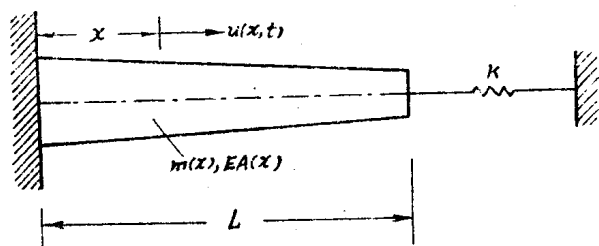


图 7.1

让我们考察细杆的纵向振动， $x=0$ 一端固定， $x=L$ 一端与刚度为 k 的弹簧相连（见图 7.1），其特征值问题由微分方程

$$-\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = \omega^2 m(x) u(x) \quad 0 < x < L \quad (7.22)$$

和边界条件为

$$u(0) = 0, \quad EA(x) \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -ku(L) \quad (7.23)$$

所确定。利用与轴的扭转的相似性，我们从式 5.92 可断定瑞利商有表达式：

$$\lambda = \omega^2 = R(u) = \frac{-\int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \{EA(x) [du(x)/dx]\} dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx} \quad (7.24)$$

对式 (7.24) 的分子进行分部积分并考虑边界条件 (7.23)，得

$$\begin{aligned} & -\int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \{EA(x) [du(x)/dx]\} dx \\ &= -u(x) EA(x) \frac{du(x)}{dx} \Big|_0^L \\ & \quad + \int_0^L EA(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 dx \\ &= ku^2(L) + \int_0^L EA(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 dx \quad (7.25) \end{aligned}$$

从 7.2 节的讨论看来，式 (7.25) 的右边为最大势能的两倍：

$$\begin{aligned} & -\int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right] dx \\ &= ku^2(L) + \int_0^L EA(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 dx \\ &= 2V_{\max} \quad (7.26) \end{aligned}$$

另一方面，式 (7.24) 的分母是系统参考动能的两倍：

$$\int_0^L m(x) u^2(x) dx = 2T^* \quad (7.27)$$

因此，将式 (7.26) 和 (7.27) 代入式 (7.24)，我们得到瑞利商的一般表达式

$$\lambda = \omega^2 = R(u) = \frac{V_{\max}}{T^*} \quad (7.28)$$

这和用于离散系统的式 (7.13) 完全类似。

倘若在 V_{\max} 和 T^* 中能考虑边界条件，则式 (7.28) 对于

任何连续系统和任何形式的边界条件都成立。作为另一个在式(7.28)中考虑边界条件的实例, 让我们考察在 $x=L$ 端用刚性质量 M 来代替弹簧 k 的情况(见图 7.2)。不过微分方程仍保持(7.22)的形式, 在此情况下边界条件可表示成

$$u(0)=0, \\ EA(x) \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = \omega^2 M u(L) \quad (7.29)$$

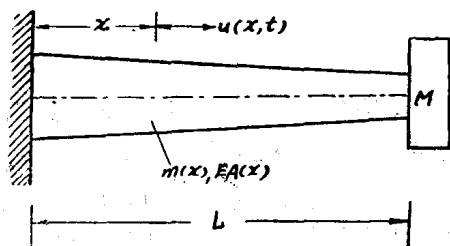


图 7.2

再次对式(7.24)的分子进行分部积分并考虑边界条件(7.29)可得

$$\begin{aligned} & - \int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right] dx \\ &= -u(x) EA(x) \frac{du(x)}{dx} \Big|_0^L \\ & \quad + \int_0^L EA(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 dx \\ &= -\omega^2 M u(L) + \int_0^L EA(x) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]^2 dx \quad (7.30) \end{aligned}$$

将式(7.30)代入(7.24)则有

$$\omega^2 = \frac{- \int_0^L u(x) (d/dx) \{ EA(x) [du(x)/dx] \} dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx}$$

$$= \frac{-\omega^2 M u^2(L) + \int_0^L E A(x) [du(x)/dx]^2 dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx} \quad (7.31)$$

这里我们故意省略了 $R(u)$, 式 (7.31) 可写成如下形式

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\int_0^L E A(x) [du(x)/dx]^2 dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx + M u^2(L)} \\ &= \frac{V_{\max}}{T^*} \end{aligned} \quad (7.32)$$

这里再次看出分子是 $2V_{\max}$, 而分母是 $2T^*$ 。因此, 如果我们在式 (7.32) 重新规定 $R(u)$ 等于 ω^2 , 便再次得到 (7.28) 的一般表达式。注意式 (7.32) 可用更直接的方法得到, 这就是把图 7.2 中的系统看成末端 $x=L^+$ 是自由的, 这里 L^+ 是紧接在 M 右边的点, 同时具有质量分布为

$$m_1(x) = m(x) + M \delta(x-L) \quad (7.33)$$

式中 $\delta(x-L)$ 为一空间狄拉克 δ 函数, 定义为

$$\begin{aligned} \delta(x-L) &= 0, \quad x \neq L \\ \int_0^{L^+} \delta(x-L) dx &= 1 \end{aligned} \quad (7.34)$$

注意 $M \delta(x-L)$ 具有分布质量的单位。

按照瑞利-里兹法, 对于任意连续系统特征值问题的近似解可以用线性组合的形式构成

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x) \quad (7.35)$$

式中 a_i 是待定系数而 $u_i(x)$ 是由分析者指定的已知空间座标 x 的函数。函数 $u_i(x)$ 满足问题的所有边界条件, 同时必须彼此是独立的, 但不同于特征函数, 它们不需要满足系统的微分方程。然而, 它们必须具有对自变量 x 的导数, 且导数的阶数至少

应等于确定特征值问题的微分方程的阶数，我们把这种函数 $u_i(x)$ 称为比较函数，这个 u_i 函数集称为生成集。系数 a_i 要这样决定，使得函数 $u(x)$ 与固有振型两者极其相似。数学上，这相当于去寻找使瑞利商变得平稳的 a_i 值。在级数 (7.35)* 中用了 n 个函数 $u_i(x)$ ，实质上是把一个无限多自由度的系统简化成为 n 个自由度的系统，这个离散化方案相当于不计生成集中的高次项，因此，将约束

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0 \quad (7.36)$$

强加给了系统。因为约束会增加系统的刚度，所以估计的固有频率就高于真实固有频率。增大 (7.35) 式中比较函数 $u_i(x)$ 的数目，一般能降低估计量（至少不会增大估计量）。这样就从上面来逼近真实的固有频率。

对图 7.1 和 7.2 的情况，我们已经阐明：把瑞利商写成 (7.28) 的形式，其自然边界条件即保证在 $x=L$ 处力平衡的边界条件是自动满足的。这对于任何自然边界条件都是符合的，并不一定指图 7.1, 7.2 的特殊情况。明显的结论是，(7.28) 形式的瑞利商容许我们以 (7.35) 的级数形式来假定一近似解，但是函数 $u_i(x)$ 并不需要是比较函数。的确，惟一的求求是：函数 $u_i(x)$ 应满足系统的几何边界条件并具有对 x 的导数且导数的阶数至少应等于出现在 V_{\max} 中的阶数，（这后一点并不特别重要，因为正常选择的函数的形式无论怎样都具有足够高阶的导数）。仅满足几何边界条件而不满足系统的自然边界条件或系统的微分方程的函数称为容许函数。因为容许函数只需满足几何边界条件，通常与比较函数相比要多得多。因此我们采用比率 V_{\max}/T^* 形式的瑞利商，如有可能在生成集 (7.35) 级数中就用比较函数，若比较函数不易取，则用容许函数。

为了进一步讨论，将瑞利商表示成下列形式

*译注：原书误为 (7.28)

$$\lambda = \omega^2 = R(\mathbf{u}) = \frac{V_{\text{max}}}{T^*} = \frac{N(\mathbf{u})}{D(\mathbf{u})} \\ = \frac{N(a_1, a_2, \dots, a_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} \quad (7.37)$$

式中 N 和 D 分别表示瑞利商的分子和分母。使商具有平稳值的必要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = \frac{D(\partial N / \partial a_r) - N(\partial D / \partial a_r)}{D^2} = 0 \\ r=1, 2, \dots, n \quad (7.38)$$

以 λ 表示对应于瑞利商平稳值的 λ 值，并考虑式 (7.37)，则式 (7.38) 可写成

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} - \lambda \frac{\partial D}{\partial a_r} = 0, \quad r=1, 2, \dots, n \quad (7.39)$$

此外，引进符号

$$N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} a_i a_j, \\ D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} a_i a_j \quad (7.40)$$

式中系数 k_{ij} 和 m_{ij} 是对称的，

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad m_{ij} = m_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (7.41)$$

可写出

$$\frac{\partial N}{\partial a_r} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial a_r} a_j + a_i \frac{\partial a_j}{\partial a_r} \right) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} (\delta_{ir} a_j + \delta_{jr} a_i) \\ = \sum_{j=1}^n k_{rj} a_j + \sum_{i=1}^n k_{ir} a_i \\ = 2 \sum_{j=1}^n k_{rj} a_j, \quad r=1, 2, \dots, n \quad (7.42)$$

式中 δ_{jr} 和 δ_{ir} 为克朗尼格 δ 符号。注意第二个和式中的下标 i