

譯文: 72-003

冲翼艇译文

(一)

中国人民
解放军 南字 812 部队

一九七二年十月

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

转引自一九六六年十月二十九日

《解放军报》

……一切外国的东西，如同我们对于食物一样，必须经过自己的口腔咀嚼和胃肠运动，送进唾液胃液肠液，把它分解为精华和糟粕两部分，然后排泄其糟粕，吸收其精华，才能对我们的身体有益，决不能生吞活剥地毫无批判地吸收。

《新民主主义论》（一九四〇年一月）

《毛泽东选集》第二卷一九五六年

北京版第七〇〇页

目 录

贴近地面飞行的平板翼升力分布	(1)
论地面效应翼的最小诱导阻力	(8)
贴近屏面飞行的任意平面形状机翼问题的解法	(25)

貼近地面飞行的平板翼升力分布

[西德] G. 布隆斯、W. 林克

內 容 提 要

本文討論了不可壓縮的平面流动中的地面效应平板翼。文中借助于奇点法，估定了飞高及迎角变化时地面对該翼升力、压力中心和升力分佈的影响。

一、引 言

在二元 Skelett 理论中，为计算平面自由流动中薄翼压力分布所用过的方法，本文把它用于貼近地面飞行的二元平板翼。为此，必須以貼近地面飞行的平板翼的映像来满足地面是一条流线的附加边界条件。而涡强 γ 预先未知的涡系，应该使平板翼及其映像翼和迎面气流引起地面效应平板翼的法向速度为零才行。該平板翼法向速度为零的边界条件给出了涡强 γ 的积分方程式，文中借助于 Skelett 理论中的一个普通福里埃级数，把該积分方程变成线性方程组。在文献[1,2,3]中，则采用适当的保角转换研究过与本文有类似的问题。本文把用奇点法获得的升力比与文献[1]所得结果作了比较，并卓越*地提供了在公开发表的有关论文中迄今尚未给出过的地面效应平板翼的压力分布。

二、符 号

- c_l 升力系数
- c_m 关于平板翼前缘的力矩系数，順时針指向为正
- c_n 法向力系数
- h_0 由四分之一弦长处 ($l/4$) 到地面的距离
- l 平板翼弦长 ($l=1$)
- V_n 平板翼的法向诱导速度
- V_t 平板翼的切向诱导速度
- V_∞ 迎面气流速度
- x 弦向坐标
- x_{DP} 压力中心点与平板翼前缘间的距离
- α 迎角

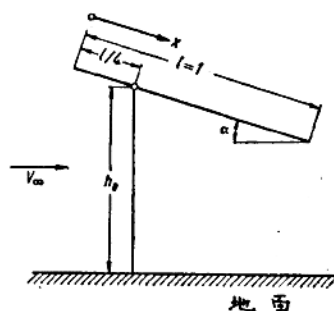


图 1 符号說明

* 这里，著者显然有些言过其实，西德别的研究者和英国、加拿大等国已发表过計算地面效应翼的压分分布的論文——譯者註。

γ 涡弦, 顺时针指向为负

φ, ψ 按方程式(7)变换的弦向坐标

文中所有长度均以弦长 $l = 1$ 为基础。

注脚 α 代表地面效应区外的值。

三、方程组的推导

我们采用下列简化符号:

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{2 h_0 \sin \alpha - x_0 + x \cos 2 \alpha}{(2 h_0 \sin \alpha - x_0 + x \cos 2 \alpha)^2 + (x \sin 2 \alpha - 2 h_0 \cos \alpha)^2} \quad (1)$$

$$\tau(x, x_0) = \frac{x \sin 2 \alpha - 2 h_0 \cos \alpha}{(2 h_0 \sin \alpha - x_0 + x \cos 2 \alpha)^2 + (x \sin 2 \alpha - 2 h_0 \cos \alpha)^2} \quad (2)$$

这样, 由平板翼以及映象翼涡系在该平板翼处引起的法向导速度和切向导速度, 便可按下述积分表示:

$$V_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(x) \left[\frac{1}{x_0 - x} + \varepsilon(x, x_0) \right] dx \quad (3)$$

$$V_t(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(x) \tau(x, x_0) dx \quad (4)$$

该平板翼处的总法向速度必须为零这一边界条件为

$$V_\infty \sin \alpha + V_n(x_0) = 0 \quad (5)$$

该式与式(3)联解, 便得涡弦 γ 的积分方程

$$V_\infty \sin \alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(x) \left[\frac{1}{x_0 - x} + \varepsilon(x, x_0) \right] dx \quad (6)$$

若引入 x 及 x_0 的变换

$$x = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi), \quad x_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \psi) \quad (7)$$

以及引入二元 Skelett 理论中所常见的 γ 表达式

$$\gamma = 2 V_\infty \left[(A_0 + \sin \alpha) \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n \varphi \right] \quad (8)$$

同时在积分方程式(6)中, 如采用下述简化式:

$$Q(\psi) = \int_0^\pi \varepsilon(\varphi, \psi) (1 + \cos \varphi) d\varphi \quad (9a)$$

$$T_\psi(\psi) = \int_0^\pi \varepsilon(\varphi, \psi) \sin \varphi \sin n \varphi d\varphi \quad (9b)$$

我们便可把积分方程式(6)写成

$$A_0 [1 + Q(\psi)] - \sum_{n=1}^N A_n [\cos n \psi - T_n(\psi)] = -\sin \alpha Q(\psi) \quad (10)$$

仅当 $T_n(\psi)$ 项可略不计时, 才可以由福里埃积分直接获得上式中诸系数 A_n 。正如文中的计算例子所表明的那样, 只有在大飞高情况下, $T_n(\psi)$ 项可略去不计。又因为方程式(10)在平板翼弦向预先给定的不同点被满足, 故本文将该方程式转换为线性方程组(见第五节)。

四、空气动力系数的计算

法向力系数为

$$c_n = 2 \int_0^1 \frac{\gamma}{V_\infty} \left(\cos \alpha + \frac{V_t}{V_\infty} \right) dx \quad (11)$$

以及该法向力绕平板翼前缘的纵向力矩系数(顺时针指向为正)为

$$c_m = -2 \int_0^1 \frac{\gamma}{V_\infty} \left(\cos \alpha + \frac{V_t}{V_\infty} \right) x dx \quad (12)$$

于是,应用福里埃级数(8),便可得到

$$c_n = 2\pi \left(\sin \alpha + A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \cos \alpha + 2 \int_0^1 \frac{\gamma}{V_\infty} \frac{V_t}{V_\infty} dx \quad (13)$$

以及

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \left(\sin \alpha + A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \cos \alpha - 2 \int_0^1 \frac{\gamma}{V_\infty} \frac{V_t}{V_\infty} x dx \quad (14)$$

在本文提供的图线中,总是把上述空气动力系数表示为相应的气动系数的相对比值

$$c_{n_{\text{rel}}} = 2\pi \sin \alpha \cos \alpha \quad (15)$$

$$c_{m_{\text{rel}}} = -\frac{\pi}{2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (16)$$

式(15)和(16)均为地面效应区外的空气动力系数。而平板翼上翼面和下翼面的压力分布分别按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} c_{pob} &= 1 - \left(\cos \alpha + \frac{V_t}{V_\infty} + \frac{\gamma}{2V_\infty} \right)^2 \\ c_{pa} &= 1 - \left(\cos \alpha + \frac{V_t}{V_\infty} - \frac{\gamma}{2V_\infty} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

五、求解方法

为了将方程式(10)变为线性方程组,首先把平板翼弦长(π)分成六等分,且间距 $\Delta\varphi \equiv \pi/6$,这样,方程式(10)在

$$\varphi_k = k\pi/6 \quad (18)$$

的七点处可得到满足。由此,我们便可求出关于方程式(10)的线性方程组

$$\begin{cases} A_0(1+Q_k) - \\ - \sum_{n=1}^6 A_n (\cos \psi_k - T_{n,k}) = -Q_k \sin \alpha \end{cases} \quad (19)$$

这里, Q_k 和 $T_{n,k}$ 这两项可按 Simpson 法积分方程式(9a)和(9b)算出。尽管求出方程式(9a)和(9b)的准确积分值也是可能的,但本文仍采用电子计算机方法求此积分值,且全部计算程序均在电子计算机上进行。

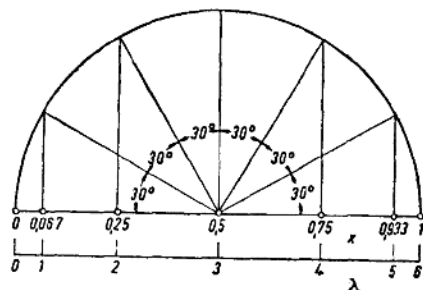


图 2 弦长分段图解

六、結 果

1. 升力比

图 3 示出了地面效应区内升力比 $c_a/c_{a\infty}$ 随迎角变化的情况。曲线族一直算到某一迎角 α_g 以前。

$$\alpha_g = \arcsin \frac{4}{3} h \quad (20)$$

在该迎角 α_g 情况下，平板翼后缘碰至地面。

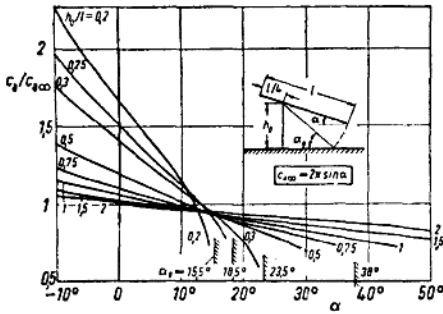


图 3 地面对平板翼升力比 $c_a/c_{a\infty}$ 的影响

在小迎角情况下，升力系数比随着飞高的逐渐减小，而不断增大。而在大迎角情况下，飞高的减小相反地会引起 $c_a/c_{a\infty}$ 值的减小。另外，由此还可得出这样的结论，即图 4 中的曲线族 $c_a = c_a(\alpha)$ 有可能出现 c_a 的极大值。根据对上述结果的详细分析，不难看出 $c_a/c_{a\infty}$ 值减小的原因，首先是由于环流变弱，其次是因为方程式(4)中的 V_z 值增加，并且在小迎角情况下，贴近地面飞行的平板翼环流比自由流动中的平板翼大，而在大迎角下，地面效应平板翼的环量却比自由流动中的平板翼环流小得多。

从物理上解释， V_z 的增加是因紧靠平板翼下面的气流被堵塞的缘故，而平板翼环量的大小受其后缘流动状况的影响(见图 5)。

由于气流被冲压，故地面效应平板翼的前驻点，即通过前驻点的流线必须连续不断地向后移动，但是库达流动条件却把平板翼的后驻点固定不动地限定在该翼后缘处。因此，在小迎角情况下，地面效应平板翼后驻点流线必须比地面效应区外的低些，而在大迎角情况下，该翼后驻点流线却又比地面效应区外的高一些(图 5)。这就限制了绕过平板翼气流的增强或减弱，而这种绕流的或增或减又会引起本文用计算法获得的环量大小

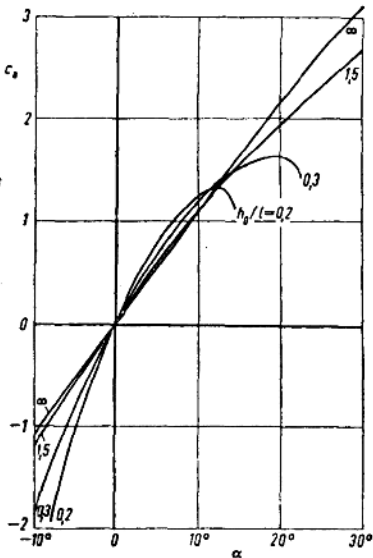


图 4 在地面效应区内升力系数与迎角的关系

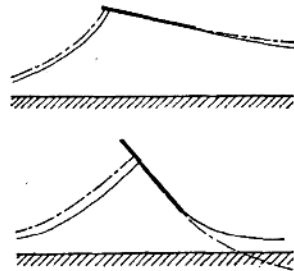


图 5 在小迎角及大迎角下的流动状态——地面效应区内的驻点流线——地面效应区外的驻点流线

的改变。

表 1 将本文所得升力系数比同 Tomotika 所得结果[1] 进行了比较。或许以弦长上更多的点来满足线性方程组。上述两种计算方法的一致性可能还会改善。

表 1 本文所得升力系数比与文献[1]所得结果之比较

α	h_0/l	$c_a/c_{a\infty}$ 本文计算法	$c_a/c_{a\infty}$ 按文献[1]
90	6.2461	0.9891	0.9892
90	0.3580	1.0871	1.079
18°	6.2461	0.9769	0.9773
18°	0.3780	0.8722	0.900
36°	6.2500	0.9549	0.9561

2. 压力中心的位置

图 6 说明贴近地面飞行的平板翼压力中心位置不再是固定不变的。随着迎角的不断增大，压力中心向后移动，且平板翼愈贴近地面，压力中心的移动也愈大。因气流被堵塞在下翼面引起了冲压气垫，在大迎角时该冲压气垫将向前扩散而逃逸，这时平板翼压力中心便开始向前移，甚至移至 $l/4$ 点之前。

3. 压力分布

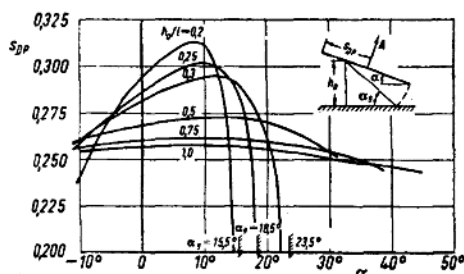


图 6 飞高对平板翼压力中心位置的影响

图 7、8、9 给出了本文所得压力分布，并同地面效应区外的平板翼压力分布做了比较。该压力分布图清晰地示出，压力中心向后移动，且随着迎角的增大，平板翼下表面的冲压气垫在不断地扩大，而该翼上表面的前缘吸力在大迎角下比自由流动中的要强烈。

至于按本文计算方法求得的大量压力分布图，已在文献[4]中做了论述。

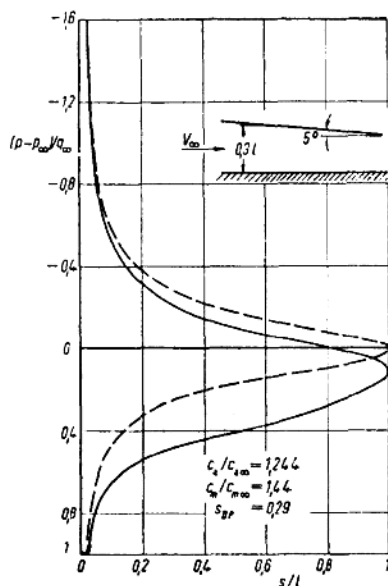


图 7 在地面效应区内平板翼上翼面与下翼面的压力分布图($\alpha=5^\circ$, $h_0/l=0.3$)

——地面效应区内的驻点流綫
 ----地面效应区外的驻点流綫

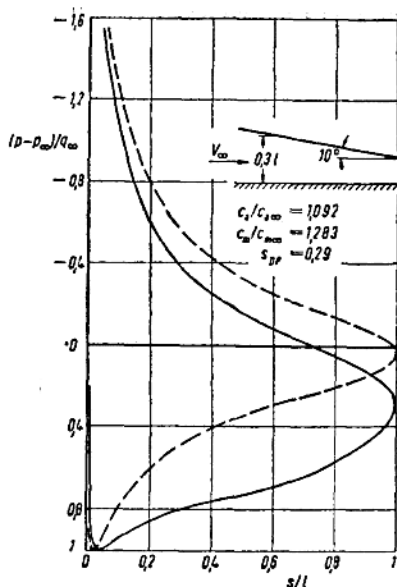


图 8 同图 7 ($\alpha=10^\circ$, $h_0/l=0.3$)
——(同图 7)

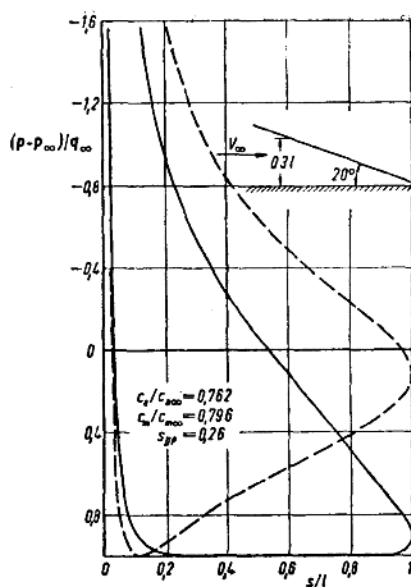


图 9 同图 7 ($\alpha=20^\circ$, $h_0/l=0.3$)
——(同图 7)

七、结 束 语

对于贴近地面飞行的平板翼，本文应用奇点法固定了它在各种不同飞高及迎角下的升力系数和压力中心的变化。由此得到下述结果：

1. 升力系数与迎角有着非线性关系。
2. 在小迎角情况下，飞高愈小，平板翼升力系数愈大。随着迎角的逐渐增大，上翼面负压所产生的升力部分逐渐减小，且比自由流动中的还要小。在超过某一迎角时，该升力系数达到最大值(参见图 4)。
3. 平板翼愈贴近地面，压力中心变化愈大。并且在飞高不断减小、迎角继续增大时，压力中心先向后移动，然后，当迎角再继续增加时，压力中心相反地却向前移动(见图 6)。
4. 在地面效应区内，平板翼驻点往后移动(见图 7、8、9)。
5. 在地面效应区内的平板翼下表面上的余压比自由流动中的平板翼大一些，而作用在上表面的负压却比自由流动中的小(见图 7、8、9)。
6. 在地面效应区内，作用在平板翼上表面的前缘吸力比自由流动中的强烈(见图 7、8、9)。

参 考 文 献

[1] S. Tomotika, T. Nagamiya, Y. Takenouti; The lift on a flat plate placed near a plane wall, with special reference to the effect of the ground upon the lift of a monoplane aerofoil. Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, Rep. № 97 (1933).

[2] S. Tomotika and I. Imai; The moment of the fluid pressure acting on a flat plate in a

semi-infinite stream bounded by a plane wall. I. Case of low boundary (The ground effect). Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, Rep. № 152 (1937).

[3] S. Tomotika and I. Imai: Notes on the lift and moment of a plane aerofoil which touches the ground with its trailing edge. Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, Rep. № 154 (1937).

[4] G. Brauns und W. Lincke: Einfluß der Bodennähe auf die Auftriebsverteilung einer ebenen Platte in ebener, inkompressibler Strömung. Bericht des Instituts für Luftfahrttechnik der TH Darmstadt (1960).

[戈炳崑译自西德 «Zeitschrift für Flugwissenschaften» 1962, 10 Jahrgang, Heft 7, 282~285, G. Brauns und W. Lincke: "Die Auftriebsverteilung einer ebenen Platte in Bodennähe" 张景诚校]

论地面效应翼的最小诱导阻力

[英] P. R. 阿 塞 勒

内 容 提 要

本文提出了带端板的地面效应平翼的最小诱导阻力近似理论。为了检验该法的准确性,在端板深度为零(即无端板的平翼)情况下,同精确的线性理论做了比较。结果表明,在线性升力面理论的范围內,对于感兴趣的飞高范围,本文提出的方法是正确的。在第五节中,本文理论同试验结果进行了比较。比较时,对近似理论做了两种补充解释。第一种假定:涡迹为翼后缘在某平面中的投影,此平面是与该翼作零迎角运动的方向成正交的那个平面。第二种与第一种唯一的区别是,对翼迎角没有任何限制。对于无端板的平翼,发现上述两种解释中的第一种比第二种更接近试验结果。然而,当平翼装上深度足够大的端板时,相反地第二种解释却比第一种好些。在第五节中对此做了说明。

一、序 言

暂且不谈腾空艇的那些明显的实用问题,就增大该艇航速的可能性这一点来说已是很有意义的了。初步研究指出,采用气动升力面为腾空艇提供巡航时的那怕是部分升力便已非常有效的提高了艇的航速。上述升力面必须是小展弦比的,使之能经受住海浪的冲击;但随之而来的是诱导阻力(涡阻力)可能太大,另一方面,水表面多少类似于不可穿透的刚性地面而具有减小诱导阻力的特性。地面的这种特性是众所周知的,并已从理论上[1,2]和试验方面[3]做过研究。一般说来,这些研究均已指出,在给定升力的情况下,平翼愈贴近地面,其诱导阻力愈小,直至为零。但是,实用的最小飞高由于要避免海浪冲击而受到限制。因此,平翼的诱导阻力将有一定的下限值。

采用带端板的地面效应平翼,可能是克服这种困难的一种办法。该机翼可能设计成既经得住海浪的冲击又使诱导阻力减少。所以很希望研究一下采用带端板的地面效应翼使诱导阻力减少的程度,这一点正是本文的主要论题。

本文分析以线性升力面理论为依据,且仅限定讨论最小诱导阻力的问题,并做了下述一些假设:首先,假定绕地面效应翼的流动是无粘性和无旋的;其次,假定水表面可视为不可穿透的刚性地面。另外,尽管本文提出的方法可推广到分析更为一般的情况,但文中仅限于讨论相对于翼展为小飞高的情况。不过,因为现代的地面效应翼都是非常贴近地面飞行的,所以,这一限制并非重要。

线性理论作为模拟绕地面效应翼流动的一种方法,就其某些特征来看,尚有不少缺陷。所以,为了审核上述方法的局限性,在第五节中,将本文的理论 with 试验结果作了比较。

符 号

- A 机翼展弦比
- b 涡迹展向长度

- C 变换常数
 $\bar{C}_L$ 总升力系数
 $\bar{C}_{DB}$ 总的边界层阻力系数
 $\bar{C}_{Di}$ 诱导阻力系数
 $\bar{C}_D = \bar{C}_{DB} + \bar{C}_{Di}$
 $\bar{D}_i$ 诱导阻力
 $\partial/\partial n$ D 域外的法向微分
 h 机翼涡迹离地面的高度
 h_p 机翼转轴离地面的高度(参见图 7)
 k 椭圆积分和椭圆函数的模数
 $k' = (1 - k^2)^{1/2}$
 l 端板涡迹长度
 l_p 端板底部与机翼转轴的间距(参见图 7)
 $\bar{L}$ 总升力
 $q = \exp(-\pi K'/K)$
 $q' = q(k')$
 R_e 以弦长为参考长度的雷诺数
 s 矩形和变态矩形平面的复变量
 $s_1 = \operatorname{sn}^{-1}(\lambda/k)/2K$
 $s_2 = \operatorname{dn}^{-1}(1/\alpha, k')/2K$
 t 上半平面和变态上半平面的复变量
 U_0 机翼前进速度
 W 特里夫茨(Trefftz)平面流动的复势, $= \phi + i\psi$
 w_∞ 特里夫茨平面中机翼涡迹的上洗流
 y, z 特里夫茨平面的笛卡儿坐标系(参见图 1)
 α, γ, δ 变换参数
 $\delta' = (\lambda^2 - \delta^2)^{1/2}$
 ξ 端板底部与顶部间的夹角(参见图 7)
 $\epsilon(\theta), \epsilon(\tilde{\theta})$ 在 t 平面(图 3)与 s 平面(图 4)中缺痕 AB 的径向坐标
 ϵ 方程式(34)定义的小参数
 $\theta, \tilde{\theta}$ 在 t 平面(图 3)与 s 平面(图 4)中缺痕 AB 的角坐标
 λ 变换参数
 Λ 方程式(44)中所用的常量
 ρ 空气密度
 σ 方程式(19)所定义的诱导阻力因子
 $\Sigma = \bar{D}_i / \frac{1}{2} \rho w_\infty^2 b^2$
 ϕ 特里夫茨平面流动的速度势
 $\Phi = \sin^{-1}(k)$
 ψ 特里夫茨平面流动的流函数

$\Omega = y + iz$ 特里夫茨平面的复变量

足 标

c 组合流动的量

二、特里夫茨平面流动

图 1 示出带端板的地面效应翼在特里夫茨平面的几何形状，并标出该坐标系及所用的符号。

孟克[4]已经给出在一定升力情况下使升力系统保证诱导阻力为最小的条件。对于本文的情况，要求特里夫茨平面中机翼涡迹处的上洗流 w_∞ 沿展向必须是常数，端板涡迹处的侧洗流必须为零。

由于假定绕带端板的地面效应翼的流动是无粘性和无旋的，故特里夫茨平面流动具有一个能满足下述方程式的速度势 ϕ

$$\frac{\partial^2 \phi}{y \partial^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

这就是早已熟悉的二元拉普拉斯方程式，由满足下列边界条件求解：

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \partial \phi / \partial n = -w_\infty; \quad |y| \leq b/2, \quad z = +h^+; \\ \text{(II)} \quad & \partial \phi / \partial n = +w_\infty; \quad |y| \leq b/2, \quad z = +h^-; \\ \text{(III)} \quad & \partial \phi / \partial n = 0; \quad |y| = b/2, \quad +(h-l) \leq z \leq +h; \\ \text{(IV)} \quad & \partial \phi / \partial n = 0; \quad y = 0, \quad 0 < z < +h; \\ \text{(V)} \quad & \partial \phi / \partial n = 0; \quad |y| < \infty, \quad z = 0; \\ \text{(VI)} \quad & |dW/d\Omega| \sim 0; \quad |\Omega| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在方程式(2)中， $\partial/\partial n$ 表示 D 域外法向微分， D 域由围线 $IABCD C'E'FEGHI$ 围成，如图 1 所示， $+h^+$ 和 $+h^-$ 分别代表 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (+h + \varepsilon)$ 和 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (+h - \varepsilon)$ 。还有， $W = \phi + i\psi$ 为复势， ψ 是流函数，以及 $\Omega = y + iz$ 系特里夫茨平面的复变量。

尚须指出，边界条件(IV)由流动对称性导得，而边界条件(V)则从地面为不可穿透之假定求出。

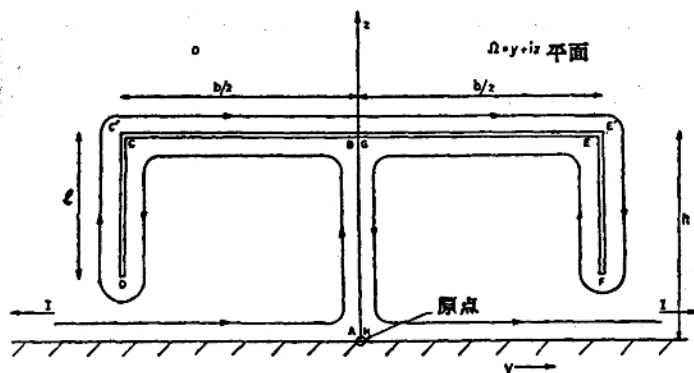


图 1 带端板之地面效应平翼的特里夫茨平面

求解该问题的一般方法,是把 D 域变换至上半平面 t 。一般来说,所需要的变换关系式可以应用许瓦兹——克利司多夫(Schwarz-Christoffel)公式[5]获得,该变换式为:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{C(\alpha^2 - t^2)(1 - t^2)^{1/2}}{(1 - \lambda^2 t^2)^{1/2}(1 - \delta^2 t^2)^{1/2}(1 - \gamma^2 t^2)^{1/2}} \quad (3)$$

$$1 \leq \alpha \leq 1/\gamma \leq 1/\lambda \leq 1/\delta$$

式中 C 是转换实常数, α, λ, δ 和 γ 为变换参数。这样, Ω 和 t 间的关系式原则上可由直接积分方程式(3)建立起来。遗憾的是,该积分属于超椭圆型[6],除特殊情况外,无法求出其显式解。因此,有必要改用别的分析方法来求解方程式(3)。

本文所用的方法可归纳如下:

(1) 方程式(3)的右边展成某参数的幂级数形式,该参数对于本文感兴趣的情况为一小量。

(2) 对已求出的展开式的第一项进行积分,给出 Ω 平面与上半平面间的近似变换关系,或 Ω 平面与畸变的上半平面间的精确变换关系。在上述意义上作解析时,且在本文感兴趣的范围内,该变换式在 Ω 平面其限定的区域内不能均匀地应用。此处采用的方法用于第二种解释。

(3) 必须用辅助的保角变换将畸变的上半平面转换到真实的上半平面。

现代的地面效应翼在 $0 < h/b \leq 0.5$ 范围内飞行,因此其诱导阻力的解仅要求在此飞高范围内准确就够了。这就说明,上述展开式中最合适的参数是 $\delta' = (\lambda^2 - \delta^2)^{1/2}$ 。为了证实该参数的适宜数值正好在上述飞高范围内,将对 $l/b = 0$ 的情况(即平翼)进行了研究。在此情况下,方程式(3)的积分可以用显函数形式给出,如下面所示,文中获得了该地面效应平翼最小诱导阻力的显式解。这对衡量本文处理带端板地面效应平翼方法的准确性,提供了有用的依据。

三、地面效应平翼

求解地面效应平翼的最小诱导阻力问题,已被哈勒[1]研究过。但是,他给出的速变势表达式为级数形式,该级数对于小飞高 h/b 看来收敛得很慢。而且,哈勒的诱导阻力结果只有用数值积分或图解法才能获得。

本文讨论的方法以孟克[4]流动迭加法为基础,求出了最小诱导阻力的分析解。

1. 流动问题

以 $U = \alpha = 1$ 代入方程式(3),便能获得地面效应平翼的许瓦兹——克利司多夫变换式,其结果为:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{C(1 - t^2)}{(1 - \lambda^2 t^2)^{1/2}(1 - \delta^2 t^2)^{1/2}} \quad (4)$$

该式可借用下述变换进行积分

$$t = \operatorname{sn}[2K(k)s, k]/\lambda \quad (5)$$

式中 $k = \delta/\lambda$ 是雅可比椭圆函数的模数,以及 K 为第一类完全椭圆积分。于是,联解方程式(4)和(5),并用布尔德——弗里特曼[6]给出的结果(即文献[6]中的方程(121.00)、(310.02)和(731.01)进行积分,求出

$$\Omega = C[2Ks - \{2Ks - E(2Ks)\} / \lambda^2 k^2] / \lambda + C_1 \quad (6)$$

式中, $E(2Ks)$ 是第二类不完全椭圆积分, C_1 则为积分常数。

s 平面由顶点各为 A 、 B 、 G 和 H 的矩形内域组成。应用布尔德——弗里特曼(p.17)给出的变换式(5)的性质, 便能求出上述顶点的复坐标。不难推演出, 在 A 、 B 、 G 和 H 点的复坐标分别是 $-K + iK'$, $-K$, $+K$ 和 $+K + iK'$ 。这里 $K' = K(k')$ 以及 $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ 。

由 Ω 平面与 s 平面间的点与点对应关系, 便可导出下述结果(见文献[7]):

$$\lambda = [1 - E(K)/K]^{1/2} / k \quad (7)$$

以及

$$2h/b = \pi/2 \{E(\text{sn}^{-1}\lambda)K - E(K)\text{sn}^{-1}\lambda\} \quad (8)$$

方程式(7)可用来从方程式(8)中消去 λ , 给出 $2h/b$ 与 k 的关系式。由此得到下述结论: 对于范围很广泛的 h/b 值, δ' 均为很小的量。这样一来, 对于地面效应平翼, 同样地很可能均对于带端板的地面效应平翼, δ' 似乎是方程式(3)的合适的展开参数。

特里夫茨平面流动的速度势由流动迭加法确定, 这是孟克提出的确定孤立升力系统最小诱导阻力方法的推广。从实质上分析, 孟克方法的要点乃是寻找下述这种性质的流动: 当该流动被叠加在特里夫茨平面流动之后, 在不改变涡迹处的 ϕ 有一突跃的情况下, 要给出某种物体绕流型的流动。因而, 无须积分那个表征 t 平面物理流动的分布源, 就能容易地找到上述迭加流动的速度势。孟克发现, 对于最小诱导阻力的孤立升力系统, 所要求的叠加流动就是平行升力方向的均匀流。然而, 对于本文的情况, 这种均匀流动并不合适, 原因是它会产生一个地面分布源所造成的组合流动。所以, 为了获得合适的组合流动速度势, 仍须完成那个积分。不过, 如使叠加流动在地面处满足 $\partial\phi/\partial n = 0$ 的边界条件, 上述积分便可避免。满足该边界条件的叠加流动具有复速度势

$$W = w_\infty \Omega^2 / 2h \quad (9)$$

可以证明, 式(9)的流动与特里夫茨平面流动组合后, 在 Ω 平面有界的边界区域上, 皆为 $\partial\phi/\partial n = 0$, 以及

$$dW_c/d\Omega \sim w_\infty \Omega/h; |\Omega| \rightarrow \infty \quad (10)$$

这里, 足标 c 代表组合流动情况。

在 t 平面内, 组合流动的边界条件变为:

$$\left. \begin{aligned} \partial\phi_c/\partial n = 0; \Im(t) = 0, \Re(t) < \infty \\ dW_c/dt \sim w_\infty C^2 t / \lambda^2 \delta^2 h; |t| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

满足边界条件(11)的复势并不是唯一的。但是, 下述两个附加条件就限定了该组合流动的解。首先, 只有在 D 域内具有正则复势的特里夫茨平面流动, 从物理上看才是合理的。因此, 因为迭加流动的复势(9)在 Ω 平面的有界区域内亦是正则的, 所以, 必须使 W_c 在 D 域有界部分内也是正则的。其次, 特里夫茨平面流动与迭加流动均对称于 z 轴, 故所要求解的组合流动也是对称于 z 轴的, 结果在 t 平面内, 该组合流动对称于它的虚轴。

满足上述边界条件的复势由下式给出

$$W_c = \frac{w_\infty C^2 t^2}{2 \lambda^2 \delta^2 h} + C_2 \quad (12)$$

式中 C_2 是任意常数。

特里夫茨平面流动的复势由 W_c 中扣除复势(9)便求出

$$W = \frac{w_{\infty} C_2 t^2}{2\lambda^2 \delta^2 h} - \frac{w_{\infty} \Omega^2}{2h} + C_2 \quad (13)$$

显然, 只要 C_2 为任意值, 该解还不是唯一的, 但是, 读者将会看到, C_2 并不影响诱导阻力值。

2. 求解诱导阻力

以前进速度 U_0 飞行的升力系统的诱导阻力和升力, 其线性理论的近似式[8]如下:

$$\bar{D}_i = \frac{1}{2} \rho \int_r \phi (\partial \phi / \partial n) d\bar{s} \quad (14)$$

$$\bar{L} = \rho U_0 \int_r \phi dy \quad (15)$$

式中, ρ 是空气密度, 足标 T 代表顺时针方向沿 Ω 平面中的涡迹之围道积分限, $d\bar{s}$ 为绕涡迹的线微元。

对于最小诱导阻力的地面效应平翼, 可将方程式(14)改写成

$$\bar{D}_i = -\frac{1}{2} \rho w_{\infty} \int_r \phi d\Omega \quad (16)$$

$$= -\frac{1}{2} \rho w_{\infty} \int_r \left\{ \frac{w_{\infty} C_2 t^2}{2\lambda^2 \delta^2 h} + \Re \left[C_2 - \frac{w_{\infty} \Omega^2}{2h} \right] \right\} d\Omega \quad (17)$$

(17)式由方程式(13)获得。

在文献[7]中业已求得上述积分值, 形如

$$\bar{D}_i = -\frac{2\rho w_{\infty}^2 k^4 K^3 h^2}{\pi^3} \left[\frac{2\lambda^2 (K - E(K))}{k^2} - \frac{2\{K(2+k^2) - 2E(K)(1+k^2)\}}{3k^4} \right] \quad (18)$$

对于地面效应平翼情况, 方程式(15)中的 dy 可用 $d\Omega$ 代替, 因此, 由方程式(15)、(16)和(18)便能求得诱导阻力因子:

$$\sigma = \pi \rho U_0^2 b^2 \bar{D}_i / 2\bar{L}^2 \quad (19)$$

该式可改写成下述形式:

$$\sigma = -\frac{\pi^4 b^2}{16k^4 K^3 h^2} \left[\frac{2\lambda^2 (K - E(K))}{k^2} - \frac{2\{K(2+k^2) - 2E(K)(1+k^2)\}}{3k^4} \right]$$

实际上, 应用方程式(8), h/b 便从此方程式中消去, 经重新整理之后, 使得

$$\sigma = \frac{\pi 3^2 \{E(\text{sn}^{-1}\lambda)K - E(K)\text{sn}^{-1}\lambda\}^{-2*}}{2K^3 \{K(2+k^2) - 2E(K)(1+k^2) - 3\lambda^2 k^2 (K - E(K))\}} \quad (20)$$

利用方程式(7)、(8)和(20)以及各种 k 值的 K 及 $E(2Ks)$ 的函数表[6], 便可以把诱导阻力因子表示为 $2h/b$ 的函数。由此获得的 σ 随 $2h/b$ 变化的曲线, 示于图2中。在该图中, 并将哈尔[1]和魏森尔斯伯格[2]的结果同本文的结果进行了比较。不难看出, 在 $0.5 \leq 2h/b \leq 1.2$ 的范围内, 哈勒曲线比本文理论值低, 尤其是在 $h/b = 0.7$ 时, 哈勒曲线值约为本文理论值的95%。这可能是哈勒用数值计算或图解积分求解 σ 时的误差引起的。

图2也示出了对于较小的 k' 值, 即 $\lambda \approx 1$ 时, 由方程式(8)及(20)的展开式得出的渐近曲线, 此渐近结果忽略了 $O(k'^2)$ 项。可以证明, 上述方程组能用下述渐近式代替:

* 原文是 $\{E(\text{sn}^{-1}\lambda)K - E(K)\text{sn}^{-1}\lambda\}^2$, 恐系笔误, 译文已改正。——译者

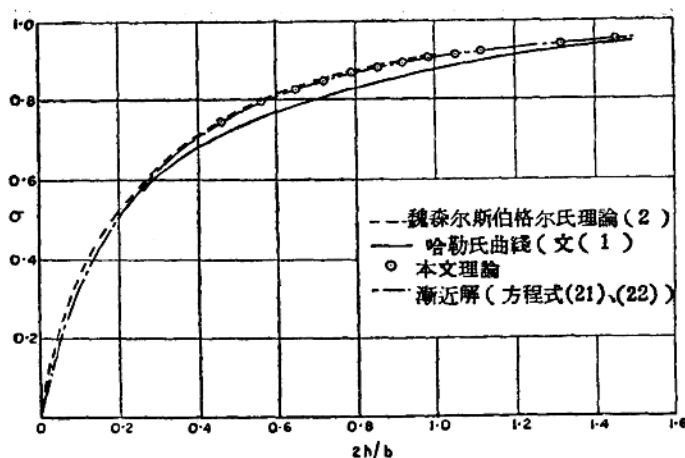


图 2 无端板的地面效应平翼的诱导阻力因子

$$2h/b \sim \frac{\pi(1-\lambda^2)}{[2\lambda + (1-\lambda^2)\log\{(1-\lambda)/(1+\lambda)\}]}; \lambda \rightarrow 1 \quad (21)$$

$$\sigma \sim 3\pi^2(1-\lambda^2) \frac{[2\lambda + (1-\lambda)\log\{(1-\lambda)/(1+\lambda)\}]}{8(3\lambda^2-1)}; \lambda \rightarrow 1 \quad (22)$$

不难看出,在所考虑的 $2h/b$ 范围内,该渐近曲线与其精确值非常吻合,因此,用 $\delta' \simeq k'$ 作为方程式(3)展开式的小参数,这里又提供了一个证据。

魏森斯伯格的理论假定环量沿涡迹成椭圆型分布,其所给的结果与本文理论的结果相近。

四、端板效应

1. 变 换

鉴于 δ' 作为地面效应平翼情况下的展开式参数是合适的,这里将应用该小参数 δ' ,按照在第2节中叙述过的方法,用下式代替方程式(3):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{C(\alpha^2 - t^2)(1 - t^2)^{1/2}}{(1 - \lambda^2 t^2)(1 - k^2 t^2)^{1/2}} \quad (23)$$

式中,方程式(3)所用的 γ 已用 k 代替,因为按照椭圆函数的习惯符号, k 是代表该函数的模数。

文献[7]借助下述变换式完成了方程式(23)的积分:

$$t = \operatorname{sn} 2Ks \quad (24)$$

由此给出

$$\begin{aligned} \Omega = C \left[\alpha^2 2Ks - \frac{\{2Ks - E(2Ks)\}}{k^2 \lambda^2} - \frac{(\alpha^2 - 1/\lambda^2)(1 - \lambda^2)^{1/2}}{\lambda(k^2 - \lambda^2)^{1/2}} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{\theta_0(\pi s - \pi s_1, q)}{\theta_0(\pi s + \pi s_1, q)} \right) + 2Ks Z(2Ks_1) \right\} \right] + C_0 \end{aligned} \quad (25)$$

式中 C_0 是积分常量, $s_1 = \operatorname{sn}^{-1}(\lambda/k)/2K$ 。以及 $\theta_v(\cdot, q)$ ($v=0, 1, 2$ 和 3) 和 $Z(\cdot)$ 分别是 Jacobian theta 函数和 Zeta 函数[6], q 定义为

$$q = \exp(-\pi K'/K)$$